BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA KHAI TRIỂN TAYLOR, MACLAURIN

TS. Phạm Tuấn Cường

Hà Nội, 6/2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT VÀI ỨNG DỤNG CỦA KHAI TRIỂN TAYLOR, MACLAURIN

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 6/2024

MỤC LỤC

1. Mở đầu.

Đa thức Taylor cho ta xấp xỉ chính xác trong lân cận của một điểm nào đó nói chung là nó chỉ có tính nhất địa phương. Để tăng cao độ chính xác ta cho bậc của đa thức tiến dần ra vô cùng nhưng thay thế trên vẫn chỉ có tính chất địa phương.

Ngày nay, chuỗi Taylor được sử dụng rất nhiều trong các lĩnh vực sử lý tín hiệu số, điện điện tử. Những chuyên gia về sử lý tín hiệu số là những người hơn ai hết biết về vai trò quan trọng của chuỗi Taylor. Do tầm quan trọng của khai triểnTalor với mong muốn tìm hiểu sau hơn về chuỗi Taylor này và những ứng dụng của nó nên tôi chon đề tài này để báo cáo.

2. Cơ sở lý thuyết

Cho hàm số f khả vi đến cấp $(n+1)$ tại lân cận điểm x_0.

- Gọi đa thức $P_n(x)$ với $\deg(P_n(x)) \le n$ thỏa mãn $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \forall k = \overline{0,n}$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận điểm x_0.
- Nếu $P_n(x)$ là đa thức Taylor của $f(x)$ tại lân cận x_0 thì nó là duy nhất và có dạng $P_n(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$
- Với mọi x thuộc lân cận của x_0,ta có:

  $$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

  trong đó c nằm giữa x và x_0

Công thức trên được gọi là công thức khai triển Taylor cấp n của hàm $f(x)$ ở lân cận x_0. Biểu thức $R_n(x) = \dfrac{f^{(n)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ được gọi là phần dư thứ n của khai triển Taylor.

- Khi $x_0 = 0$ công thức Taylor trở thành

  $$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Công thức trên được gọi là công thức khai triển Mc Laurin cấp n của hàm $f(x)$.

2.4. Quy tắc L'Hospital.

Cho f,g khả vi ở lân cận $V(x_0)$ nào đó của x_0, ngoài ra $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in V(x_0)\setminus\{x_0\}$. Khi đó, nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ thì cũng có $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=L.$

Chú ý:

1. Cho f,g là hai hàm khả vi ở $V(x_0)\setminus\{x_0\}$, $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in V(x_0)\setminus\{x_0\}$ và $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$. Khi đó, nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=L$ thì $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=L.$
2. Kết quả vẫn đúng trong trường hợp $x_0=\infty$ và trường hợp $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$

3. ỨNG DỤNG KHAI TRIỂN TAYLOR, MACLAURIN

Bài 1. Cho hàm f khả vi liên tục trên $[0;2]$ và thỏa mãn các điều kiện $f(0)=1,$ $f(2)=3;\ |f'(x)|\leq 2,\forall x\in[0;2]$. Chứng minh:

$$\int_0^2 f(x)dx>2$$

$+\ f(x)=f(0)+f'(c_1).x,\ c_1\in(0;x)\Rightarrow f(x)\geq 1-2x$

$+\ f(x)=f(2)+f'(c_2).(x-2),\ c_2\in(x;2)\Rightarrow f(x)\geq 3+2(x-2)\Rightarrow f(x)\geq 2x-1$

$+\ \displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx\geq\int_0^1(1-2x)dx+\int_1^2(2x-1)dx=2$

+ Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow f(x)=\begin{cases}1-2x, & x\in[0;1]\\ 2x-1, & x\in[1;2]\end{cases}$.

Điều này mâu thuẫn mới giả thiết f khả vi liên tục trên $[0;2]\Rightarrow\displaystyle\int_0^2 f(x)dx>2.$

Bài 2. Cho hàm f khả vi hai lần trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(0)=f(1)=251$, $\min\limits_{x\in[0;1]} f(x)=-\frac{3}{4}$. Chứng minh rằng $\underset{x\in[0;1]}{Max} f''(x)\ge 2014$.

