Chương I. Phương pháp định thức (Công thức Gauss – Shoelace) trong tính diện tích trắc địa

Mở đầu

Trong ngành trắc địa, việc tính diện tích các thửa đất hay các khu vực địa hình là một nhiệm vụ cơ bản và quan trọng. Phương pháp sử dụng **định thức (determinant)** — hay còn gọi là **công thức Gauss** hoặc **công thức "dây giày" (Shoelace formula)** — là cách tiếp cận phổ biến và hiệu quả nhất khi biết tọa độ các đỉnh.

Dưới đây là lý thuyết chi tiết về cách xây dựng phương pháp này.

1 Nguyên lý cơ bản từ Hình học Giải tích

Giả sử ta có một tam giác tạo bởi gốc tọa độ

$$O(0,0)$$

và hai điểm

$$A(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2).$$

Diện tích $S_{\triangle OAB}$ của tam giác được tính bằng trị tuyệt đối của nửa định thức cấp 2:

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|x_1y_2 - x_2y_1\right|.$$

Trong trắc địa, ta mở rộng nguyên lý này cho một đa giác bất kỳ có n đỉnh bằng cách coi diện tích đa giác là **tổng đại số diện tích các tam giác** có chung đỉnh tại gốc tọa độ.

2 Công thức tổng quát (Công thức Gauss)

Cho một đa giác có n đỉnh

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ P_n(x_n, y_n),$$

trong đó các đỉnh được liệt kê theo thứ tự liên tiếp (cùng hoặc ngược chiều kim đồng hồ).

Diện tích S của đa giác được xác định bởi:

$$S = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1} - x_{i+1}y_i)\right|,$$

với quy ước:

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1).$$

Khai triển định thức, ta có:

$$S = \frac{1}{2} \left| (x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \cdots + y_nx_1) \right|.$$

3 Cách triển khai trong thực tế trắc địa

Trong đo đạc thực địa, các kỹ sư thường sắp xếp tọa độ theo dạng bảng để dễ tính toán bằng tay hoặc lập trình:

Điểm	Tọa độ X	Tọa độ Y
1	x_1	y_1
2	x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	x_n	y_n
1	x_1	y_1

Các bước tính

1. Nhân chéo xuống:
$$x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1$$
2. Nhân chéo lên:
$$y_1x_2 + y_2x_3 + \cdots + y_nx_1$$
3. Diện tích:
$$S = \frac{1}{2} \Big| (\text{Tổng chéo xuống}) - (\text{Tổng chéo lên}) \Big|.$$

Lưu ý về hệ tọa độ

Trong hệ tọa độ trắc địa Việt Nam (VN-2000), trục X thường là trục Bắc và trục Y là trục Đông, ngược với quy ước toán học thông thường. Tuy nhiên, về bản chất định thức, công thức diện tích không thay đổi; chỉ cần lấy giá trị tuyệt đối.

4 Ưu điểm của phương pháp định thức

- **Tính chính xác:** Áp dụng cho cả đa giác lồi và lõm.
- **Tự động hóa cao:** Dễ lập trình trên máy toàn đạc điện tử, Excel, GIS, AutoCAD.
- **Tính nhất quán trắc địa:** Chỉ cần tọa độ các mốc giải thửa, không cần đo thêm đường chéo nội bộ.

5 Ví dụ minh họa

Tính diện tích thửa đất hình tứ giác có tọa độ:

$$P_1(x_1, y_1),\ P_2(x_2, y_2),\ P_3(x_3, y_3),\ P_4(x_4, y_4).$$

Áp dụng công thức Gauss:

$$S = \frac{1}{2} \left| (x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_4 + y_4x_1) \right|.$$

$$\boxed{S \text{ (đơn vị diện tích)}}$$

6 Biểu diễn dàn hàng ngang (Sơ đồ "dây giày")

Để tính diện tích đa giác có n đỉnh, ta viết tọa độ các đỉnh thành hai hàng song song và lặp lại tọa độ điểm đầu tiên ở cuối dãy:

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n & y_1 \end{matrix}$$

Quy tắc tính

Tích thuận:

$$x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1$$

Tích nghịch:

$$y_1x_2 + y_2x_3 + \cdots + y_nx_1$$

Công thức diện tích

$$S = \frac{1}{2} \left| (x_1y_2 + x_2y_3 + \cdots + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \cdots + y_nx_1) \right|.$$

Biến thể thường dùng trong trắc địa

Theo X và hiệu Y:

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \left(y_{i+1} - y_{i-1} \right) \right|.$$

