BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN VỀ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN

Người báo cáo: Th.s Đào Xuân Hưng

Hà nội, 5/2019

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Lý thuyết định tính của hệ động lực rời rạc đã được nghiên cứu từ những năm đầu thế kỷ XVIII, song ngày nay nó vẫn được đông đảo các nhà khoa học quan tâm và nghiên cứu. Những kết quả cơ bản của nó được ứng dụng rộng rãi trong nhiều mô hình ứng dụng. Đặc biệt trong thời gian gần đây nhờ có sự phát triển của công nghệ tin học, lý thuyết hệ động lực rời rạc nói chung và lý thuyết định tính của các hệ phương trình sai phân nói riêng đã có sự phát triển vượt bậc đặc biệt là khả năng ứng dụng thực tiễn của nó.

Về tổng thể hầu hết các phương pháp thông dụng được sử dụng trong lý thuyết phương trình vi phân đều có thể xây dựng lại cho việc nghiên cứu tính chất nghiệm của các hệ phương trình sai phân. Tuy nhiên về lý thuyết tính toán và các biểu thức toán học trong một số công thức cơ bản lại khá phức tạp.

Mục tiêu cơ bản của báo cáo này là trình bày lại một cách hệ thống các khái niệm cơ bản về phép tính sai phân hữu hạn, chúng tôi cũng trình bày một cách vắn tắt lý thuyết phương trình sai phân cấp cao và hệ phương trình sai phân. Phần tiếp theo của báo cáo là các định lý cơ bản của Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định nghiệm của các hệ phương trình sai phân.

1.1 Sơ lược về phép tính sai phân hữu hạn

Định nghĩa 1.1. *Ta gọi sai phân hữu hạn cấp một của hàm số* $u(n) = u_n$ *với* $n \in$ ¢ *là hiệu*

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n.$$

Định nghĩa 1.2. *Ta gọi sai phân hữu hạn cấp 2 của hàm* $u(n) = u_n$ *là sai phân của sai phân cấp 1 của* u_n*, và nói chung sai phân cấp k của hàm* u_n *là sai phân của sai phân cấp* $k-1$ *của hàm số đó.*

Sai phân cấp 2 của hàm u_n là

$$\Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n) = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n;$$

Sai phân cấp 3 của hàm u_n là

$$\Delta^3 u_n = \Delta(\Delta^2 u_n) = \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n = u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n \ \ldots$$

Sai phân cấp k của hàm u_n là

$$\Delta^k u_n = \Delta(\Delta^{k-1} u_n) = \Delta^{k-1} u_{n+1} - \Delta^{k-1} u_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i u_{n+k-i},$$

trong đó $C_k^i = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$.

Các tính chất của sai phân:

Tính chất 1*:* Sai phân các cấp đều được biểu diễn qua các giá trị của hàm số

$$\Delta^k u_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i u_{n+k-i} \ ,$$

trong đó $C_k^i = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$.

Tính chất 2: Sai phân mọi cấp đều là toán tử tuyến tính

$$\Delta^k (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \Delta^k u_n + \beta \Delta^k v_n \ ,$$

với α, β là các số thực tuỳ ý.

Tính chất 3*:* Sai phân cấp k của đa thức bậc m bằng:

* Hằng số, nếu $k = m$,

* 0, nếu $k > m$,

* Đa thức bậc $(m - k)$, nếu $k < m$.

Tính chất 4:

$$\Delta u_n v_n = u_n \Delta v_n + v_n \Delta u_n \,,$$

$$\sum_{n=a}^{N} \Delta^k u_n = \Delta^{k-1} u_{N+1} - \Delta^{k-1} u_a \,,$$

đặc biệt khi $k = 1$, ta có

$$\sum_{n=a}^{N} \Delta u_n = u_{N+1} - u_a \ .$$

1.2 .Phương trình sai phân cấp cao

Định nghĩa 1.3. *Phương trình sai phân cấp k là một hệ thức giữa sai phân các cấp*

$$F(u_n, \Delta u_n, ..., \Delta^k u_n) = 0,$$

trong đó u_n coi là sai phân cấp 0 của hàm u_n, cấp của phương trình sai phân chính là cấp lớn nhất của các sai phân (ở đây là bằng k).

