

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT**

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ĐỊNH LÝ FERMAT LỚN VÀ ỨNG DỤNG

TS. Hoàng Ngự Huân

Hà Nội, 1/2019

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT**

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ĐỊNH LÝ FERMAT LỚN VÀ ỨNG DỤNG

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 1/2019

MỤC LỤC

1. Mở đầu.....	4
2. Tác giả định lý là nhà toán học nghiệp dư.....	4
3. Định lí có nội dung rất dễ hiểu.....	4
4. Sự xuất hiện của định lí bắt đầu từ một ghi chú bên lề một cuốn sách.....	5
5. Định lí cuốn hút một số lượng đông đảo các nhà toán học chuyên và không chuyên tham gia tìm kiếm lời giải.	5
6. Ý kiến của ông Vua Toán về Định lý Fermat.....	6
7. Con gà đẻ trứng vàng của toán học hiện đại.....	6
8. Phút thứ 89.....	7
8.1 Một giả thuyết vượt thời đại.....	7
8.2. Giả thuyết của Gerhard Frey.....	7
8.3.Định lý của Ken Ribet.....	7
8.4. Giác mơ lớn của một cậu bé 10 tuổi.....	8
8.5. Những năm ẩn cư trên gác xép.....	8
8.6. Có một khe hở.....	9
9. Fermat có thực sự chứng minh được định lý của mình?.....	9
10. Ứng dụng của định lý Fermat lớn.....	10
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	11

1. Mở đầu

Có một định lý đã thách đố những trí tuệ vĩ đại nhất của loài người trong 350 năm- định lý cuối cùng của Fermat (Fermat's last theorem) – đã được giáo sư Andrew Wiles chứng minh xong vào năm 1994. Tháng 5 tới, ông sẽ đến Na Uy nhận giải thưởng giải Abel với số tiền thưởng 700.000 USD[1].

Sinh thời Pierre de Fermat là người rất đam mê vẻ đẹp của các con số. Để hiểu thêm về Fermat, bạn “hỏi cụ” Google, đánh từ khóa *Fermat*, “cụ” cho ngay hơn một triệu kết quả.

Dù hết lòng yêu các con số, chắc Fermat cũng khó hình dung được sự kì diệu này, tuy bản thân ông là cả một sự kì diệu đến khó tin.

Trong lịch sử toán học của nhân loại, không tìm thấy định lí nào có nhiều điều kì lạ và độc đáo như định lí này.

2. Tác giả định lý là nhà toán học nghiệp dư

Luật sư Pierre de Fermat (1601 – 1665), sinh ra trong một gia đình thương nhân giàu có của thành phố Toulouse, miền Tây Nam nước Pháp. Năm 30 tuổi ông được bầu làm ủy viên công tố của thành phố. 17 năm cuối đời ông giữ một vị trí quan trọng: ủy viên hội đồng tư vấn của nghị viện thành phố. Fermat quá bận rộn với những công việc vừa phức tạp vừa quan trọng. Nhà toán học Degby, trong một bức thư có kể về Fermat: “*Ông ta bận bịu suốt ngày với các vụ trọng án. Gần đây, ông ta đã tuyên một bản án gây nhiều chấn động: đó là bản án kết tội một mục sư lạm dụng quyền lực, phải thiêu trên dàn lửa*”.

Là một nhà toán học nghiệp dư, Fermat rất say mê các công trình toán học của người Hy Lạp cổ. Ông đã để lại dấu ấn quan trọng trong nhiều lãnh vực toán học: Giải tích, Xác suất, Lý thuyết số... Ông được gọi là “hoàng tử của những người nghiệp dư”.

3. Định lí có nội dung rất dễ hiểu

Trong toán học, để hiểu được một định lý nào đó, người đọc cần phải có một trình độ toán học tương ứng. Các học sinh lớp 7 được học về định lý Pytago, để hiểu được định lý Kronecker-Capelli về nghiệm của một hệ phương trình tuyến tính, người học phải là những sinh viên đang học chương trình toán cao cấp ở các trường đại học... Đó là chưa nói đến việc chứng minh định lý. Trong các giáo trình toán ở bậc đại học vẫn thỉnh thoảng bắt gặp một định lý mà phần chứng minh chỉ ghi vắn tắt: chúng ta thừa nhận định lý này.