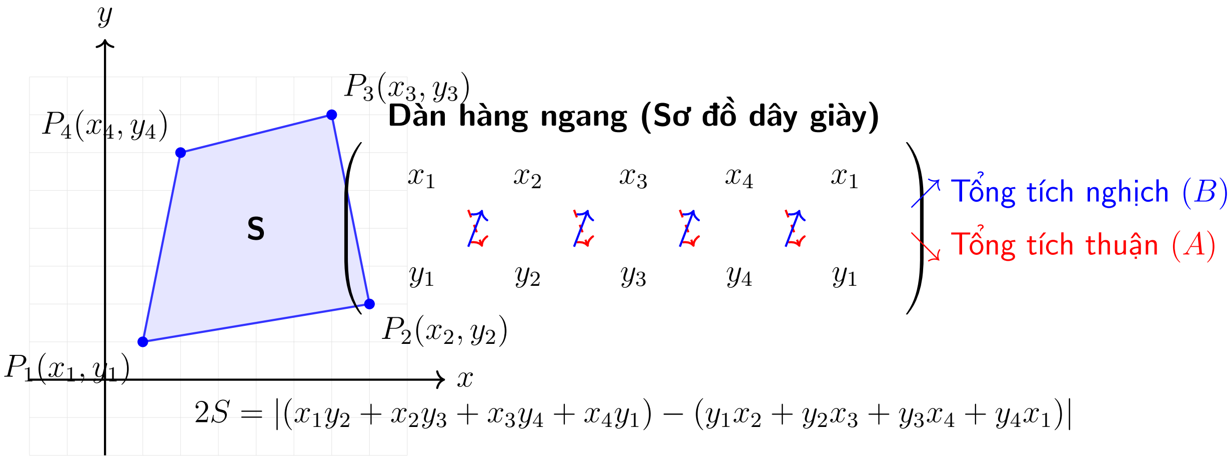
Theo Y và hiệu X:

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n} y_i \left(x_{i-1} - x_{i+1} \right) \right|.$$

Ý nghĩa thực tiễn

Cách dàn hàng ngang giúp:

- kiểm soát việc đóng kín đa giác,
- thuận lợi cho lập trình,
- ổn định tính toán khi tọa độ có giá trị lớn (VN-2000).



Hình 1: Đa giác trắc địa

7 Một số ví dụ minh họa trong trắc địa

7.1 Ví dụ 1. Thửa đất hình tam giác

Cho thửa đất có ba mốc tọa độ (hệ phẳng VN-2000):

$$P_1(1020.50,\ 520.30),\quad P_2(1080.20,\ 540.10),\quad P_3(1045.60,\ 590.80).$$

Diện tích được tính theo công thức Gauss:

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1)\right|.$$

Thay số:

$$\begin{aligned} 2S = |&1020.50 \cdot 540.10 + 1080.20 \cdot 590.80 + 1045.60 \cdot 520.30 \\ &- (520.30 \cdot 1080.20 + 540.10 \cdot 1045.60 + 590.80 \cdot 1020.50)|. \end{aligned}$$

Suy ra diện tích thửa đất:

$$\boxed{S \approx 2\,430.6\ \mathrm{m}^2.}$$

7.2 Ví dụ 2. Thửa đất hình tứ giác

Cho thửa đất có bốn đỉnh:

$$\begin{aligned} &P_1(500.0,\ 200.0), \quad P_2(650.0,\ 210.0), \\ &P_3(630.0,\ 350.0), \quad P_4(480.0,\ 330.0). \end{aligned}$$

Áp dụng công thức dây giày:

$$\begin{aligned} 2S = |&(500 \cdot 210 + 650 \cdot 350 + 630 \cdot 330 + 480 \cdot 200) \\ &- (200 \cdot 650 + 210 \cdot 630 + 350 \cdot 480 + 330 \cdot 500)|. \end{aligned}$$

Kết quả:

$$\boxed{S = 22\,750 \text{ m}^2.}$$

7.3 Ví dụ 3. Đa giác lõm trong đo đạc địa chính

Cho đa giác 5 đỉnh (đi theo thứ tự thực địa):

$$\begin{aligned} P_1(300, 200),\ P_2(450, 210),\ P_3(420, 300), \\ P_4(350, 260),\ P_5(280, 310). \end{aligned}$$

Mặc dù đa giác có dạng lõm, công thức Gauss vẫn áp dụng trực tiếp:

$$S = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{5}(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)\right|.$$

Kết quả tính toán cho diện tích:

$$\boxed{S \approx 15\,400 \text{ m}^2.}$$

7.4 Ví dụ 4. Kiểm tra đóng kín đa giác đo

Giả sử một thửa đất có các mốc đo bằng GNSS, khi áp dụng công thức Gauss thu được:

$$2S = 48\,600.25 - 48\,600.10 = 0.15.$$

Sự chênh lệch rất nhỏ cho thấy:

- đa giác đo được đóng kín tốt,
- sai số đo tọa độ nằm trong giới hạn cho phép,
- kết quả diện tích có độ tin cậy cao.

