BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ỨNG DỤNG SỐ PHỨC VÀO GIẢI BÀI TOÁN DỰNG HÌNH VÀ BÀI TOÁN QUỸ TÍCH

Người báo cáo: Th.s Đào Xuân Hưng

Hà nội, 1/2019

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Số phức xuất hiện từ thể kỷ XIX do nhu cầu phát triển của Toán học về giải những phương trình đại số. Từ khi ra đời số phức đã thúc đẩy toán học tiến lên mạnh mẽ và giải quyết được nhiều vấn đề của khoa học và kỹ thuật. Đối với học sinh bậc THPT và sinh viên năm nhất đại học thì số phức là một nội dung còn mới mẻ, với thời lượng không nhiều, học sinh mới chỉ biết được những kiến thức rất cơ bản của số phức, việc khai thác các ứng dụng của số phức còn hạn chế, đặc biệt là việc sử dụng số phức như một phương tiện để giải các bài toán Hình học phẳng là một vấn đề khó, đòi hỏi học sinh phải có năng lực giải toán nhất định, biết vận dụng kiến thức đa dạng của toán học. Với những lí do trên, tôi chọn đề tài báo cáo này.

1. Ứng dụng số phức giải toán dựng hình

Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm O bán kính R và hai dây cung AB, CD. Tìm điểm X trên đường tròn sao cho $XA^2 + XB^2 = XC^2 + XD^2$

Giải

Giả sử mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy sao cho gốc tọa độ trùng với tâm đường tròn đã cho. Ta xét trường hợp hai dây cung AB, CD không cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Ta có

$$XA^2 = |A - X|^2 = (A - X)\left(\overline{A} - \overline{X}\right) = |A|^2 + |X|^2 - \overline{X}A - \overline{A}X = 2R^2 - X\overline{A} - \overline{X}A$$

$$XB^2 = |B - X|^2 = (B - X)\left(\overline{B} - \overline{X}\right) = |B|^2 + |X|^2 - \overline{X}B - \overline{B}X = 2R^2 - X\overline{B} - \overline{X}B$$

$$XC^2 = |C - X|^2 = (C - X)\left(\overline{C} - \overline{X}\right) = |C|^2 + |X|^2 - \overline{X}C - CX = 2R^2 - X\overline{C} - \overline{X}C$$

$$XD^2 = |D - X|^2 = (D - X)\left(\overline{D} - \overline{X}\right) = |D|^2 + |X|^2 - \overline{X}D - \overline{D}X = 2R^2 - X\overline{D} - \overline{X}D$$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD thì $A + B = 2I, C + D = 2J$.

Từ đó và các hệ thức trên ta được

$$\begin{aligned}
& XA^2 + XB^2 = XC^2 + XD^2 \\
& \Leftrightarrow \overline{X}A + \overline{A}X + \overline{X}B + \overline{B}X + \overline{X}C + \overline{C}X + \overline{X}D + \overline{D}X \\
& \Leftrightarrow X\left(\overline{A} + \overline{B}\right) + \overline{X}(A + B) = X\left(\overline{C} + \overline{D}\right) + \overline{X}(C + D) \\
& \Leftrightarrow X\overline{I} + \overline{X}I = X\overline{J} + \overline{X}J \\
& \Leftrightarrow X\left(\overline{I} - \overline{J}\right) + \overline{X}(I - J) = 0 \qquad (1)
\end{aligned}$$

Đặt $X = x_1 + iy_1, I - J = x_2 + iy_2$ thì

$$\begin{aligned}
(1) & \Leftrightarrow (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) = 0 \\
& \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 - i(x_1y_2 - x_2y_1) + x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_1y_2 - x_2y_1) = 0 \\
& \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \\
& \Leftrightarrow \overrightarrow{OX}\left(\overrightarrow{OI} - \overrightarrow{OJ}\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \overrightarrow{OX}.\overrightarrow{IJ} = 0
\end{aligned}$$

Do đó $OX \perp IJ$

Suy ra điểm X là giao của đường tròn đã cho với đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và vuông góc với đường thẳng JI.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC với trọng tâm G, M là điểm bất kì thuộc mặt phẳng tam giác. Chứng minh rằng:

1) $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3GA^2 + GB^2 + GC^2$

2) $MB^2 + MC^2 + MA^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$.