+ Do $\min\limits_{x\in[0;1]} f(x)=-\frac{3}{4}$ nên tồn tại $c\in(0;1)$ sao cho $f(c)=-\frac{3}{4}$. Do hàm f khả vi liên tục trên $[0;1]\Rightarrow f'(c)=0$.

+ $f(0)=f(c)+f'(c)(-c)+f''(\theta_1).\frac{(-c)^2}{2}\Rightarrow f''(\theta_1).\frac{c^2}{2}=\frac{1007}{4}\Rightarrow f''(\theta_1)=\frac{1007}{2c^2}$

$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+f''(\theta_2).\frac{(1-c)^2}{2}\Rightarrow f''(\theta_2).\frac{(1-c)^2}{2}=\frac{1007}{4}\Rightarrow f''(\theta_2)=\frac{1007}{2(1-c)^2}$

+ $f''(\theta_1).f''(\theta_2)=\frac{1007^2}{4\left[c(1-c)\right]^2}\ge\frac{1007^2}{4\left[\frac{c+1-c}{2}\right]^4}=2014^2$

+ Do $\theta_1\in(0;c)\subset[0;1];\ \theta_2\in(c;1)\subset[0;1]\Rightarrow f''(\theta_1).f''(\theta_2)\le\left[\underset{x\in[0;1]}{Max} f(x)\right]^2$

Bài 3. Cho hàm $f:[0;1]\to\mathbb{R}$ sao cho $f''(x)>0$ với mọi $x\in[0;1]$. Chứng minh:

a. $2\int_0^1 f(t)dt>3\int_0^1 f(t^2)dt-f(0)$

b. $2\int_0^1 (1-x)f(x)dx\le\int_0^1 f(x^2)dx$

+ Với $t\in[0;1]\Rightarrow 0\le t^2\le t\le 1$. Do $f''(x)>0,\forall x\in[0;1]\Rightarrow$ $f'(x)$ đồng biến trên $[0;1]$.
+ $f(t)=f(t^2)+f'(c).(t-t^2),\ c\in(t^2;t)$
+ Mà $f'(t^2)\le f'(c)\le f'(t)\Rightarrow f'(t^2)(t-t^2)\le f(t)-f(t^2)\le f'(t)(t-t^2)$
+ Do đó

$$\int_0^1 f'(t^2)(t-t^2)dt\le\int_0^1 f(t)dt-\int_0^1 f(t^2)dt\le\int_0^1 f'(t)(t-t^2)dt$$

$$\int_0^1 f'(t^2)(t-t^2)dt=\frac{1}{2}\int_0^1(1-t)d\left(f(t^2)\right)=\frac{1}{2}(1-t)f(t^2)\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(t^2)dt=-\frac{1}{2}f(0)+\frac{1}{2}\int_0^1 f(t^2)dt$$

$$\int_0^1 f'(t)(t-t^2)dt=(t-t^2)f(t)\Big|_0^1-\int_0^1(1-2t)f(t)dt=-\int_0^1(1-2t)f(t)dt$$

Bài 4. Tìm tất cả các hàm f có đạo hàm đến cấp hai liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn

$f(0)=f'(0)=1,\ f''(x)\geq 0, \forall x\in(0;1)$ **và** $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}$.

+ $x\in[0;1]$: $f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(c)\frac{x^2}{2}=1+x+f''(c)\frac{x^2}{2}\geq 1+x$, với $c\in(0;x)$

+ Suy ra $\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1(1+x)dx=\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{3}{2}$

+ Dấu = xảy ra

$\Leftrightarrow f''(c)=0,\forall c\in(0;1)\Rightarrow f''(x)=0,\forall x\in(0;1)\Rightarrow f'(x)=a\Rightarrow f(x)=ax+b$

Do $f(0)=f'(0)=1\Rightarrow f(x)=1+x$

Bài 5. Cho hàm f liên tục trên $[a;b]$ và $f''(x)\geq 0,\forall x\in(a;b)$.

Chứng minh: $\int_a^b f(x)dx\geq(b-a)\left[f(c)+\left(\frac{a+b}{2}-c\right)f'(c)\right],\forall c\in(a;b)$.