7.5 Ví dụ 5. Ứng dụng trong lập trình và GIS

Trong các phần mềm GIS, tọa độ các đỉnh thường được lưu dưới dạng mảng:

$$(X, Y) = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}.$$

Việc áp dụng công thức Gauss cho phép:

- tính diện tích tự động cho hàng nghìn thửa đất,
- đảm bảo thống nhất giữa bản đồ số và hồ sơ địa chính,
- giảm sai sót so với phương pháp chia tam giác thủ công.

Chương II. Vai trò của định thức trong bài toán dao động riêng Ứng dụng trong cơ học kết cấu

Mở đầu

Trong cơ học kết cấu, việc tìm dao động riêng thực chất là giải bài toán **trị riêng (Eigenvalue problem)** thông qua định thức.

1 Phương trình vi phân dao động

Một hệ kết cấu có nhiều bậc tự do (ví dụ: tòa nhà nhiều tầng) được mô tả bởi phương trình vi phân ma trận:

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{0},$$

trong đó:

- $\mathbf{M}$ là **ma trận khối lượng** (Mass matrix),
- $\mathbf{K}$ là **ma trận độ cứng** (Stiffness matrix),
- $\mathbf{u}(t)$ là **vectơ chuyển vị**.

2 Sự xuất hiện của định thức (Phương trình đặc trưng)

Để tìm dao động riêng, ta giả thiết nghiệm có dạng điều hòa:

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}\sin(\omega t),$$

trong đó ω là tần số góc riêng và $\boldsymbol{\phi}$ là dạng dao động riêng.

Thay vào phương trình dao động, ta thu được hệ đại số:

$$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}.$$

Để hệ có nghiệm khác không (tức là công trình thực sự dao động), điều kiện cần và đủ là:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0.$$

Đây được gọi là **phương trình đặc trưng**. Nghiệm của phương trình này cho ta:

- **Các tần số góc riêng** ω_i và chu kỳ dao động riêng $T_i = \dfrac{2\pi}{\omega_i}$,
- **Các dạng dao động riêng** (modes of vibration) $\boldsymbol{\phi}_i$.

3 Ý nghĩa thực tiễn trong xây dựng

a. Tránh hiện tượng cộng hưởng

Nếu tần số dao động riêng của công trình trùng với tần số kích thích bên ngoài, định thức tiến về 0 làm biên độ dao động tăng mạnh, có thể gây sụp đổ công trình (hiện tượng cộng hưởng).

b. Thiết kế kháng chấn (động đất)

Quy chuẩn xây dựng yêu cầu tính toán từ 3 đến 10 dạng dao động đầu tiên. Việc giải phương trình định thức giúp xác định tầng có biên độ dao động lớn nhất để gia cố kết cấu.

c. Kiểm tra ổn định của cầu treo

Định thức cho phép xác định vận tốc gió tới hạn gây dao động xoắn (flutter), tương tự hiện tượng dẫn đến sự sập cầu Tacoma Narrows.

4 Ví dụ minh họa: hệ hai bậc tự do (nhà 2 tầng)

Giả sử hệ có ma trận khối lượng và độ cứng:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng:

$$\det \begin{pmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{pmatrix} = 0.$$

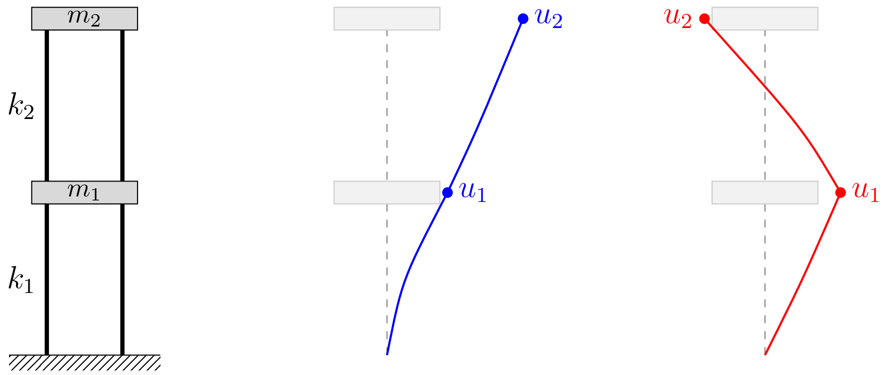
Khai triển định thức, ta thu được phương trình bậc hai theo ω^2:

$$(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1)(k_2 - \omega^2 m_2) - k_2^2 = 0.$$

Giải phương trình này cho ta hai giá trị ω_1, ω_2, tương ứng với hai dạng dao động riêng của ngôi nhà.