Định nghĩa 1.4. *Phương trình sai phân tuyến tính cấp k của hàm u_n là một biểu thức tuyến tính giữa các giá trị của hàm u_n tại các điểm khác nhau*

$$a_0 u_{n+k} + a_1 u_{n+k-1} + ... + a_k u_n = f_n,$$

trong đó $a_0, a_1, ..., a_k$ với $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$ là các hằng số hoặc các hàm số của n, được gọi là các hệ số của phương trình sai phân; f_n là một hàm số của n, được gọi là vế phải; u_n là giá trị cần tìm được gọi là ẩn.

**** Nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính:***

Xét phương trình sai phân tuyến tính cấp k

$$a_0 u_{n+k} + a_1 u_{n+k-1} + ... + a_k u_n = f_n. \tag{1.1}$$

Phương trình sai phân thuần nhất tương ứng

$$a_0 u_{n+k} + a_1 u_{n+k-1} + ... + a_k u_n = 0. \tag{1.2}$$

Phương trình đặc trưng

$$a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + ... + a_k = 0. \tag{1.3}$$

Nghiệm tổng quát u_n của phương trình sai phân tuyến tính (1.1) là $u_n = u^* + \overline{u}$, với u^* là một nghiệm riêng của phương trình (1.1) và $\overline{u}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (1.2).

Nghiệm tổng quát của (1.2) có dạng

$$\overline{u} = c_1 u_{n_1} + c_2 u_{n_2} + \ldots + c_k u_{n_k},$$

trong đó $u_{n_1}, u_{n_2}, \ldots, u_{n_k}$ là k nghiệm độc lập tuyến tính của (1.2) và $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các hằng số tuỳ ý.

Nếu (1.3) có k nghiệm phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ thì hệ $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_k^n\}$ là hệ k nghiệm độc lập tuyến tính của (1.2) và nghiệm tổng quát của (1.2) là

$$\overline{u} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \ldots + c_k\lambda_k^n .$$

Nếu (1.3) có nghiệm thực λ_j bội s thì ngoài nghiệm λ_j^n ta bổ xung thêm các vectơ $n\lambda_j^n, n^2\lambda_j^n, \ldots, n^{s-1}\lambda_j^n$ cũng là các nghiệm độc lập tuyến tính của (1.2) và nghiệm tổng quát của (1.2) là

$$\overline{u} = \sum_{i \neq j = 1}^{k} c_i\lambda_i^n + \sum_{i=0}^{s-1} c_j^i n^i \lambda_j^n .$$

Nếu (1.3) có nghiệm phức $\lambda_j = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ bội s thì ta lấy thêm các nghiệm $r^n n^i \cos n\varphi$, $r^n n^i \sin n\varphi$, $i = 0, \ldots, s-1$ và nghiệm tổng quát của (1.2) là

$$\overline{u} = \sum_{i \neq j = 1}^{k} c_i\lambda_i^n + \sum_{i=0}^{s-1} r^n (a_i n^i \cos n\varphi + b_i n^i \sin n\varphi),$$

trong đó a_i, b_i là các hằng số tuỳ ý.

