

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT**

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ BÀI TOÁN GIỚI HẠN DẪY SỐ

Thạc sỹ: Nguyễn Thùy Linh

Hà Nội, 12/2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ BÀI TOÁN GIỚI HẠN DÃY SỐ

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 12/2024

Lời nói đầu

Olympic Toán sinh viên là cuộc thi học thuật thường niên được phối hợp tổ chức bởi Hội toán học Việt Nam và Bộ Giáo dục đào tạo dành cho sinh viên các trường đại học và cao đẳng trong cả nước. Kể từ lần đầu được tổ chức vào năm 1993, cuộc thi đã trải qua chặng đường hơn 25 năm. Cuộc thi đã góp phần quan trọng trong việc thúc đẩy phong trào dạy và học toán trong các trường đại học, cao đẳng trong cả nước với một tỉ lệ không nhỏ các sinh viên đạt giải đến từ các trường không có chuyên ngành toán. Giới hạn dãy số là một phần kiến thức quan trọng trong quá trình thầy cô và sinh viên ôn thi Olympic. Báo cáo đã đưa ra một số ví dụ tính giới hạn về dãy số đồng thời đưa ra lời giải cũng như nhận xét sau mỗi bài làm.

Hà Nội, tháng 12 năm 2024

Thạc sỹ

Nguyễn Thùy Linh

Phương pháp ánh xạ Co

Phương pháp ánh xạ co được áp dụng với các dãy số (a_n) thỏa mãn

$$|a_{n+1} - a_n| \leq C|a_n - a_{n-1}|$$

Với $0 < C < 1$. Cơ sở của phương pháp ánh xạ co là định lí sau:

Định lí. Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_{n+1} = f(a_n)$ trong đó f là ánh xạ co, nghĩa là $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$ với $C < 1$. Khi đó (a_n) sẽ hội tụ về điểm bất động duy nhất của f .

Bài 1. (Olympic Toán sinh viên toàn quốc năm 2003)

Cho dãy số (u_n) xác định như sau $u_1 = 1; \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + u_n^{2011}, n = 1, 2, 3, \dots$ Tính:

$$\lim \left(\frac{u_1^{2011}}{u_2} + \frac{u_2^{2011}}{u_3} + \dots + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} \right)$$

Lời giải.

Từ công thức xác định dãy ta có

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} \rightarrow \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}$$

Do đó:

$$\frac{u_1^{2011}}{u_2} + \frac{u_2^{2011}}{u_3} + \dots + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} = \sum_{k=1}^n \frac{u_k^{2011}}{u_{k+1}} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}} \right) = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}$$

Ta có $u_n > 0, \forall n$ nên ta có: $u_{n+1} = u_n + u_n^{2012} > u_n$ hay dãy đã cho tăng thực sự.

Giả sử dãy không có chặn trên thì nó sẽ có $u_{n+1} = u_n + u_n^{2012} > u_n$ hay dãy tăng thực sự.

Giả sử dãy không có chặn trên thì nó sẽ có giới hạn, đặt nó là l . Ta thấy $l > 0$.

Chuyển dãy về giới hạn ta có $l = l + l^{2012} \leftrightarrow l = 0$, mâu thuẫn.

Suy ra dãy đã cho không bị chặn trên hay $\lim u_n = +\infty$.

Do đó ta có

$$\lim \left(\frac{u_1^{2011}}{u_2} + \frac{u_2^{2011}}{u_3} + \dots + \frac{u_n^{2011}}{u_{n+1}} \right) = \lim \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{u_n} \right) = 1.$$

Nhận xét. Bài toán trên thuộc dạng quen thuộc với ý tưởng rút gọn tổng dưới sai phân để đưa giới hạn cần tính về giới hạn của dãy ban đầu.

Bài 2. (Olympic sinh viên toàn quốc, 2008)

Cho dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4), n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng (u_n) là dãy tăng nhưng không bị chặn trên.

b) Đặt $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3}, n = 1, 2, 3, \dots$. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$.

Lời giải.

a) Với mọi $n > 0$ thì các số hạng của dãy đều dương.

Ta có

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}(u_n^2 + u_n + 4) - u_n = \frac{1}{5}(u_n^2 - 4u_n + 4) = \frac{1}{5}(u_n - 2)^2 \geq 0$$

Do đó dãy giảm.

Từ $u_1 = 3 > 2$ nên $u_n > 2, \forall n$. Từ đó $u_{n+1} - u_n > 0 \rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n$ hay dãy đã cho đơn điệu tăng.