Vậy mà một trong những định lý vĩ đại nhất trong lịch sử toán lại có nội dung dễ hiểu ngay cả với một học sinh lớp 6. Có thể phát biểu cho học sinh lớp 6 định lí Fermat như sau:

Không tìm được bộ ba số nguyên x, y, z nào thỏa mãn đẳng thức: $x^n + y^n = z^n$ với bất kỳ số tự nhiên $n, n > 2$.

Nội dung của định lý dễ hiểu như vậy nhưng để hiểu được cách chứng minh nó, bạn phải nằm trong số một phần một nghìn các nhà toán học!

4. Sự xuất hiện của định lý bắt đầu từ một ghi chú bên lề một cuốn sách

Đó là cuốn Số học (Arithmetica) của nhà toán học Hy Lạp Diophantus, thế kỷ III trước CN. Về cuộc đời của Diophantus, chúng ta biết được khá rõ ràng dựa vào một đoạn văn nổi tiếng sau: *“Đây là ngôi mộ chôn cất thi hài của Diophantus, những điều sau đây sẽ cho mọi người biết về cuộc đời của ông. Một phần sáu cuộc đời là tuổi ấu thơ hạnh phúc. Sau một phần mười hai tiếp theo của cuộc đời, trên cằm ông bắt đầu mọc lơ thơ những sợi ria. Trải qua một phần bảy cuộc đời nữa thì ông lấy vợ. sau đó là năm năm đầy hạnh phúc và ông có một đứa con trai. Cậu lớn lên bằng nửa tuổi của cha mình thì định mệnh lạnh lùng đã cướp cậu đi. Ông đã quên dần nỗi đau trong suốt bốn năm còn lại của cuộc đời mình”*. Một học sinh lớp 8 cũng có thể giải được bài toán này, Diophantus thọ 84 tuổi.

Năm 1621 cuốn Số học được dịch ra tiếng La tinh, trong đó có hơn 100 bài toán có lời giải chi tiết. Fermat thích thú đọc cuốn sách này, việc nghiên cứu các bài toán gợi ý cho Fermat suy nghĩ và giải các bài toán khác có liên quan nhưng sâu sắc hơn. Vào khoảng năm 1630, Fermat viết bên lề cuốn sách mấy dòng chữ La tinh: *“Không thể phân tích một lập phương thành tổng của hai lập phương, một trùng phương thành tổng của hai trùng phương, hay tổng quát, bất kì một lũy thừa khác 2 thành tổng của hai lũy thừa cùng bậc. Tôi đã tìm thấy được một chứng minh thật tuyệt diệu cho nhận xét này, nhưng rất tiếc lề sách không đủ rộng để ghi ra đây”*.

Hơn ba mươi năm sau, khi Fermat đã qua đời, cuốn số học của Diophantus cùng với những ghi chú của Fermat được xuất bản. Chỉ đến lúc đó, định lý Fermat mới được biết đến.

5. Định lý cuốn hút một số lượng đông đảo các nhà toán học chuyên và không chuyên tham gia tìm kiếm lời giải.

Định lý cuối cùng của Fermat như một nàng tiên cá đầy quyến rũ trong toán học, nàng như các thiên tài đến gần, chỉ cốt làm tan tành niềm hy vọng của họ. Bất kỳ nhà toán học nào lỡ “dính líu” đến định lý này đều có nguy cơ tiêu phí sự nghiệp của họ. Tuy vậy, cũng như những nhà leo núi tìm kiếm những miền đất chưa có dấu chân người, các bài toán chưa giải được luôn luôn mời gọi các nhà toán học. Cho đến đầu thế kỉ XX, những bước tiến trong việc tìm kiếm lời giải cho định lý Fermat vẫn hết sức ít ỏi.

Nhà toán học vĩ đại người Thụy Sĩ Leonhard Euler (1707 – 1783) đã chứng minh định lý cho trường hợp $n=3$ và $n=4$.

Năm 1828, nhà toán học Đức Dirichlet (1805-1859) chứng minh cho trường hợp $n=5$.

Vào những năm 1840, nhà toán học Pháp Gabriel Lamé chứng minh với $n=7$.

Vậy, 200 năm sau Fermat, định lý mới được chứng minh với $n=3, 4, 5, 6$ và 7 .

