BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG NGHỊCH ĐẢO
(Bài toán Basel)

TS. Hoàng Ngự Huấn

Hà Nội, 5/2019

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

TỔNG CÁC BÌNH PHƯƠNG NGHỊCH ĐẢO
(Bài toán Basel)

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 5/2019

Оглавление

Tổng chuỗi các bình phương nghịch đảo (Bài toán Basel)

Trong lịch sử toán học, có rất nhiều trường hợp, một bài toán xuất hiện và nó không có lời giải trong hàng chục năm, thậm chí là hàng thế kỷ. Thông thường, trong quá trình giải những bài như vậy dẫn tới xuất hiện những ngành toán học mới.

Trong nội dung bài báo này, chúng ta sẽ đề cập tới bài toán có lịch sử như vậy. Đó chính là bài toán Basel (bài toán tìm tổng của chuỗi các nghịch đảo bình phương, tên gọi Basel xuất phát từ tên của một thành phố của Thụy Sĩ). Nó được nêu ra trước các nhà toán học châu Âu vào năm 1644, và không có lời giải tương ứng cho tới năm 1734, khi Leonard Euler công bố công trình của mình. Sau đây chúng ta sẽ thấy, lời giải của Euler là một phát minh vĩ đại, mặc dù hàm lượng toán học chứa trong nó không vượt qua khóa học sơ cấp về đại số.

Bài toán

Bài toán Besel được phát biểu rất đơn giản: tìm giá trị chính xác của tổng vô hạn sau:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Cũng giống như mọi chuỗi vô hạn khác, xuất hiện một câu hỏi: chuỗi có hội tụ về một giá trị cụ thể không? Trên thực tế, mặc dù các số hạng của nó tiến tới vô cùng bé, nhưng cũng không là điều kiện đủ để đảm bảo tính hội tụ. Ví dụ, chuỗi sau

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

có tổng là vô hạn, tức là phân kỳ, mặc dù các số hạng của chúng là các giá trị vô cùng bé khi $n \longrightarrow \infty$ (đây là chuỗi điều hòa, ta sẽ chứng minh chuỗi phân kỳ sau).

Sau đó, người ta đã chứng minh được rằng: chuỗi là hội tụ tới một số nhỏ hơn hai, còn cụ thể số đó là số nào thì vẫn là câu hỏi mở.

Hai đối thủ và thầy giáo của họ đều không thành công

Các nhà toán học tầm cỡ thế giới đầu tiên thử giải bài toán Basel là hai anh em người Thụ sĩ: nhà toán học Jacob Bernoulli (1654 – 1705), nhà toán học Johann Bernoulli (1667 – 1784). Lưu ý là bài toán mang tên Basel vì đấy chính là thành phố quê hương của hai nhà toán học này. Anh em nhà Bernoulli là những người đầu tiên áp dúng phép tính vi phân để giải nó (họ đã học công cụ vi phân từ chính Gottfried Leibniz (1646 - 1716)). Đến năm 1690, hai anh em nhà Bernulli đã trở thành những nhà toán học hàng đầu châu Âu. Rất đáng tiếc, là thời điểm này hai anh em đã trở thành hai đối thủ kình địch, và mâu thuẫn đến độ muốn trừ khử nha: họ có thể làm tất cả: nói dối, ăn cắp, sao chép bản quyền chỉ để chứng tỏ là người này hơn người kia. Sự đối kháng và thù nghịch thậm chí còn không chấm hết ngay cả khi Jacob chết đi: người em Johann còn muốn công bố những công trình mà người anh chưa kịp công bố và nói là của mình; Johann cũng từ chối giúp đỡ việc công bố công trình của Jacob về lý thuyết xác suất vì lo sợ: điều đó sẽ nâng uy tín của anh trai mình. Rất có thể, Johann chỉ đơn thuần là con người không tốt: khi con trai riêng của ông là Daniel giành được giải thưởng toán học (chính Johann cũng tranh cử giải này), ông đã đuổi Daniel ra khỏi nhà và tước quyền thừa kế của con trai mình.
Trong nhiều năm liền, anh em nhà Bernulli cố gắng giải bài toán tính tổng của chuỗi các bình phương nghịch đảo, có lẽ một trong những động lực để họ đua tranh nhau là muốn chứng tỏ hơn người kia. Thế nhưng họ không thu được kết quả. Leibniz cũng đi tìm lời giải trong nhiều năm liền, nhưng cũng không thu được bất kỳ kết quả nào.