Giả sử dãy bị chặn trên thì sẽ có giới hạn, giả sử là $I \geq 3$. Chuyển qua giới hạn ta được

$$I = \frac{1}{5}(I^2 + I + 4) \leftrightarrow I = 2 \text{ (mâu thuẫn)}.$$

Do đó dãy không bị chặn,

b) Giả sử ta có công thức

$$\frac{1}{u_k + 3} = a \left(\frac{1}{u_k + b} + \frac{1}{u_{k+1} + b} \right) \leftrightarrow \frac{1}{u_k + 3} = a \frac{u_{k+1} - u_k}{(u_k + b)(u_{k+1} + b)}$$

Quy đồng mẫu và biến đổi ta được

$$(3a - b)u_{n+1} + (a - 1)u_{n+1}u_n = au_n^2 + (3a + b)u_n + b^2.$$

Chọn $a = 1$ ta được $(3 - b)u_{n+1} = u_n^2 + (3 + b)u_n + b^2$.

Chọn $b = -2$ ta có công thức đã cho.

Như thế, ta có

$$\frac{1}{u_k + 3} = \frac{1}{u_k - 2} - \frac{1}{u_{k+1} - 2}, \forall k$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k + 3} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{u_k - 2} - \frac{1}{u_{k+1} - 2} \right) = \frac{1}{u_1 - 2} - \frac{1}{u_{n+1} - 2} = 1 - \frac{1}{u_{n+1} - 2}.$$

Do đó $\lim u_n = +\infty$ nên $\lim \sum_{k=1}^n \frac{1}{u_k+3} = \lim \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}-2}\right) = 1$.

Nhận xét. Trong bài toán này ta đã dùng phương pháp hệ số bất định để thử tìm một quan hệ có dạng sai phân giữa các biểu thức liên quan nhằm rút ra tổng cần tính để tìm giới hạn.

Bài 3.

Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \frac{2011}{3} \ln(x^2 + 2011^2) - 2011^2, x \in R. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn.

Chứng minh.

Xét hàm số tương ứng

$$f(x) = \frac{2011}{3} \ln(x^2 + 2011^2) - 2011^2, x \in R.$$

Dãy số đã cho chính là

$$\begin{aligned} x_1 &= a \\ x_{n+1} &= f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{2011}{3} \frac{2x}{x^2 + 2011^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 2011x}{x^2 + 2011^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x \rightarrow g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có không quá 1 nghiệm.

Ta lại có

$$g(x) = f(0) = \frac{2011}{3} \ln 2011^2 - 2011^2 < 0$$

Và $g(-2011) > 0$ nên phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm do đây là hàm liên tục.

Từ đây suy ra phương trình $g(x) = 0$ có đúng một nghiệm thực.

Gọi a là nghiệm của phương trình $g(x) = 0 \rightarrow f(a) = a$.

Áp dụng định lý Lagrange cho $x, y \in R$, do hàm $f(x)$ liên tục trên R nên tồn tại $z(x, y)$ sao

cho : $f(x) - f(y) = f'(z)(x - y)$ mà $f'(z) \leq \frac{1}{3}, \forall z$ nên suy ra:

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{3} |x - y|, \forall x, y \in R.$$

Ta có:

$$|x_{n+1} - a| = |f(x_n) - f(a)| \leq \frac{1}{3} |x_n - a| \leq \dots \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n |x_1 - a|.$$

Ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n |x_1 - a| \right] = 0$ nên theo nguyên lý kẹp $\lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - a| = 0$.

Vậy dãy đã cho có giới hạn hữu hạn.

Nhận xét: Bài toán xây dựng trên nguyên lý co với dãy số có công thức truy hồi dạng $x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots$ và hàm $f(x)$ là hàm khả vi thoả mãn $|f(x)| \leq q < 1$ với q là một số thực dương nào đó. Bài toán được giải theo ý tưởng trên avf hầu như các bài toán có giả thiết thoả mãn yêu cầu đó đều chứng minh được tồn tại giới hạn theo cùng một cách.

Bài toán tương tự:

Cho số a và dãy số thực $\{x_n\}$ xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = \ln(3 + \cos x_n + \sin x_n) - 2008, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n tiến đến dương vô cùng.

Bài 4.

Cho dãy số thực $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3x_n}{3x_n^2 + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- Tìm công thức x_n theo x_1 và n .
- Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn.

Lời giải.

a) Ta thấy nếu $x_1 = 1$ thì $x_n = 1, \forall n$ và nếu $x_1 = -1, x_n = -1, \forall n$.