Định lý quá khó và nhà nghiên cứu lịch sử toán học E.T. Bell trong cuốn sách “Bài toán cuối cùng” đã phải thốt lên rằng: *“Có lẽ nền văn minh của chúng ta cáo chung trước khi các nhà toán học tìm ra lời giải cho bài toán.”*

Tuy vậy, năm 1908, định lý Fermat đột ngột gây được sự chú ý trở lại nhờ công của một nhà công nghiệp và tiến sĩ toán người Đức tên là Paul Wolfshehl. Do gặp phải một chuyện bất hạnh trong đời sống riêng, ông quyết định sẽ tự sát vào lúc nửa đêm. Trong khi chờ đợi, ông tình cờ đọc một chứng minh của Kummer liên quan đến định lý Fermat. Chìm đắm trong sự suy tư, ông vượt qua giờ phút định mệnh lúc nào không biết. Sự đam mê toán học đã hồi sinh cuộc đời ông. Ông quyết định dành gần hết gia sản của mình lập nên giải thưởng Wolfshehl dành tặng cho người nào tìm ra lời giải của định lý Fermat. Trị giá giải thưởng là 100.000 mác tương đương 1,75 triệu USD, lớn hơn giải Nobel.

Khi giải thưởng được thông báo, các bài dự thi ùn ùn đổ về Đại học Göttingen. Ngay trong năm treo giải, có 621 “lời giải” được đệ trình và mấy năm sau thì số thư từ chất cao đến 3m. Tất cả đều sai.

6. Ý kiến của ông Vua Toán về Định lý Fermat

Carl Friedrich Gauss (1777-1855), nhà toán học vĩ đại người Đức, người đương thời gọi ông là ông vua toán bởi những đóng góp quan trọng của ông trong nhiều lĩnh vực: Lý thuyết số, Hình học vi phân, Giải tích, xác suất,...

Gauss đã viết thư cho một người bạn nói rõ quan điểm của ông về Định lý Fermat: *“Tôi phải thú nhận rằng định lý này là một mệnh đề biệt lập gây rất ít hứng thú cho tôi bởi vì tôi có thể đưa ra vô vàn mệnh đề như thế, những mệnh đề mà người ta không thể chứng minh hoặc bác bỏ”*.

Vậy chỉ duy nhất Ông vua Toán Gauss thản nhiên đứng ngoài cuộc trong đám đông các nhà toán học hăm hở dấn thân vào một con đường đầy cám dỗ. Phải chăng Gauss tiên đoán được rằng, với trình độ toán học của thời đại ông, việc chứng minh định lý này là không thể!

7. Con gà đẻ trứng vàng của toán học hiện đại

Đây thực sự là điều kì diệu. Lời giải bài toán không đạt được nhưng lại xuất hiện những ngành toán học mới. Người đời đã ca tụng: Định lý Fermat là “con

gà đẻ trứng vàng của toán học hiện đại”. Những lí thuyết toán học mới ra đời nhờ việc các nhà toán học “giải không ra” bài toán Fermat.

8. Phút thứ 89

Một trận bóng đá gay cấn diễn ra 90 phút, vẫn có những phút 89. Bốn chục năm trong chặng đường gần 350 năm có thể coi là phút 89 được chặng?

8.1 Một giả thuyết vượt thời đại

Vào những thập niên 50 của thế kỉ XX, hai nhà toán học trẻ người Nhật đã đưa ra một giả thuyết, sau này mang tên họ: giả thuyết Taniyama-Shimura. Giả thuyết nói về mối quan hệ giữa mọi đường cong elliptic và các dạng modular.

Các đường cong elliptic có dạng: $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là những số nguyên. Các đường cong elliptic cuốn hút các nhà lý thuyết số vì chúng có thể trả lời nhiều câu hỏi về phương trình và nghiệm của phương trình.

Các dạng modular thuộc nhóm những đối tượng lạ lùng và tuyệt vời nhất của toán học. “Ông tổ” của các dạng modular là nhà toán học kiệt xuất người Pháp Henri Poincaré (1854 -1912). Các dạng modular tồn tại trong một không gian kỳ lạ, nơi hình học phi Euclid ngự trị. Rất khó hình dung về các dạng modular, ngay cả Poincaré thời gian đầu cũng không dám tin chắc chúng tồn tại.

Về vai trò của giả thuyết Taniyama-Shimura, giáo sư Mazur, trường đại học Havard nói: “*Lần đầu tiên được đề xuất, giả thuyết này không được các nhà toán học chú ý vì nó quá lạ lùng. Một mặt, bạn có thể giới của elliptic, mặt khác bạn có thể giới của modular. Cả hai lĩnh vực của toán học đều đã được nghiên cứu rất mạnh mẽ, nhưng tách rời nhau. Các nhà toán học nghiên cứu các phương trình elliptic không mấy am hiểu về các dạng modular và ngược lại. Thế rồi giả thuyết Taniyama- Shimura ra đời cho rằng có một cầu nối giữa hai thế giới xa lạ ấy*”.