Euler tham gia vào cuộc đua

Leonard Euler (1707 – 1786) cũng sinh ra ở Basel. Điều thú vị là bố của ông biết Johann Bernulli. Khi Euler 14 tuổi, ông mời Johann dạy con mình toán học. Johann đồng ý một cách bất đắc dĩ, nhưng sau đó nhanh chóng nhận ra rằng: học trò mới của ông vượt trội hơn so với tất cả những người khác. Rất nhanh sau đó, vai trò được tráo đổi: Johann phải học chính Euler. Johann khuyên cha của Euler từ bỏ ý định nuôi dưỡng Euler thành bộ trưởng, và thay vào đó là trở thành nhà toán học. Và cũng nhờ uy tín của ông mà người cha đã đồng ý.
Sau một vài năm, Euler giữ chức sắc trong Viện hàn lâm Saint-Peterburg, nước Nga. Chính tại nơi đây, vào năm 1734, Euler tìm ra lời giải bài toán Basel. Kết quả là ngay lập tức, ông được coi là nhà toán học hàng đầu của châu Âu.

Lời giải

Đầu tiên ta xem xét phương trình đại số với số mũ được giả định là bằng bốn như sau

$$x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

Giả sử rằng, nghiệm của nó là b, c, d và e. Khi đó, ta có thể phân tích đa thức thành các nhân tử tuyến tính như sau:

$$(b - x)(c - x)(d - x)(e - x) = 0.$$

Nếu không có nghiệm nào bằng không, ta có thể viết lại dưới dạng sau

$$\frac{(b - x)(c - x)(d - x)(e - x)}{bcde} = \left(1 - \frac{x}{b}\right)\left(1 - \frac{x}{c}\right)\left(1 - \frac{x}{d}\right)\left(1 - \frac{x}{e}\right) = 0.$$

Tiếp theo, chúng ta có đa thức với bậc vô cùng như sau:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Những chuỗi đặc biệt như trên được công bố bởi Newton, ta cũng có thể dễ dàng thu được khai triển trên bằng công cụ giải tích. Ở đây, ta sẽ coi nó là mặc nhiên đúng. Chúng ta đã biết rằng, hàm $\sin x$ có các nghiệm là $0, \pm\pi, \pm 2\pi$ ... Ý tưởng đầu tiên của Euler là: ta có thể khai triển thành nhân tử đối với đa thức có bậc vô cùng

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right)\cdots$$

Để ý rằng mỗi cặp nhân tử có thể rút gọn lại theo hằng đẳng thức đáng nhớ: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$. Vì thế ta có thể viết lại

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

Tiếp đó, Euler coi rằng: tổng vô hạn bằng tích vô hạn!? (Hãy chý ý tới các mẫu số trong tích trên: chúng chứa bình phương của các số tự nhiên và cho ta liên tưởng tới tổng các bình phương nghịch đảo).

Mặc dù tích chứa vô hạn các nhân tử, nhưng ta vẫn có thể làm rõ được hệ số nào đứng trước mỗi lũy thừa của x. Ta có thể xem xét qua ví dụ cụ thể là tích hữu hạn sau

$(a + b)(c + d)(e + f) = ace + acf + ade + adf + bce + bcf + bde + bdf.$

Mỗi số hạng trong tổng thu được sau khi phá ngoặc: ví dụ như ace bằng tích các số hạng đứng bên trái trong mỗi dấu ngoặc. Và Euler phát hiệ ra rằng: trong tích vô hạn trên, số hạng chứa x^2 bằng

$$\left(-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \cdots\right)\left(\frac{1}{\pi^2}\right)x^2.$$

Thêm vào đó, tích vô hạn bằng tổng vô hạn của $\frac{\sin x}{x}$, nên hệ số của x^2 là $-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}$. Cho hai biểu thức của hệ số bằng nhau và cùng nhân với $-\pi^2$, ta thu được

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}=1.644934066848\ldots$$

Như vậy sau 90 năm, bài toán được giải và nó là một trong những kết quả kỳ lạ và rất đỗi ngạc nhiên của toán học. Chúng ta liên hệ số π với đường tròn, thế nhưng trong bài toán Basel thì là với chuỗi các bình phương nghịch đảo. Có lẽ đây cũng là một trong những lý do làm hàm $\sin x$ khác biệt trong lượng giác?
Khi Johann Bernulli nhìn thấy lời giải của Euler, ông đã phải thốt lên "Giá mà anh trai tôi còn sống để được chiêm ngưỡng nó". Có lẽ, Johann đã nhẹ nhõm đi nhiều cùng năm tháng.
Không chỉ dừng lại ở đấy, trong công trình lịch sử của mình, bằng phương pháp tương tự, Euler đã chỉ ra rằng

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{90}.$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{945}.$$

Một câu hỏi tự nhiên xuất hiện: thế còn đối với các bậc lẻ của các số tự nhiên thì sao? Phương pháp nói trên không thể áp dụng được đối với các bậc lẻ. Trong suốt cuộc đời mình Euler đã nhiều lần thử tìm tổng của các chuỗi này, nhưng không đi đến kết quả nào. Cuối cùng, ông chỉ nói "bài toán khó". Khi mà Euler đã nói là bài toán khó, thì các nhà toán học thông thường có lẽ cũng không nên bận tâm tới việc đi tìm lời giải của nó. Và tất nhiên, cho tới ngày hôm nay, hơn 200 năm trôi qua, các tổng này vẫn chưa được tìm ra.