Kết luận

Nếu không có định thức, chúng ta không thể biết một công trình sẽ "dao động" như thế nào dưới tác động của gió hoặc động đất. Định thức biến một hệ phương trình vi phân phức tạp thành một bài toán đại số có thể giải hiệu quả bằng máy tính, đóng vai trò then chốt trong thiết kế kết cấu hiện đại.



Sơ đồ kết cấu **Dạng 1 (ω_1)** Tần số thấp **Dạng 2 (ω_2)** Tần số cao

$$\det([K] - \omega^2[M]) = 0 \implies \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

5 Ví dụ số minh họa

5.1 Ví dụ 1. Hệ hai bậc tự do với tham số đối xứng

Xét hệ hai tầng với các tham số:

$$m_1 = m_2 = 1000 \text{ kg}, \qquad k_1 = k_2 = 2 \times 10^6 \text{ N/m}.$$

Khi đó:

$$\mathbf{M} = 1000 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{K} = 10^6 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0 \iff \begin{vmatrix} 4 \times 10^6 - 1000\omega^2 & -2 \times 10^6 \\ -2 \times 10^6 & 2 \times 10^6 - 1000\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Khai triển định thức:

$$(4 \times 10^6 - 1000\omega^2)(2 \times 10^6 - 1000\omega^2) - (2 \times 10^6)^2 = 0,$$

hay tương đương:

$$\omega^4 - 6000\omega^2 + 4 \times 10^6 = 0.$$

Giải phương trình cho ta:

$$\omega_1 \approx 28.7 \text{ rad/s}, \qquad \omega_2 \approx 69.8 \text{ rad/s}.$$

Chu kỳ dao động riêng:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \approx 0.22 \text{ s}, \qquad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \approx 0.09 \text{ s}.$$

Nhận xét. Dạng dao động thứ nhất có tần số thấp, chi phối đáp ứng của công trình dưới tác động động đất; dạng thứ hai có ảnh hưởng cục bộ ở các tầng trên.

5.2 Ví dụ 2. Ảnh hưởng của khối lượng tầng trên

Giữ nguyên độ cứng như Ví dụ 1, nhưng xét:

$$m_1 = 1000 \text{ kg}, \qquad m_2 = 2000 \text{ kg}.$$

Phương trình đặc trưng:

$$\det \begin{pmatrix} 4 \times 10^6 - 1000\omega^2 & -2 \times 10^6 \\ -2 \times 10^6 & 2 \times 10^6 - 2000\omega^2 \end{pmatrix} = 0.$$

Sau khi khai triển và rút gọn, ta được:

$$\omega^4 - 5000\omega^2 + 2 \times 10^6 = 0.$$

Nghiệm của phương trình:

$$\omega_1 \approx 22.1 \text{ rad/s}, \qquad \omega_2 \approx 64.0 \text{ rad/s}.$$

Nhận xét. Việc tăng khối lượng tầng trên làm giảm đáng kể tần số riêng thấp nhất, khiến công trình dễ trùng với phổ kích thích động đất, từ đó làm tăng nguy cơ cộng hưởng.

5.3 Ví dụ 3. Kiểm tra nguy cơ cộng hưởng với tải gió

Giả sử tần số chi phối của tải gió tác động lên công trình là:

$$f_g = 0.7 \text{ Hz} \quad \Rightarrow \quad \omega_g = 2\pi f_g \approx 4.4 \text{ rad/s}.$$

So sánh với tần số riêng nhỏ nhất của công trình:

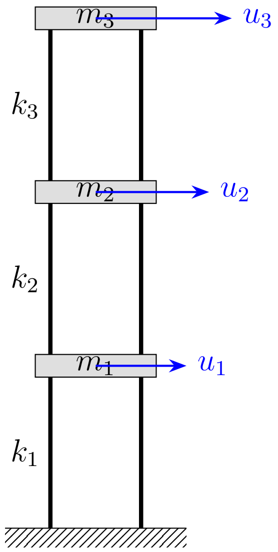
$$\omega_g \ll \omega_1.$$

Kết luận. Trong trường hợp này, công trình không rơi vào hiện tượng cộng hưởng do gió. Tuy nhiên, khi chiều cao công trình tăng (làm giảm độ cứng tương đương), nghiệm của phương trình

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0$$

cho thấy tần số riêng thấp nhất giảm nhanh, làm xuất hiện nguy cơ cộng hưởng cần được kiểm soát trong thiết kế.