1.3. Công thức nghiệm của hệ phương trình sai phân tuyến tính

1.3.1. Hệ phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất

Xét hệ phương trình sai phân (xem [11])

$$\begin{cases} u_1(n+1) = a_{11}(n)u_1(n) + a_{12}(n)u_2(n) + \ldots + a_{1m}(n)u_m(n), \\ u_2(n+1) = a_{21}(n)u_1(n) + a_{22}(n)u_2(n) + \ldots + a_{2m}(n)u_m(n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m(n+1) = a_{m1}(n)u_1(n) + a_{m2}(n)u_2(n) + \ldots + a_{mm}(n)u_m(n). \end{cases}$$

Đặt

$$u(n)=\begin{pmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ \vdots \\ u_m(n) \end{pmatrix};\ A(n)=\begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) & \cdots & a_{1m}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) & \cdots & a_{2m}(n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(n) & a_{m2}(n) & \cdots & a_{mm}(n) \end{pmatrix}.$$

Khi đó hệ trên có thể viết dưới dạng:

$$u(n+1)=A(n).u(n)\ ,\ n\geq n_0\,, \tag{1.4}$$

ở đây $u(n)=(u_1(n),u_2(n),...,u_m(n))^T\in\mathbb{R}^m$, $A(n)=(a_{ij}(n))_{m\times m}$ là ma trận không suy biến.

***Bài toán Cauchy**:*

$$\begin{cases} u(n+1)=A(n).u(n)\ ,\ n\geq n_0\,, \\ u(n_0)=u_0. \end{cases}$$

Bằng phương pháp truy hồi ta thấy bài toán Cauchy luôn có nghiệm và nghiệm của bài toán Cauchy được cho bởi

$$u(n)=A(n-1).A(n-2)...A(n_0+1).A(n_0).u_0 \text{ với mọi } n>n_0\,.$$

* Họ toán tử tiến hoá sinh bởi ma trận không suy biến

Định nghĩa 1.5. *Với mỗi $s\geq n_0$ ký hiệu*

$$U(n,s)=A(n-1).A(n-2)...A(s+1).A(s)\ ,\ n\geq s\geq n_0\,.$$

Khi đó $\{U(n,s)\}_{n\geq s\geq n_0}$ được gọi là họ các ma trận tiến hoá sinh bởi ma trận hàm không suy biến $A(n)$, $U(n,n_0)$ được gọi là ma trận nghiệm cơ bản chuẩn tắc (ma trận Cauchy) hoặc còn được gọi là hàm Green.

Nhận xét: Từ định nghĩa của ma trận Cauchy và họ toán tử tiến hoá ta thấy với mỗi $s\geq n_0$ thì :

* $U(n_0,n_0)=I$.

* $U(n,s) = U(n,k).U(k,s)$ với mọi $n \geq k \geq s$.

* $U(n,s) = U(n,n_0).U^{-1}(s,n_0)$ với mọi $n \geq s$.

Nghiệm $u(n) := u(n,n_0,u_0)$ của bài toán Cauchy có thể viết dưới dạng:

$$\left[\begin{array}{l} u(n) = U(n,n_0).u_0 \ , \ n \geq n_0 \ , \\ u(n) = U(n,s).u(s) \ , \ n \geq s \geq n_0. \end{array}\right.$$

Khi $A(n) = A$ là ma trận hằng ta thấy $U(n,n_0) = A^{n-n_0}$ với mọi $n \geq n_0$.

1.3.2. Hệ phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất

Xét hệ phương trình sai phân: (xem [11])

$$\begin{cases} u(n+1) = A(n).u(n) + b(n) \\ u(n_0) = u_0 \end{cases} \quad n \geq n_0 \ , \ b(n) \in \mathbb{R}^m. \qquad (1.5)$$

Định lý 1.1. *Nghiệm* $u(n) := u(n,n_0,u_0)$ *của hệ (1.5) xác định bởi công thức*

$$u(n) = U(n,n_0).u_0 + \sum_{k=n_0+1}^{n} U(n,k).b(k-1). \qquad (1.6)$$

Chứng minh. Ta tìm nghiệm $u(n)$ của (1.5) dưới dạng $u(n) = U(n,n_0).C(n)$ (1.7)

sao cho $u(n_0) = u_0$ bằng phương pháp biến thiên hằng số Lagrăng .

Vì $u(n_0) = U(n_0,n_0)C(n_0) = C(n_0) \Rightarrow C(n_0) = u_0$.