Hệ quả

Những người có tư tưởng thực tế có thể đưa ra câu hỏi: phải chẳng bao nhiêu công sức đổ ra để giải các bài toán trên nhưng lại không đêm đến ứng dụng thực tế nào? Câu trả lời đơn giản là: bài toán trên xuất hiện trong lý thuyết số và trong lý thuyết này những câu hỏi tương tự không hề xuất hiện. Câu trả lời ít khiếm nhã hơn có thể là: lý thuyết số đôi khi cũng có con đường riêng trong thế giới thực. Một ví dụ tốt có thể lấy là định lý Ferma (được đưa ra năm 1640) và được biết đến với cá tên: Định lý Ferma nhỏ. Dựa trên kết quả của định lý này người ta xây dựng thuật toán mã hóa thông tin và được áp dụng trong Internet để truyền thông tin mật: ví dụ như số của thẻ điện tử. Không có thuật toán này thì không thể có thương mại điện tử.
Quay lại bài toán về tổng bình phương các nghịch đảo: sau này nó có mối liên hệ mật thiết với giả thuyết Riman – cho tới ngày hôm nay nó vẫn là một trong những giả thuyết quan trọng mà chưa được giải đáp. Giả thuyết này được đưa ra vào năm 1859. Nó được coi là đúng nhưng vẫn chưa có ai có thể chứng minh được. Chúng ta cần một Leonard Euler mới.

Phụ chương. Tính phân kỳ của chuỗi điều hòa.

Như chúng ta đã nói ở trên, chuỗi điều hòa là chuỗi

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Jacob Bernulli đã chứng minh được rằng: đây là tổng vô hạn. Jacob nhận thấy rằng có thể tách chuỗi điều hòa thành các nhóm như sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=(1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{5^2}\right)+\cdots$$

Giá trị của tổng trong mỗi dấu ngoặc đều lớn hơn hoặc bằng một. Và như vậy có nghĩa là tổng của chuỗi điều hòa là vô cùng lớn, vì nó bằng tổng của vô hạn các số đều lớn hơn hoặc bằng một (số các dấu ngoặc và vô cùng lớn). Để chứng minh rằng tổng trong mỗi dấu ngoặc đều lớn hơn hoặc bằng một, ta xét riêng một trường hợp

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{k^2}.$$

Số các số hạng trong nhóm trên là k^2-k và số hạng bé nhất là số hạng cuối. Ta có

$$(k^2-k)\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{k^2}.$$

Hay là

$$1-\frac{1}{k}\leq\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{k^2}.$$

Thêm cả hai vế vào $\frac{1}{k}$, ta thu được kết quả cần chứng minh.

Tài liệu tham khảo

1. *Дербишир, Джон.* Простая одержимость. Бернхард Риман и величайшая нерешенная проблема в математике. — Астрель, 2010. — С. 90—92, 103—109. — 464 с. — ISBN 978-5-271-25422-2.
2. Leonhard Euler biography. Проверено 16 апреля 2016.
3. *Пойа, Д.* Математика и правдоподобные рассуждения. — Изд. 2-е, исправленное. — М.: Наука, 1975. — С. 40.
4. E41 -- De summis serierum reciprocarum. Проверено 17 апреля 2016.
5. *Наварро, Хоакин.* До предела чисел. Проверено 10 августа 2016.
6. История математики, том III, 1972, с. 337.
7. Антонио Дуран, 2014, с. 109.
8. *Вилейтнер Г.* История математики от Декарта до середины XIX столетия. — М.: ГИФМЛ, 1960. — С. 143—144. — 468 с.
9. Кохась К. П., 2004.
10. Фихтенгольц Г. М., 1966.
11. *Cauchy A. L.* Cours d'analyse de l'École royale polytechnique I.re partie: Analyse algébrique. — Paris: Impr. royale Debure frères, 1821. — 576 p.
12. *Терещенко И. В.* Базельская задача i. Метод Коши и его обобщение для вычисления сумм чисел обратных четвёртой степени // Научные труды КубГТУ. — 2014. — № №2.
13. Robin Chapman.
14. *Жуков А. В.* Вездесущее число «пи». — 2-е изд. — М.: Издательство ЛКИ, 2007. — С. 145. — 216 с. — ISBN 978-5-382-00174-6.
15. *Leonhard Euler*, Institutiones calculi integrals