8.2. Giả thuyết của Gerhard Frey

Sâu trong rừng Đen nước Đức có trung tâm Oberwolfach, hàng năm trung tâm này tài trợ và tổ chức khoảng 50 hội nghị quốc tế về các chủ đề toán học khác nhau. Trong hội nghị tổ chức vào mùa Thu năm 1984, nhà toán học Gerhard Frey đã có bài thuyết trình quan trọng. Trong bài thuyết trình của mình, ông đã đưa ra một nhận xét còn mơ hồ. Bản in rônêô các công thức toán học mà ông phân phát khắp hội nghị hình như có hàm ý rằng: *Nếu giả thuyết Shimura-Taniyama quả thật đúng thì định lý Fermat sẽ được chứng minh.*

8.3. Định lý của Ken Ribet

Khi Ken Ribet, giáo sư toán thuộc trường đại học tổng hợp California, lần đầu nghe nói về nhận xét của Frey đã cho đó là một lời nói đùa. Nhưng trong quá trình nghiên cứu, “lời nói đùa” của Frey đã khiến ông bỏ ra một năm trời chứng minh.

Vậy, vấn đề còn lại của định lý Fermat là chứng minh được giả thuyết Shimura-Taniyama!

8.4. Giấc mơ lớn của một cậu bé 10 tuổi

Cậu bé có tên Andrew Wiles, trong thư viện thành phố Milton, cậu tình cờ đọc được một cuốn sách, cuốn “ Bài toán cuối cùng” của E.T. Bell. Cậu như bị thôi miên bởi những bài toán nổi tiếng nhất trong toán học, ở đó có bài toán của Fermat. Cậu mơ ước một ngày nào đó sẽ giải được định lý hóc búa này, sẽ khiến cả thế giới kinh ngạc.

Lớn lên, cậu trở thành một sinh viên xuất sắc của trường đại học tổng hợp Cambridge và cũng tại trường này, anh bảo vệ thành công luận án tiến sĩ với các công trình nghiên cứu về các đường cong elliptic.

Sau đó, anh chuyển sang Mỹ, làm giáo sư toán tại trường Đại học tổng hợp Princeton, ở đó, giấc mơ thời thơ ấu vẫn rực cháy trong anh.

8.5. Những năm ẩn cư trên gác xép

Sau phát minh của Ken Ribet, Andrew Wiles quyết định tự giam mình trên căn gác xép áp mái, tìm cách chứng minh định lý Fermat. Sau này ông kể lại kinh nghiệm làm toán của mình:

“Giống như việc đi vào một lâu đài tối om. Bạn bước vào phòng thứ nhất, trong đó tối đen như mực. bạn bước đi loạng choạng, va đập vào đồ đạc trong phòng. Dần dần, bạn cũng biết được vị trí của từng thứ một. và cuối cùng, sau khoảng sáu tháng bạn lần ra công tắc đèn rồi bật lên. Ngay lập tức, mọi thứ được sáng tỏ và bạn thấy rõ mình đang ở đâu. Thế rồi bạn bước vào một phòng tiếp theo, ở đó lại tối đen như mực...”

Tháng 6 năm 1993, tại trường đại học tổng hợp Cambridge, giáo sư Andrew Wiles đã có 3 buổi thuyết trình trong một hội thảo về lý thuyết số. Cuối buổi thuyết trình thứ ba, sau khi viết xong những dòng chứng minh cuối cùng của một giả thuyết toán học phức tạp và khó hiểu, giả thuyết Shmura- Taniama. Giáo sư Wiles nói một câu giản dị: *“Tôi nghĩ rằng mình vừa chứng minh xong định lý Fermat.”*

Chứng minh đó là một công trình dài 200 trang. Việc chứng minh đó tốn mất 7 năm trời bèn bĩ làm việc. Chứng minh của Wiles là một chuỗi dài những suy diễn khổng lồ được xây dựng hết sức phức tạp từ hàng trăm những tính toán toán học gắn kết với nhau bằng hàng ngàn những kết nối logic.

8.6. Có một khe hở

Sau buổi thuyết trình, bài báo của Wiles được gửi cho 6 chuyên gia hàng đầu về lý thuyết số đọc phản biện. Cần phải dò lại các chứng minh, các kí hiệu, từng dòng một.