Từ $u(n) = U(n,n_0)C(n) \Rightarrow u(n+1) = U(n+1,n_0)C(n+1)$ (1.8)

Mà $u(n+1) = A(n)u(n) + b(n) = A(n)U(n,n_0)C(n) + b(n)$

$$= U(n+1,n_0)C(n) + b(n). \qquad (1.9)$$

Kết hợp (1.8) và (1.9) ta được

$$U(n+1,n_0)C(n+1) = U(n+1,n_0)C(n) + b(n)$$

suy ra $U(n+1,n_0)\Delta C(n) = b(n)$ hay $\Delta C(n) = U^{-1}(n+1,n_0).b(n)$.

Do đó : $$\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta C(k) = \sum_{k=n_0}^{n-1} U^{-1}(k+1,n_0).b(k) \ .$$

Ta tìm được $C(n) - C(n_0) = \sum_{k=n_0+1}^{n} U^{-1}(k,n_0).b(k-1)$. (1.10)

Vì $U(n,n_0).U^{-1}(k,n_0) = U(n,k)$ nên thay (1.10) vào (1.7) ta nhận được (1.6).

Hệ quả : *Nếu* $A(n) = A$ *là ma trận hằng thì*

$$u(n) = A^{n-n_0}.u_0 + \sum_{i=n_0+1}^{n} A^{n-i}.b(i-1) \ \textit{với mọi} \ n > n_0 \ .$$

1.4.Các khái niệm về ổn định cho hệ phương trình sai phân autonomous

1.4.1. Các khái niệm về ổn định

Xét hệ phương trình sai phân phi tuyến (xem [11])

$$\begin{cases} u_1(n+1) = f_1(n,u_1(n),u_2(n),...,u_m(n)), \\ u_2(n+1) = f_2(n,u_1(n),u_2(n),...,u_m(n)), \\ .... \\ u_m(n+1) = f_m(n,u_1(n),u_2(n),...,u_m(n)). \end{cases}$$

Đặt

$$u(n)=\begin{pmatrix} u_1(n) \\ u_2(n) \\ \vdots \\ u_m(n) \end{pmatrix} \;;\; f(n,u(n))=\begin{pmatrix} f_1(n,u_1(n),u_2(n),...,u_m(n)) \\ f_2(n,u_1(n),u_2(n),...,u_m(n)) \\ \vdots \\ f_m(n,u_1(n),u_2(n),...,u_m(n)) \end{pmatrix}.$$

Khi đó bài toán Cauchy của hệ được viết dưới dạng :

$$u(n+1)=f(n,u(n)),\ u(n_0)=u_0,\ n\ge n_0, \qquad (1.12)$$

trong đó *u* và *f* là các vectơ $(1\times m)$ thành phần u_i và f_i, $1\le i\le m$. Giả sử $f(n,0)=0$ với mọi $n\in\mathbb{N}$ để hệ có nghiệm tầm thường $u(n)=u(n,n_0,0)=0$.

Định nghĩa 1.6. *Nghiệm tầm thường $u(n)=0$ của hệ (1.12) được gọi là ổn định theo Lyapunov, nếu với $\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\delta(\varepsilon,n_0)$ sao cho từ bất đẳng thức $\|u_0\|<\delta$ suy ra $\|u(n)\|<\varepsilon$ với mọi $n\ge n_0$.*

Định nghĩa 1.7. *Nghiệm tầm thường $u(n)=0$ của hệ (1.12) được gọi là ổn định tiệm cận theo Lyapunov, nếu nó ổn định theo Lyapunov và $\exists\ h>0$ sao cho mọi nghiệm u(n) của hệ thoả mãn điều kiện $\|u_0\|<h$ thì $\lim\limits_{n\to\infty}\|u(n)\|=0$.*