Hãy tìm trong tam giác ABC điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2$ là nhỏ nhất.

Giải

Không làm mất tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng trọng tâm G của tam giác ABC trùng với gốc tọa độ O.

Trên mặt phẳng tọa độ phức, giả sử tọa độ của các đỉnh là $A(a), B(b), C(c), G(g), M(m)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên suy ra tọa độ của G là $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$ mà $G \equiv O$ nên suy ra $a+b+c=0$.

1) Ta có

$$3GA^2 + GB^2 + GC^2 = 3|a|^2 + |b|^2 + |c|^2$$

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = |b-a|^2 + |c-b|^2 + |c-a|^2$$

Tính từng số hạng theo công thức $|z|^2 = z.\overline{z}$, ta có

$$|b-a|^2 = b-a\ \overline{b}-\overline{a} = b.\overline{b} + a.\overline{a} - a.\overline{b} - \overline{a}.b,$$

$$|c-b|^2 = c-b\ \overline{c}-\overline{b} = c.\overline{c} + b.\overline{b} - b.\overline{c} - \overline{b}.c,$$

$$|a-c|^2 = a-c\ \overline{a}-\overline{c} = c.\overline{c} + a.\overline{a} - a.\overline{c} - \overline{a}.c.$$

Cộng các đẳng thức trên, vế với vế ta được

$$|b-a|^2 + |c-b|^2 + |c-a|^2 = 2|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 - \left[a\ \overline{b}+\overline{c} + b\overline{a}+\overline{c} + c\ \overline{a}+\overline{b}\ \right]$$

Do $a+b+c=0$ suy ra $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0$. Từ đó suy ra $\overline{b}+\overline{c} = -\overline{a}, \overline{a}+\overline{c} = -\overline{b}, \overline{a}+\overline{b} = -\overline{c}$.

Do đó ta có $a\ \overline{b}+\overline{c} + b\overline{a}+\overline{c} + c\ \overline{a}+\overline{b} = -a\overline{a} + -b\overline{b} - c\overline{c} = -|a|^2 + |b|^2 + |c|^2$

Vậy ta có $|b-a|^2+|c-b|^2+|c-a|^2=3|a|^2+|b|^2+|c|^2$. □

2) Ta có

$$\begin{aligned}
&MA^2+MB^2+MC^2=|a-m|^2+|b-m|^2+|c-m|^2\\
&=a-m\ \overline{a}-\overline{m}+b-m\ \overline{b}-\overline{m}+c-m\ \overline{c}-\overline{m}\\
&=a\overline{a}+b\overline{b}+c\overline{c}+3m\overline{m}-\left[m\ \overline{a}+\overline{b}+\overline{c}+\overline{m}\ a+b+c\right]\\
&=|a|^2+|b|^2+|c|^2+3|m|^2\\
&=GA^2+GB^2+GC^2+3MG^2.\square
\end{aligned}$$

Vậy $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG^2 nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv G$, nghĩa là M là trọng tâm của tam giác ABC.

Ví dụ 3. Trong tất cả các tam giác nội tiếp trong cùng một đường tròn cho trước, hãy tìm tam giác có tổng bình phương các cạnh là lớn nhất.

Giải

Dựng hệ tọa độ vuông góc Oxy sao cho gốc tọa độ O trùng với tâm đường tròn. Gọi G là trọng tâm G tam giác ABC, ta có

$$\begin{aligned}
&AB^2+BC^2+AC^2=3\left(GA^2+GB^2+GC^2\right)=3\left(\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2\right)\\
&=3\left[(A-G)\left(\overline{A}-\overline{G}\right)+(B-G)\left(\overline{B}-\overline{G}\right)+(C-G)\left(\overline{C}-\overline{G}\right)\right]\\
&=3\left[|A|^2-A\overline{G}-G\overline{A}+|G|^2+|B|^2-B\overline{G}-G\overline{B}+|G|^2+|C|^2-C\overline{G}-G\overline{C}+|G|^2\right]\\
&=3\left(|A|^2+|B|^2+|C|^2\right)+9|C|^2-3G\left(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}\right)-3\overline{G}(A+B+C)\\
&=9R^2+9|G|^2-3G\left(3\overline{G}\right)-3\overline{G}(3G)=9R^2-9|G|^2
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra tổng $AB^2+BC^2+AC^2$ lớn nhất khi và chỉ khi $G\equiv O$ hay tam giác ABC đều và tổng lớn nhất đó bằng $9R^2$.

