BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỊNH THỨC VÀ MA TRẬN ĐẶC BIỆT CHO SINH VIÊN THI OLYMPIC ĐẠI SỐ

ThS Lê Thị Hương Giang

Hà Nội, tháng 1 năm 2019

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

GIỚI THIỆU MỘT SỐ ĐỊNH THỨC VÀ MA TRẬN ĐẶC BIỆT CHO SINH VIÊN THI OLYMPIC ĐẠI SỐ

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, tháng 1 năm 2019

MỤC LỤC

LỜI GIỚI THIỆU

Ma trận và định thức là một phần kiến thức quan trọng trong kì thi Olympic Sinh viên, báo cáo học thuật này đưa ra một số dạng toán cơ bản để giải các bài tập về Ma trận, định thức. Báo cáo học thuật cũng là một tài liệu tham khảo cho các thầy cô và các em sinh viên trong việc dạy và học Đại số để phục vụ cho kì thi Olympic Sinh viên hằng năm.

Báo cáo học thuật gồm một số dạng toán về Ma trận, định thức như: tính chất cơ bản của định thức, một số định thức đặc biệt và một số ma trận đặc biệt.

CHƯƠNG I: CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA ĐỊNH THỨC

Định thức của một ma trận vuông $A = (a_{ij})_1^n$ cấp n là tổng luân phiên

$$\sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

ở đó, tổng trên được lấy qua tất cả các phép hoán vị $\sigma \epsilon S_n$. Định thức của ma trận A được kí hiệu là $\det A$ hoặc $|A|$. Nếu $\det(A) \neq 0$ ta nỏi A là ma trận khả nghịch (không suy biến). Các tính chất sau đây thường được sử dụng để tính định thức của một ma trận.

1) Nếu đổi chỗ hai hàng (hoặc hai cột) của ma trận A thì định thức của nó đổi dấu. Nói riêng, nếu ma trận A có hai hàng (cột) giống nhau thì $\det(A) = 0$.
2) Nếu A, B, C là các ma trận vuông cùng cấp thì $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A . \det B$.
3) $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} M_{ij}$, ở đó M_{ij} là định thức của ma trận A thu được bằng cách bỏ đi hàng i và cột j của nó. Công thức này được gọi là công thức khai triển định thức theo hàng.
4) $\begin{vmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \beta_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
5) $\det(AB) = \det A . \det B$
6) $\det(A^T) = \det A$

CHƯƠNG II: CÁC ĐỊNH THỨC ĐẶC BIỆT

1. Định thức khối:

$\det\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A).\det(B)$ với A, B, C là các ma trận vuông cùng cấp.

2. Định thức Vandermonde:

$$V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

Hệ quả: Hệ $V_n(a_1, a_2, \dots, a_n).X = 0$ chỉ có nghiệm tầm thường khi và chỉ khi $a_1, a_2, \dots, a_n$ đôi một phân biệt.

3. Định thức Cauchy:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \frac{1}{x_2 + y_1} & \frac{1}{x_2 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & & \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{i>j}(x_i - x_j)(y_i - y_j)}{\prod_{i>j}(x_i + y_j)}$$

Chứng minh: Lấy cột 1, cột 2, …, cột $n - 1$ trừ đi cột cuối cùng ta được:

$$\frac{1}{x_i + y_j} - \frac{1}{x_i + y_n} = \frac{y_n - y_j}{(x_i + y_j)(x_i + y_n)}$$

$$\Rightarrow |A_n| = \begin{vmatrix} \frac{y_n - y_1}{(x_1 + y_1)(x_1 + y_n)} & \frac{y_n - y_2}{(x_1 + y_2)(x_1 + y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \frac{y_n - y_1}{(x_2 + y_1)(x_2 + y_n)} & \frac{y_n - y_2}{(x_2 + y_2)(x_2 + y_n)} & \cdots & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{y_n - y_1}{(x_n + y_1)(x_n + y_n)} & \frac{y_n - y_2}{(x_n + y_2)(x_n + y_n)} & & \frac{1}{x_n + y_n} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i,j} \frac{y_n - y_j}{x_i + y_n} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{x_2 + y_1} & \frac{1}{x_2 + y_2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Lấy mỗi hàng từ 1 đến $n - 1$ trừ đi hàng cuối cùng, ta được:

$$|A_n| = \prod_{i,j} \frac{y_n - y_j}{x_i + y_n} \cdot \begin{vmatrix} \frac{x_n - x_1}{(x_1 + y_1)(x_n + y_1)} & \frac{x_n - x}{(x_1 + y_2)(x_n + y_2)} & \cdots & 0 \\ \frac{x_n - x_1}{(x_2 + y_1)(x_n + y_1)} & \frac{x_n - x_2}{(x_2 + y_2)(x_n + y_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{x_n + y_1} & \frac{1}{x_n + y_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A_n| = \prod_{i,j} \frac{y_n - y_j}{x_i + y_n} \cdot \prod_{i,j} \frac{x_n - x_i}{x_n + y_j} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{1}{x_1 + y_1} & \frac{1}{x_1 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_1 + y_n} \\ \frac{1}{x_2 + y_1} & \frac{1}{x_2 + y_2} & \cdots & \frac{1}{x_2 + y_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{x_{n-1} + y_1} & \frac{1}{x_{n-1} + y_2} & & \frac{1}{x_{n-1} + y_n} \end{vmatrix}}_{|A_{n-1}|}$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta có điều phải chứng minh.

4. Định thức Frobenius:

a. $$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} a_0$$

b. $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} = \lambda^n - a_{n-1}.\lambda^{n-1} - a_{n-2}.\lambda^{n-2} - \cdots - a_0$$

Chứng minh: Khai triển định thức Frobenius theo hàng thứ nhất.

5. Định thức ma trận ba đường chéo:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

Khai triển định thức trên theo hàng thứ k, ta được:

$$\Delta_k = \mathrm{a}_k.\Delta_{k-1} - b_k.c_k.\Delta_{k-2}$$

Đặc biệt: Nếu ta ký hiệu

$$(a_1 a_2 \dots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix}$$

Ta có công thức truy hồi thông qua liên phân số như sau:

$$\frac{(a_1 a_2 \dots a_n)}{(a_2 a_3 \dots a_n)} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

6. Định thức ma trận khối:

$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ với A_{11}, A_{22} là các ma trận vuông cấp n.

Các tính chất:

1) $\begin{vmatrix} D.A_{11} & D.A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |D||A|$

2) $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} + B.A_{11} & A_{22} + B.A_{12} \end{vmatrix} = |A|$

CHƯƠNG III: CÁC MA TRẬN ĐẶC BIỆT

1. **Ma trận đối xứng:** A đối xứng $\Leftrightarrow A^T = A$
2. **Ma trận phản đối xứng:** A phản đối xứng $\Leftrightarrow A^T = -A$.

   Các tính chất:

   1) Ma trận phản đối xứng cấp n lẻ thì có định thức bằng 0.
   2) Nếu A phản đối xứng thì A^2 đối xứng.
   3) Các giá trị riêng của ma trận phản đối xứng là thuần ảo.
   4) A phản đối xứng $\Leftrightarrow x^T A\, x = 0$, với mọi x.
   5) Hạng của ma trận phản đối xứng là một số chẵn.

3. **Ma trận lũy linh:** A lũy linh $\Leftrightarrow \exists k: A^k = 0$. Nếu có thêm $A^{k-1} \neq 0$ thì k được gọi là bậc lũy linh của A.

Các tính chất:

1) Bậc lũy linh của một ma trận lũy linh bằng cấp cao nhất của các khối Jordan của nó.
2) A lũy linh cấp $n \Leftrightarrow A^n = 0$.
3) Đa thức đặc trưng của ma trận vuông cấp n lũy linh bằng λ^n.
4) A là ma trận vuông cấp n. A lũy linh $\Leftrightarrow tr(A^p) = 0, \forall p = \overline{1,n}$.

Chứng minh:

($\Longrightarrow$) Nếu $A^n = 0$ thì A chỉ có giá trị riêng bằng 0. Nên A^k cũng chỉ có giá trị riêng bằng 0 với mọi k. Do vậy, tổng các giá riêng hay $tr(A^k) = 0$ với mọi k.