Định nghĩa 1.8. *Nghiệm tầm thường $u(n)=0$ của hệ (1.12) được gọi là ổn định đều (ổn định tiệm cận đều) theo Lyapunov nếu trong định nghĩa tương ứng, số δ được chọn không phụ thuộc vào a.*

Định nghĩa 1.9. *Nghiệm tầm thường $u(n)=0$ của hệ (1.12) được gọi là ổn định mũ nếu đối với mỗi nghiệm $u(n)\equiv u(n,n_0,u_0)$ của hệ thoả mãn bất đẳng thức:*

$$\|u(n)\|\le N\|u_0\|e^{-\alpha(n-a)}\ ,\ n\ge a\ ,$$

trong đó N và α là hai hằng số dương.

1.4.2. *Phương pháp hàm Lyapunov cho hệ sai phân autonomous*

Xét bài toán Cauchy: (xem [11])

$$u(n+1)=f(u(n))\ ,\ u(0)=u_0\ ,\ n\in\mathbb{N}\ , \qquad (1.13)$$

giả sử $f(0)=0$ và $f(u)\neq 0$ với $u\neq 0$ trong lân cận của gốc sao cho (1.13) có nghiệm tầm thường $u(n)=u(n,0,0)=0$. Cho Ω^* là một tập mở trong $\mathbb{R}^m$ và chứa gốc. Giả sử V(u) là một hàm liên tục vô hướng xác định trên Ω^*, $V\in C[\Omega^*,R]$ và $V(0)=0$.

Định nghĩa 1.10. *V(u) được gọi là xác định dương trên Ω^* nếu và chỉ nếu $V(u)>0$ với $u\neq 0$, $u\in\Omega^*$.*

Định nghĩa 1.11. *V(u) được gọi là nửa xác định dương trên Ω^* nếu $V(u)\geq 0$, với mọi $u\in\Omega^*$, (dấu bằng chỉ xảy ra tại những điểm xác định)*

Định nghĩa 1.12. *V(u) được gọi là xác định âm (nửa xác định âm) trên Ω^* nếu và chỉ nếu $-V(u)$ là xác định dương (nửa xác định dương) trên Ω^*.*

Định nghĩa 1.13. *Hàm $\phi(r)$ được gọi là thuộc vào lớp K nếu $\phi\in C[[0,\rho),R_+]$, $\phi(0)=0$ và $\phi(r)$ tăng chặt theo r.*

Vì $V(u)$ liên tục, với r đủ nhỏ, $0<c\leq r\leq d$ ta có

$$V(u)\leq \max_{\|v\|\leq r} V(v),\ \ V(u)\geq \min_{r\leq\|v\|\leq d} V(v)\ , \tag{1.14}$$

trong đó $\|u\|=r$. Trong (1.14) bên phải là hàm đơn điệu của r và ta có thể ước lượng hàm này thuộc vào lớp K. Do đó tồn tại hai hàm $\phi,\xi\in K$ sao cho :

$$\phi(\|u\|)\leq V(u)\leq \xi(\|u\|)\,. \tag{1.15}$$

Từ đó có thể định nghĩa cho hàm xác định dương V(u) như sau :

Định nghĩa 1.14. *V(u) được gọi là xác định dương trên Ω^* nếu và chỉ nếu $V(0)=0$ và tồn tại một hàm $\phi(r)\in K$ sao cho $\phi(r)\leq V(u)$, $\|u\|=r$, $u\in\Omega^*$.*

Đặt S_ρ là tập $S_\rho=\{u\in R^m:\|u\|\leq\rho\}$ và $u(n)=u(n,0,u_0)$ là một nghiệm bất kỳ của (1.13) sao cho $\|u(n)\|<\rho$, $\forall\ n\in\mathbb{N}$. Dọc theo nghiệm $u(n)=\ u(n,0,u_0)$ của (1.13) xét sai phân của hàm V(u) được xác định bởi $\Delta V(u(n))=V(u(n+1))$ $-V(u(n))=V(f(u(n)))-V(u(n))$. Hàm V(u) được gọi là hàm Lyapunov.