Ví dụ 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn w. Gọi A_1 là trung điểm cạnh BC và A_2 là hình chiếu của A_1 trên tiếp tuyến của w tại A. Các điểm B_1,B_2,C_1,C_2 được xác định một cách tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2 đồng quy. Hãy xác định vị trí hình học của điểm đồng quy.

Giải

Không mất tính tổng quát, coi w là đường tròn đơn vị. Gọi w là tọa vị của điểm W trong mặt phẳng phức.

Ta có $a_1 = \dfrac{b+c}{2}$ và đường thẳng A_1A_2 là đường thẳng đi qua $A_1\left(a_1\right)$, song song với OA, do đó A_1A_2 có phương trình $\overline{a}z - a\overline{z} = \overline{a}.\dfrac{b+c}{2} - a.\overline{\left(\dfrac{b+c}{2}\right)}$

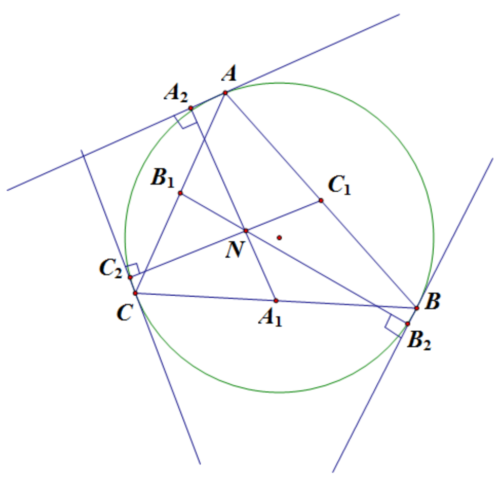
Do $a\overline{a} = 1$ nên phương trình được viết lại dưới dạng

$$z - a^2\overline{z} = \left(\frac{b+c}{2} - a^2\overline{\left(\frac{b+c}{2}\right)}\right)$$

hay

$$z - a^2\overline{z} = \frac{a+b+c}{2} - a^2\overline{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)}$$

Gọi N là tâm đường tròn Euler của tam giác, thì $n = \dfrac{a+b+c}{2}$ do đó A_1A_2 đi qua N. Tương tự cũng có B_1, B_2, C_1, C_2 đi qua N.



Hình 15

2. Ứng dụng số phức giải toán quỹ tích

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC, trong đó các đỉnh B, C cố định, đỉnh A thay đổi. Tìm quỹ tích các trung điểm M, N của các cạnh tương ứng AB, AC và trọng tâm G của tam giác ABC trong các trường hợp:

a) Độ dài đường cao AA' không đổi.

b) Chân A' của đường cao AA' cố định.

c) Độ dài đường cao AA' không đổi.

Giải

a) Độ dài đường cao AA' không đổi.

Giả sử mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Descartes Oxy sao cho gốc tọa độ trùng với trung điểm cạnh BC, trục hoành đi qua hai đỉnh B, C.

+ Quỹ tích các trung điểm M, N tương ứng của các cạnh AB, AC.

Ta có: B = -C, AA' = h = const => A = x + ih $(-\infty < x < +\infty)$

Do đó M = $\frac{1}{2}$(B + x + ih) = $\frac{1}{2}$(-C + x + ih), N = $\frac{1}{2}$(C + x + ih).

Suy ra các điểm M, N chuyển động trên đường thẳng d_1 song song với trục hoành có phương trình z = $\frac{1}{2}$(x' + ih), $-\infty < x' < +\infty$, và cách trục hoành một khoảng bằng $\frac{1}{2}$h, khoảng cách giữa M và N luôn bằng |M - N| = | $\frac{1}{2}$(-C + x + ih) - $\frac{1}{2}$(C + x + ih)| = |C|.