($\Longleftarrow$) Giả sử A có các giá trị riêng là $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Vì $tr(A^k) = 0, \forall k = \overline{1,n}$ nên $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0 \\ {\lambda_1}^2 + {\lambda_2}^2 + \cdots + {\lambda_n}^2 = 0 \\ \vdots \\ {\lambda_1}^n + {\lambda_2}^n + \cdots + {\lambda_n}^n = 0 \end{cases}$. Do đó, $V_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^T = 0$ với $V_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ là định thức Vandermond. Ta sẽ chứng minh các giá trị riêng phải bằng nhau. Thật vậy: Nếu λ_i đôi một phân biệt thì $V_n \neq 0$, suy ra hệ có nghiệm duy nhất $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ (mâu thuẫn). Nếu $\lambda_1 = \lambda_2$ và không có giá trị λ_i còn lại nào bằng nhau. Suy ra $V_{n-1}(\lambda_2, \dots, \lambda_n)..(2\lambda_2, \dots, \lambda_n)^T = 0$. Lập luận tương tự có $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Nên đa thức đặc trưng của A là $\lambda^n = 0$. Do vậy, $A^n = 0$.

CHƯƠNG IV: MỘT SỐ BÀI TẬP MINH HỌA

Bài 1: Chứng minh:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \ddots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_2 a_3 \dots a_n & a_1 a_3 \dots a_n & \cdots & a_1 a_2 \dots a_{n-2} a_n & a_1 a_2 \dots a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}. \det V_n(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Giải: Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$ thì nhân cột thứ nhất với a_1, nhân cột thứ hai với a_2, …, nhân cột thứ n với a_n rồi chia cho $a_1 a_2 \dots a_n$ ta được:

$$|A| = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_n}. \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ {a_1}^2 & {a_2}^2 & \ddots & {a_{n-1}}^2 & {a_n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \ddots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}. \det V_n(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Nếu $a_1 = 0$ thì $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2} & \ddots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_2 a_3 \dots a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= (-1)^{n-1} a_2 a_3 \dots a_n . \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_2 & \ddots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}. \begin{vmatrix} a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ {a_2}^2 & \ddots & {a_{n-1}}^2 & {a_n}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}. \det(V_n).$$

Bài 2: Cho $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ là các đa thức có bậc không quá $n-2$. Chứng minh: Với mọi số $a_1, a_2, \dots, a_n$ ta có:

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0.$$

Giải: Giả sử $f_i(x) = b_{i0} + b_{i1}x + \cdots + b_{i,n-2}x^{n-2} + 0.x^{n-1}$. Ta có:

$$\begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1,n-2} & 0 \\ b_{20} & b_{21} & \cdots & b_{2,n-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \\ b_{n0} & b_{n1} & \cdots & b_{n,n-2} & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Lấy định thức hai vế ta có điều phải chứng minh.

Bài 3: Cho $A = (a_{ij})$ và $f_i(x) = a_{i1} + a_{i2}x + \cdots + a_{in}x^{n-1}, i = \overline{1,n}$.

Chứng minh: $\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} = \det A \,.\, V_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Giải: Tương tự bài 2. Ta có:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ f_2(x_1) & f_2(x_2) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \cdots & f_n(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Lấy định thức hai vế ta có điều phải chứng minh.

Bài 4: Chứng minh: Nếu A lũy linh thì $I - A$ khả nghịch.

Giải: Nếu A lũy linh thì tồn tại k để $A^k = 0$. Khi đó:

$$I = I - A^k = (I - A)(I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1})$$

Nên $I - A$ khả nghịch.

Bài 5: Cho A, B là các ma trận vuông cùng cấp thỏa mãn $A^{1999} = 0, B^{2000} = 0$ và $AB = BA$. Chứng minh $A + B + I$ khả nghịch.

Giải: Ta có $(A + B)^{3999} = 0$ nên $A + B$ lũy linh. Theo bài 4, $(A + B + I)$ khả nghịch.

Bài 6: Chứng minh:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & h & -1 & \ddots & 0 \\ x^2 & hx & h & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & \cdots & h \end{vmatrix} = (x + h)^n.$$

KẾT LUẬN

Bản báo cáo đã đưa ra được một số định thức và ma trận đặc biệt hay xuất hiện trong các đề thi Olympic Sinh viên Toàn quốc. Bản báo cáo là một tài liệu hữu ích cho sinh viên thi Olympic Đại số cũng như cho các thầy cô tham gia giảng dạy Olympic Đại số.

Bản báo cáo có thể thêm nhiều ví dụ và bài tập minh họa hơn nữa, để sinh viện vận dụng thành thạo hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Tuyển tập các đề thi Olympic Đại số cho Sinh viên Toàn quốc.

2. Tuyển tập các đề thi Olympic Đại số cấp trường.

3. Bài giảng Đại số tuyến tính, Bùi Xuân Diệu.