Định lý 1.2. *Giả sử tồn tại hàm vô hướng xác định dương* $V(u) \in C[S_\rho, R^+]$ *sao cho* $\Delta V(u(n,0,u_0)) \le 0$ *với nghiệm bất kỳ* $u(n) = u(n,0,u_0)$ *của (1.13) thoả mãn* $\| u(n) \| < \rho$. *Khi đó nghiệm tầm thường* $u(n,0,0) = 0$ *của (1.13) là ổn định.*

Định lý 1.3. *Giả sử tồn tại hàm vô hướng xác định dương* $V(u) \in C[S_\rho, R^+]$ *sao cho* $\Delta V(u(n,0,u_0)) \le -\alpha(\|u(n,0,u_0)\|)$ *trong đó* $\alpha \in K$ *và nghiệm bất kỳ* $u(n) = u(n,0,u_0)$ *của (1.13) thoả mãn* $\| u(n) \| < \rho$. *Khi đó nghiệm tầm thường* $u(n,0,0) = 0$ *của (1.13) là ổn định tiệm cận.*

Định lý 1.4. *Giả sử tồn tại hàm vô hướng* $V(u) \in C[S_\rho , R]$, $V(0) = 0$ *sao cho* $\Delta V(u(n,0,u_0)) \ge \alpha(\|u(n,0,u_0)\|)$ *với* $\alpha \in K$ *và nghiệm bất kỳ* $u(n) = u(n,0,u_0)$ *của (1.13) thoả mãn* $\| u(n) \| < \rho$ *và nếu trong mọi lân cận H của gốc* $(H \subset S_\rho)$ *tồn tại một điểm* u_0 *sao cho* $V(u_0) > 0$. *Khì đó nghiệm tầm thường* $u(n,0,0) = 0$ *của (1.13) là không ổn định.*

KẾT LUẬN

Trong báo cáo này chúng tôi đã trình bày một cách hệ thống các khái niệm cơ bản của phương trình, hệ phương trình sai phân, những khái niệm này là cơ sở quan trọng để nghiên cứu sâu hơn về sai phân cũng như các ứng dụng thực tiễn cuả nó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] B.P. Đêmiđôvich (1967), Bài giảng về lý thuyết ổn định toán học (dịch từ tập tiếng Nga), NXB Khoa học Maxcơva.

[2] Lê Đình Thịnh, Đặng Đình Châu, Lê Đình Định, Phan Văn Hạp(2001), Phương trình sai phân và một số ứng dụng, NXB Giáo dục.

[3] Billur Kaymakcalan (1992), Lyapunov stability theory for Dynamic systems on the time scales J. Appl.Math and Stochastic Analysis 275-282.

[4] G.Eleutheriadis, M.Boudourides (1998) On the problem of asymptotic equivalence of ordinary differential equation, Ital, J.Puer Appl Math 4, 61-72.

[5] J.K. Hale and S.M.V. Lunel, (1993) Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag New York Berlin London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona Budapest

[6] J.Kato (1996), The asymptotic equivalence of functional differential equa-tions, J. differential Equat.1,3, 306-332.

[7] K.L. Coppel (1965) Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations , D.C Heath and Company Boston Publisher.

[8] K.L. Cooke (1967), Asymptotic theory for the delay-differential equations J.Math.Analysis and Appl 160-173.

[9] Nguyễn Thế Hoàn (1975) Asymptotic equivalence of systems of differential equations, IZV Acad Nauk ASSR Number 2, 35-40 (Russian).

[10] N.Levinson, The asymptotic behavior of systems of linear differental equations Amer.J.Math, 63 (1946), 1-6.

[11] R.P. Agarwal (1992), difference equations and inequalities, Marcel Dekker Inc , New York.

[12] Vũ Ngọc Phát (2001), Nhập môn lý thuyết điều khiển toán học, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.