+ Quỹ tích trọng tâm G của tam giác ABC.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

G = $\frac{1}{3}$(A + B + C) = $\frac{1}{3}$A = $\frac{1}{3}$(x + ih), $-\infty < x < +\infty$

Suy ra, G chuyển động trên đường thẳng d_2 có phương trình z = $\frac{1}{3}$(x + ih), $-\infty < x < +\infty$, song song với trục hoành và cách trục hoành một khoảng bằng $\frac{1}{3}$h.

b) Chân A' của đường cao AA' cố định.

Ta có A = A' + iy, $-\infty < y < +$, do đó

$M = \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(B + A' + iy)$

$N = \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(C + A' + iy)$

$G = \frac{1}{3}(A + B + C) = \frac{1}{3}(A' + iy)$.

Từ đó suy ra

Điểm M chuyển động trên đường thẳng k_1 vuông góc với trục Ox, đi qua điểm $\frac{1}{2}(A' + B)$ thuộc trục Ox và có phương trình $z = \frac{1}{2}(A' + B) + \frac{1}{2}iy$.

Điểm N chuyển động trên đường thẳng k_2 vuông góc với trục Ox, đi qua điểm $\frac{1}{2}(A' + C)$ thuộc trục Ox và có phương trình $z = \frac{1}{2}(A' + C) + \frac{1}{2}iy$.

Điểm G chuyển động trên đường thẳng k_3 vuông góc với trục Ox, đi qua điểm $\frac{1}{3}A'$ thuộc trục Ox và có phương trình $z = \frac{1}{3}A' + \frac{1}{3}iy$.

Ví dụ 2: Cho hình bình hành ABCD.

3) Chứng minh rằng: $(MA^2 + MC^2) - (MB^2 + MD^2)$ là hằng số, không bị phụ thuộc vị trí điểm M.

4) Tìm tập hợp điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$ (k là số thực).

Giải

Đặt giao điểm hai đường chéo của hình bình hành trùng với gốc tọa độ O.

2. Chứng minh $(MA^2 + MC^2) - (MB^2 + MD^2)$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Ta tính MA^2, MB^2, MC^2, MD^2 là bình phương của modun các số phức

$$M - A, M - B, M - C, M - D.$$

$\bullet MA^2 = |M-A|^2 = (M-A)(\overline{M}-\overline{A}) = M\overline{M} + A\overline{A} - M\overline{A} - \overline{M}A$

$= |M|^2 + |A|^2 - M\overline{A} - \overline{M}A$

- Tương tự

$MB^2 = |M-B|^2 = |M|^2 + |B|^2 - M\overline{B} - \overline{M}B$

$MC^2 = |M-C|^2 = |M|^2 + |C|^2 - M\overline{C} - \overline{M}C$

$MD^2 = |M-D|^2 = |M|^2 + |D|^2 - M\overline{D} - \overline{M}D$

- Từ đó

$(MA^2 + MC^2) - (MB^2 + MD^2)$

$= (|A|^2 + |C|^2) - (|B|^2 + |D|^2) - M(\overline{A} + \overline{C}) - \overline{M}(A + C) + M(\overline{B} + \overline{D}) + \overline{M}(B + D)$

$= |A|^2 + |C|^2 - |B|^2 - |D|^2 = OA^2 + OC^2 - OB^2 - OD^2$

$= 2OA^2 - 2OB^2$ không đổi.

b) Tìm tập hợp điểm M sao cho: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$

- Sử dụng các kết quả tính được ở phần trên ta có

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$

$= 4|M|^2 + |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2 - M(\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D}) - \overline{M}(A + B + C + D)$

$= 4|M|^2 + |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + |D|^2 = 4OM^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$

$= 4OM^2 + 2OA^2 + 2OB^2$

Từ đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2 <=> 4OM^2 + 2OA^2 + 2OB^2 = k^2$.

Ví dụ 3. Cho đường tròn (C) đường kính AB = 2R, điểm M chuyển động trên (C), A' là điểm đối xứng của A qua M. Tìm tập hợp điểm A' và trọng tâm G của tam giác A'AB.

Giải

Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho gốc tọa độ O trùng với tâm đường tròn (C) đã cho, trục hoành đi qua các điểm A, B.