Một “khe hở trong chứng minh” của Wiles được nhà toán học Nick Katz, người đang làm việc tại Viện Nghiên cứu Khoa học Cao cấp Paris phát hiện. Nếu không lấp được khe hở này, mọi việc lại trở về vạch xuất phát.

Thêm một năm làm việc cật lực làm việc, cuối cùng Wiles đã hoàn thành hoàn hảo chứng minh kiệt xuất của mình bằng hai bài báo dài 130 trang được tạp chí *Annals of Mathematics* công bố tháng 5 năm 1995.

Nhân loại cần hơn 350 năm, cá nhân Andrew Wiles cần một cuộc “lưu đày” 8 năm trên gác xếp cho một chứng minh mà Fermat vì lẽ sách quá hẹp đã không ghi ra được. Trong chứng minh của mình, Wiles đã thực sự thu thập tất cả những đột phá trong lý thuyết số của thế kỷ XX và tạo ra những kỹ thuật hoàn toàn mới mẻ. Nhà toán học Ken Ribet đánh giá chứng minh của Wiles là một “tổng hợp hoàn hảo của toán học hiện đại và một khát vọng cho tương lai.”

9. Fermat có thực sự chứng minh được định lý của mình?

Quay lại với dòng ghi chú của Fermat rằng: tôi đã tìm ra được cách chứng minh thực sự tuyệt vời định lý này. Có thể thấy rõ ràng rằng các công cụ toán học của nhân loại cho đến thời đại của Fermat không cho phép ông thực hiện chứng minh tuyệt vời của mình.

Cũng có người lạc quan nói rằng: có thể Fermat thực sự đã tìm ra một lời giải vô cùng độc đáo!

Trên thực tế, Fermat đã từng có những nhận định sai. Sự sai lầm của ông cũng hết sức thú vị. Fermat đưa ra mệnh đề: *Các số F_n bằng 2 mũ 2 mũ n cộng với 1 được gọi là các số Fermat- luôn luôn là một số nguyên tố.* Mệnh đề trên đúng với $n=1, 2, 3, 4$. Gần 100 năm sau, Euler đã phát hiện mệnh đề của Fermat sai, rất bất ngờ, F_5 không phải là một số nguyên tố, nó có ước 641. Các số Fermat có nhiều tính chất thú vị trong toán học. Sự thú vị đầu tiên là sau F_4 người ta vẫn chưa tìm ra được số nguyên tố Fermat nào khác. Phân tích F_n thành nhân tử cũng là một câu chuyện vừa lịch sử vừa thời sự của toán học. Có hẳn một trang web theo dõi “câu chuyện” này.

Có thực sự Fermat đã tìm được cách chứng minh cho định lý của mình không, chỉ duy nhất một người biết được, đó là bản thân Fermat!

10. Ứng dụng của định lý Fermat lớn

Bài toán: Chứng minh rằng $\sqrt[3]{2}$ là một số vô tỷ.

Lời giải. Giả sử số đã cho là hữu tỷ, khi đó nó có biểu diễn như sau

$$\sqrt[3]{2} = \frac{p}{q}$$

Trong đó: p, q là các số tự nhiên, nguyên tố cùng nhau. Biến đổi đẳng thức trên thành

$$p^3 = 2q^3 = q^3 + q^3.$$

Theo kết quả của định lý Fermat lớn, phương trình cuối không có nghiệm nguyên. Vậy điều giả sử của chúng ta là sai. Tức là $\sqrt[3]{2}$ là số vô tỷ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Simon Singh, *Định lý cuối cùng của Fermat*, (Phạm văn Thiều, Phạm Việt Hưng dịch), NXB Trẻ, 2005.
- [2] Amir D. Aczel, *Câu chuyện hấp dẫn về bài toán Fermat*, (Trần văn Nhung, Đỗ Trung Hậu, Nguyễn Kim Chi dịch), NXB Giáo dục, 2001.
- [3] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Fermat's_last_theorem.html
- [4] Nguyễn Duy Thuận, *Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Sư phạm, 2004.
- [5] Nguyễn Hữu Hoan, *Lý thuyết số*, NXB Đại học Sư phạm, 2003.
- [6] Kenneth H. Rosen, *Elementary Number Theory and its applications*, AT&T, 1993.
- [7] <http://time.com/4263916/andrew-wiles-abel-prize-fermat-theorem/>