5.4 Ví dụ 4. Hệ ba bậc tự do (nhà 3 tầng)



Mô hình nhà 3 tầng
Hệ 3 bậc tự do

Xét mô hình nhà ba tầng với giả thiết:

- Mỗi tầng có một bậc tự do theo phương ngang,
- Khối lượng các tầng bằng nhau,
- Độ cứng các cột giữa các tầng là như nhau.

Cụ thể:

$$m_1 = m_2 = m_3 = 1000 \text{ kg}, \qquad k_1 = k_2 = k_3 = 2 \times 10^6 \text{ N/m}.$$

Khi đó, ma trận khối lượng và độ cứng có dạng:

$$\mathbf{M} = 1000 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{K} = 10^6 \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Phương trình đặc trưng

Dao động riêng được xác định từ phương trình:

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0,$$

hay:

$$\begin{vmatrix} 4 \times 10^6 - 1000\omega^2 & -2 \times 10^6 & 0 \\ -2 \times 10^6 & 4 \times 10^6 - 1000\omega^2 & -2 \times 10^6 \\ 0 & -2 \times 10^6 & 2 \times 10^6 - 1000\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Chia cả định thức cho 10^6 và đặt:

$$\lambda = \frac{\omega^2}{1000},$$

ta thu được phương trình:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 4-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Khai triển định thức theo hàng đầu:

$$(4-\lambda)\big[(4-\lambda)(2-\lambda)-4\big] - 4(2-\lambda) = 0,$$

hay tương đương:

$$-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 24\lambda + 8 = 0.$$

Tần số dao động riêng

Giải phương trình đặc trưng bậc ba, ta thu được ba nghiệm dương:

$$\lambda_1 \approx 0.35, \qquad \lambda_2 \approx 2.32, \qquad \lambda_3 \approx 7.33.$$

Suy ra các tần số góc riêng:

$$\omega_i = \sqrt{1000\lambda_i},$$

cụ thể:

$$\omega_1 \approx 18.7 \text{ rad/s}, \quad \omega_2 \approx 48.2 \text{ rad/s}, \quad \omega_3 \approx 85.6 \text{ rad/s}.$$

Chu kỳ dao động riêng tương ứng:

$$T_1 \approx 0.34 \text{ s}, \qquad T_2 \approx 0.13 \text{ s}, \qquad T_3 \approx 0.07 \text{ s}.$$

Nhận xét cơ học

- Dạng dao động thứ nhất có tần số thấp nhất, toàn bộ công trình dao động gần như cùng pha — đây là dạng nguy hiểm nhất dưới tác động động đất.
- Dạng thứ hai xuất hiện nút dao động ở tầng giữa, gây tập trung nội lực cục bộ.
- Dạng thứ ba có tần số cao, chủ yếu ảnh hưởng đến các cấu kiện tầng trên.

Ý nghĩa thực tiễn. Trong thiết kế kháng chấn, quy chuẩn thường chỉ yêu cầu xét từ 3 đến 5 dạng dao động đầu tiên. Việc giải phương trình định thức bậc cao cho phép kỹ sư xác định chính xác các tầng cần gia cường và bố trí thiết bị tiêu tán năng lượng.

Tài liệu

[1] C. F. Gauss, *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte*, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis, 1828.

[2] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Cengage Learning, 2016.

[3] I. N. Bronshtein, K. A. Semendyayev, *Handbook of Mathematics*, Springer, 2015.

[4] P. R. Wolf, C. D. Ghilani, *Elementary Surveying: An Introduction to Geomatics*, Pearson, 2018.

[5] P. A. Longley et al., *Geographic Information Systems and Science*, Wiley, 2015.

[6] Bộ Tài nguyên và Môi trường, *Quy định về hệ tọa độ quốc gia VN-2000*, Hà Nội, 2014.

[7] R. W. Clough, J. Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 2003.

[8] A. K. Chopra, *Dynamics of Structures*, Pearson, 2017.

[9] K. J. Bathe, *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, 2006.

[10] L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, 2001.

[11] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, AMS Chelsea, 1998.

[12] R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, 2013.

[13] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics, Vol. I*, Wiley, 1989.

[14] European Committee for Standardization, *Eurocode 8: Design of Structures for Earthquake Resistance.*

[15] TCVN 9386:2012, *Thiết kế công trình chịu động đất.*