* Tập hợp các điểm A'

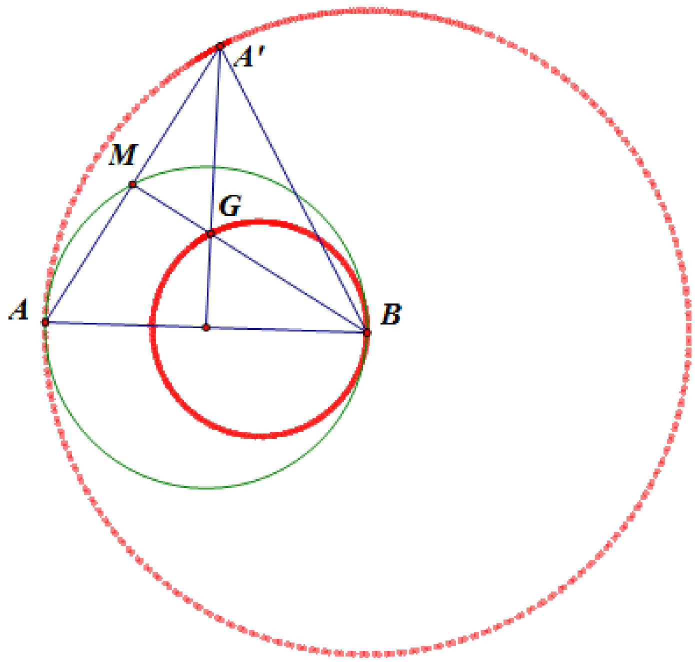
Ta có $B = -A, A' + A = 2M \Rightarrow A' - B = 2M \Rightarrow |A' - B| = 2|M| = 2R$. Suy ra, điểm A' chuyển động trên đường tròn (C_1) tâm B, bán kính 2R.

* Tập hợp trọng tâm G của tam giác A'AB.

Gọi G là trọng tâm của tam giác A'AB. Ta có $G=\frac{1}{3}\left(A'+A+B\right)=\frac{1}{3}A'=\frac{1}{3}\left(B+2M\right)$

Suy ra $G-\frac{1}{3}B=\frac{2}{3}M\Rightarrow G-J=\frac{2}{3}M$, trong đó $J=\frac{1}{3}B$.

Do đó $\left|G-J\right|=\frac{2}{3}\left|M\right|=\frac{2}{3}R$. Vậy điểm G chuyển động trên đường tròn $\left(C_2\right)$ tâm tại $J=\frac{1}{3}B$, bán kính $\frac{2}{3}R$.



Hình 16

Ví dụ 4. Cho nửa đường tròn có đường kính AB = 2R cố định. Điểm C chuyển động trên nửa đường tròn. Về phía ngoài tam giác ABC dựng tam giác ACD vuông cân ở A. Tìm tập hợp điểm D.

Giải

Đặt đoạn AB = 2R trên trục thực, điểm A trùng với gốc tọa độ O. Tam giác ACD vuông ở A và nằm ở phía ngoài tam giác ABC nên $D=C\left(cos90^0+i\,sin90^0\right)=iC$.

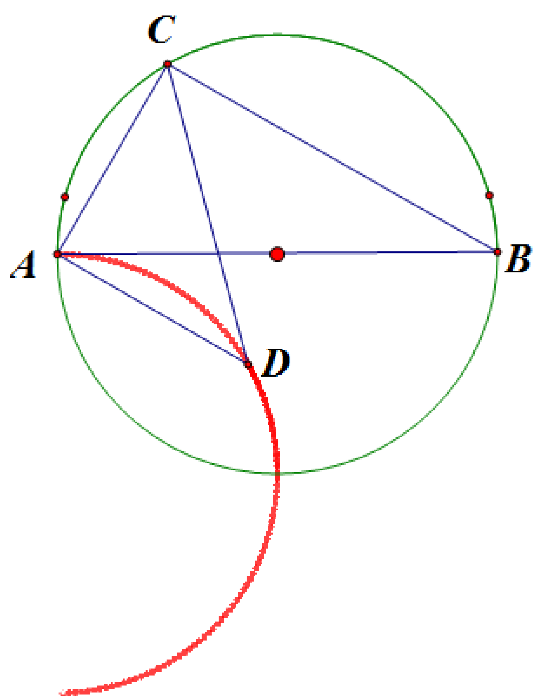
Điểm C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB nên