Xét Trường hợp $x \neq \pm 1 \rightarrow x_n \neq \pm 1, \forall n$. Từ công thức dãy số ta có:

$$x_{n+1} + 1 = \frac{x_n^3 + 3x_n + 3x_n^2 + 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{(x_n + 1)^3}{3x_n^2 + 1}$$

$$x_{n+1} - 1 = \frac{x_n^3 + 3x_n - 3x_n^2 - 1}{3x_n^2 + 1} = \frac{(x_n - 1)^3}{3x_n^2 + 1}$$

Do đó

$$\frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1} = \frac{(x_n - 1)^3}{(x_n + 1)^3}, \forall n.$$

$$\text{Đặt } y_n = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}, n = 1, 2, 3, \dots \leftrightarrow x_n = \frac{y_n + 1}{y_n - 1}$$

Ta có

$$y_1 = \frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}, y_{n+1} = y_n^3, n = 1, 2, 3, \dots$$

Bằng quy nạp ta được $y_n = y_1^{3^n}$.

Suy ra

$$x_{n+1} = \frac{y_1^{3^{n+1}} + 1}{y_1^{3^{n+1}} - 1} = \frac{\left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}\right)^{3^{n+1}} + 1}{\left(\frac{x_1 - 1}{x_1 + 1}\right)^{3^{n+1}} - 1} = \frac{(x_1 - 1)^{3^{n+1}} + (x_1 + 1)^{3^{n+1}}}{(x_1 - 1)^{3^{n+1}} - (x_1 + 1)^{3^{n+1}}}$$

b) Xét hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$ có đạo hàm dương và dãy số đã cho có thể viết lại dưới dạng

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, 3, \dots$$

Với $x_1 = \pm 1$ thì ta cũng có tương ứng $x_n = \pm 1$ nghĩa là dãy đã cho có giới hạn.

$$\text{Với } x_1 \neq \pm 1 \text{ thì } f(x) - x = \frac{-2x^3 + 2x}{3x^2 + 1} = \frac{-2x(x^2 - 1)}{3x^2 + 1}$$

Ta có các trường hợp sau:

+ Nếu $x_1 > 1$ thì $x_2 - x_1 = f(x_1) - x_1 < 0$ nên dãy giảm.

Thật vậy, từ $x_2 < x_1 \rightarrow f(x_2) < f(x_1) \rightarrow x_3 < x_2$. Bằng quy nạp ta có $x_{k+1} < x_k, \forall k$ nên dãy đã cho là dãy giảm. Hơn nữa bằng quy nạp ta chứng minh được $x_n > 1, \forall n$ nên dãy đã cho có giới hạn hữu hạn.

+ Nếu $0 < x_1 < 1$ thì $x_2 - x_1 > 0$ nên dãy đã cho tăng, dãy này bị chặn nên cũng có giới hạn.

+ Trường hợp $-1 < x_1 \leq 0$ và $x_1 < 1$ làm tương tự

Vậy với mọi giá trị của x_1 ta thấy dãy luôn có giới hạn.

Nhận xét:

Hàm số $f(x) = \frac{x^3+3x}{3x^2+1}$ có thể tổng quát lên bằng $f(x) = \frac{x^3+3ax}{3x^2+a}$ với cách giải tương tự. Do đó ta cũng có $f'(x) = \frac{3(x^2-a^2)^2}{(3x^2+a)^2} \geq 0$. Việc xét trước các trường hợp $x_1 = \pm 1$ để tránh rắc rối là việc cần thiết.

Bài 5.

Cho dãy số $(a_n), n \geq 1$ thỏa mãn $a_1 = 1, a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1}, n \geq 2$ và dãy (b_n) thỏa mãn

$$b_n = \sum_{i=1}^n a_i, n \geq 1.$$

Chứng minh rằng dãy (b_n) có giới hạn hữu hạn, tìm giới hạn.

Lời giải.

Từ công thức xác định dãy đã cho, ta có

$$2na = (2n-3)a_{n-1} \leftrightarrow a_{n-1} = 2[(n-1)a_{n-1} - na_n], n > 1.$$

Do đó ta có:

$$b_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n 2[ia_i - (i+1)a_{i+1}] = 2[1 - (n+1)a_{n+1}].$$

Ta chứng minh bằng quy nạp rằng $na_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n$.

-Với $n = 1$ ta có $a_1 = 1$ nên khẳng định đúng.

-Giả sử khẳng định đúng với $n = k \geq 1$, tức là $ka \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Ta có

$$a_{k+1} = \frac{2(k+1)-3}{2(k+1)} a_k \leq \frac{2k-1}{2k+2} \cdot \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{2k-1}{2k+2} \cdot \frac{1}{k\sqrt{k}} &\leq \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} \Leftrightarrow (2k-1)\sqrt{k+1} \leq 2k\sqrt{k} \\ &\Leftrightarrow (4k^2 - 4k + 1)(k+1) \leq 4k^3 \Leftrightarrow 1 \leq 3k. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng nên khẳng định trên cũng đúng với $n = k + 1$.