$$C = R + R(\cos t + i\sin t),\ 0 \le t \le 180^0$$

Do đó $D = iC = iR + R(\cos t + i\sin t)i$. Vì $I = \cos 90^0 + i\sin 90^0$ và theo công thức nhân hai số phức dưới dạng lượng giác ta có

$$D = iR + R\left[\cos\left(t + 90^0\right) + i\sin\left(t + 90^0\right)\right],\ 0 \le t \le 180^0$$

Vậy tập hợp điểm D là nửa đường tròn bên trái của đường tròn tâm $D_0 = iR$, bán kính R.



Hình 17

Ví dụ 5. Cho đường tròn (C) tâm O, bán kính R, BC là dây cung cố định không phải là đường kính của đường tròn (C), điểm A chuyển động trên cung lớn BC. Tìm tập hợp trọng tâm G của tam giác ABC.

Giải

Giả sử mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy sao cho gốc tọa độ O trùng với tâm đường tròn (C), trục hoành song song với dây cung BC. Do đó trục tung vuông góc với BC và đi qua trung điểm I của BC.

Ta có

$$B + C = 2I$$

$$G = \frac{1}{3}(A + B + C) = \frac{1}{3}(A + 2I)$$

$$\Rightarrow G - \frac{2}{3}I = \frac{1}{3}A \Rightarrow G - J = \frac{1}{3}A$$

Trong đó $J = \frac{2}{3}I$. Vậy G chuyển động trên đường tròn tâm J bán kính $\frac{1}{3}R$. Vì A chuyển động trên cung lớn BC nên G chuyển động trên một cung tròn của đường tròn tâm J bán kính $\frac{1}{3}R$.

KẾT LUẬN

Có thể nói rằng, số phức tuy không phải là nội dung mới của Toán học song nó là một vấn đề rất mới mẻ và tương đối phức tạp với các em HS bậc Trung họcvà SV năm nhất, đặc biệt là ứng dụng số phức vào giải toán hình học phẳng, hơn nữa đây lại là một vấn đề mà trong thực tế giảng dạy hiện nay chưa được quan tâm, chưa được chú trọng bồi dưỡng cho các em khá giỏi.. Tuy nhiên, việc sử dụng số phức như một công cụ giải toán không những mang lại cho học sinh, SV một phương pháp giải toán mới mà góp phần đáng kể vào việc rèn luyện kĩ năng bồi dưỡng năng lực giải toán của HS, SV, đặc biệt là giải toán hình học phẳng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Đoàn Quỳnh (1997), *Số phức với hình học phẳng*, NXB Giáo dục.

[2]. Nguyễn Văn Mậu – chủ biên (2009), *Chuyên đề số phức và áp dụng*, NXB ĐH Quốc Gia Hà Nội.

[3]. Nguyễn Hữu Điền (2000), *Phương pháp số phức và hình học phẳng*, NXB ĐH Quốc Gia Hà Nội.
[4]. Võ Thanh Vân - chủ biên (2009), Lê Hiển Dương, Nguyễn Ngọc Giang, *Chuyên đề ứng dụng số phức trong giải toán THPT*, NXB ĐH Sư Phạm.
[5]. Nguyễn Phụ Hy (2006), *Ứng dụng giải tích để giải toán THPT*, tập 2, NXB giáo dục.
[6]. A.I. Markusevits (1987), *Số phức và ánh xạ bảo giác*, NXB Khoa học và kĩ thuật.
[7]. Liang-shin Hahn, *Complex and Geometry*, The Mathematical Association of America.
[8]. Nguyễn Văn Khuê, Lê Mậu Hải (2001), *Hàm số biến số phức*, NXB ĐH Quốc Gia Hà Nội.
[9]. Titu Andreescu, Dorin Andrica (2002), *Complex numbers from A to–Z.*
[10]. Http//:www.mathscope.com.vn
[11]. Http://diendantoanhoc.net