Theo nguyên lý quy nạp thì khẳng định được chứng minh.

Từ đó suy ra

$$2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \leq 2[1 - (n+1)a_{n+1}] = b_n \leq 2.$$

Theo nguyên lý kẹp thì dãy b_n có giới hạn và giới hạn đó là 2.

Nhận xét:

Bài này có thể từ công thức truy hồi

$$a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1} \rightarrow a_n = \frac{(2n-3)(2n-1) \dots 5.3}{2n(2n-2) \dots 4.2}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} a_n^2 &= \left[\frac{(2n-3)(2n-1) \dots 5.3}{2n(2n-2) \dots 4.2} \right]^2 = \frac{2n-3}{4n^2(2n-2)^2} \frac{(2n-3)(2n-5)}{(2n-4)^2} \dots \frac{5.3}{4^2} \frac{3.1}{2^2} \\ &< \frac{2n-3}{4n^2(2n-2)^2} \end{aligned}$$

Từ đó ta cũng có một bất đẳng thức tương tự lời giải ở trên

$$2na_n < \frac{\sqrt{2n-3}}{2n-2}$$

Ngoài ra, việc đánh giá dãy na_n có thể dùng định lý Stolz.

Bài 6. Tìm điều kiện của a sao cho dãy số xác định như sau hội tụ:

$$x_1 = a, x_{n+1} = x_n^2 - 2n + 2, n = 1, 2, 3, \dots$$

Lời giải.

Xét hàm số tương ứng $f(x) = x^2 - 2x + 2$ với đồ thị minh hoạ trong hình bên dưới.

Phương trình $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $x_1 = 1, x_2 = 2$ nên $f(x) > x$ nên mọi $x < 1 \vee x > 2$ và $f(x) \leq x$ với $1 \leq x \leq 2$.

Ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $a = 1$ thì $x_n = 1, \forall n$ nên dãy đã cho hội tụ.

+ Nếu $a = 2$ thì $x_n = 2, \forall n$ nên dãy đã cho hội tụ.

+ Nếu $a > 2$ thì $x_2 = f(a) > a = x_1$ và đồng thời hàm số $f'(x) = 2x - 2 > 0$ nên đồng biến. Khi đó, dãy tăng và không bị chặn trên nên không hội tụ (vì nếu dãy hội tụ thì nó phải hội tụ về hai nghiệm của phương trình $f(x) = x$ nhưng điều này không thể xảy ra).

+ Ta thấy rằng chỉ cần xét $a \in (1; 2)$ vì rõ ràng nếu $a < 1$ thì $x_2 = f(x_1) = a^2 - 2a + 2 > 1$ và ta có thể tiến hành khảo sát dãy từ vị trí x_2 . Ta thấy khi $a \in (1; 2)$ thì

$$x_2 = f(a) = a^2 - 2a + 2 = a(a - 2) + 2 < 2$$

Bằng quy nạp ta chứng minh được rằng $x_n \in (1; 2), \forall n$.

Khi đó, hàm số đã cho, xét trên miền $(1; 2)$ có đạo hàm $f'(x) = 2x - 2 > 0$ nên đồng biến, đồng thời $x_2 = f(x_1) < x_1$ nên dãy này giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên hội tụ. Gọi giới hạn là I thì ta có $I \in [1; 2)$ và $I = I^2 - 2I + 2$ hay $I = 2$.

+ Ta sẽ tìm điều kiện để tồn tại một giá trị x_k của dãy sao cho $x_k \in (1; 2)$ khi đó

$$1 \leq x_{k+1} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x_k^2 - 2x_k + 2 \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_k^2 - 2x_k + 1 \geq 0 \\ x_k^2 - 2x_k \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x_{k-1} \leq 2.$$

Điều kiện ở trên lại có thể viết thành $0 \leq x_{k-1}^2 - 2x_{k-1} + 2 \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x_{k-1} \leq 2$.

Do đó, nếu như tồn tại một số giá trị của dãy sao cho $x_k \in [0; 2]$ thì tất cả số hạng kể từ đó cũng sẽ thuộc miền này, ta có điều kiện $a \in [0; 2]$.

Vậy các giá trị cần tìm của a là $a \in [0; 2]$.

Kết luận

Báo cáo đã đưa ra một số bài toán về tính giới hạn của dãy số và các nhận xét, bài toán tổng quát.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Trường Thanh, Nguyễn Thị Hằng, Nguyễn Thế Lâm, Nguyễn Thu Hằng, Nguyễn Thùy Linh, Mai Viết Thuận, 2020, Giáo trình Giải tích 1
2. Trần Lưu Cường, 1998, Toán Olympic cho Sinh viên.
3. Tuyển tập 30 năm tạp chí THPT, NXB Giáo dục, 1996.