+ $f(x)=f(c)+f'(c)(x-c)+f''(\theta).\frac{(x-c)^2}{2}\geq f(c)+f'(c)(x-c)$

+

$$\int_a^b f(x)dx\geq f(c)(b-a)+\int_a^b f'(c)(x-c)dx$$

$$\int_a^b f'(c)(x-c)dx=f'(c)\frac{(x-c)^2}{2}\Big|_a^b=f'(c).\left[\frac{(b-c)^2}{2}-\frac{(a-c)^2}{2}\right]=f'(c)(b-a)\left(\frac{a+b}{2}-c\right)$$

Bài 6. Giả sử f khả vi liên tục trên $[0;1]$ và $f(0)=f(1)=0$. Chứng minh tồn tại ít nhất một điểm $x_0\in[0;1]$ sao cho $|f'(x_0)|\geq 4\int_0^1|f(x)|dx$

+ Do hàm f khả vi liên tục trên $[0;1]\Rightarrow|f'(x)|$ liên tục trên $[0;1]$. Do đó tồn tại $x_0\in[0;1]$ sao cho $|f'(x_0)|=\underset{x\in[0;1]}{Max}|f'(x)|$

+ $f(x)=f(0)+f'(c_1)x\Rightarrow f(x)=f'(c_1)x\Rightarrow|f(x)|=|f'(c_1)|x\leq|f(x_0)|x$, $c_1\in(0;x)$

$+\ f(x)=f(1)+f'(c_2)(x-1)\Rightarrow f(x)=f'(c_2)(x-1)$

$\Rightarrow |f(x)|=|f'(c_2)|(1-x)\le |f(x_0)|(1-x)$, với $c_2\in(x;1)$

+

$$\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}|f(x)|dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|dx\le \int_0^{\frac{1}{2}}|f(x_0)|xdx+\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x_0)|(1-x)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 |f(x)|dx\le |f(x_0)|\left(\int_0^{\frac{1}{2}}xdx+\int_{\frac{1}{2}}^1(1-x)dx\right)=\frac{|f(x_0)|}{4}$$

Bài 7. Giả sử hàm f có đạo hàm đến cấp hai trên $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)\ge 0$, và với mọi $x\in[0;1]: f''(x)\le 1$. Chứng minh $f(0)-2f\left(\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}$

$+\ f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(c_2)\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$

$+\ f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(c_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$+\ f(1)+f(0)=2f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}\left[f''(c_1)+f''(c_2)\right]\le 2f\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(0)-2f\left(\frac{1}{2}\right)\le\frac{1}{4}-f(1)\le\frac{1}{4}$

Bài 8. Cho hàm số $g(x)$ có $g''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. và hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)>g(0)$, $\int_0^{\pi} f(x)dx<g(0)\pi+\frac{g'(0)}{2}\pi^2$.

Chứng minh tồn tại $c\in[0;\pi]$ sao cho $f(c)=g(c)$.

+ Đặt $h(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow h(x)$ liên tục trên $[0;\pi]$.

$+\ h(0)=f(0)-g(0)>0.$

$$+\int_0^{\pi} h(x)dx=\int_0^{\pi}\left[f(x)-g(0)-g'(0)x-g''(\theta).\frac{x}{2}\right]dx$$

$$+\int_0^{\pi} h(x)dx<\int_0^{\pi}\left[f(x)-g(0)-g'(0)x\right]dx=\int_0^{\pi} f(x)dx-g(0)x\Big|_0^{\pi}-g'(0).\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}$$

+ $\int_0^{\pi} h(x)dx < \int_0^{\pi} f(x)dx - g(0).\pi - g'(0).\frac{\pi^2}{2} < 0$.

+ Do đó tồn tại $\alpha \in [0;\pi]$ sao cho $h(\alpha) < 0$. Do hàm h liên tục trên $[0;\alpha] \subset [0;\pi]$ nên tồn tại $c \in (0;\alpha)$ sao cho $h(c) = 0$.

Bài 9. Cho hàm f khả vi liên tục hai lần trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(1) = 0, \int_0^1 f(x)dx = 0$.

Chứng minh với mọi $\alpha \in (0;1)$ ta đều có: $\left|\int_0^{\alpha} f(x)dx\right| \le \frac{2}{81} \underset{x\in[0;1]}{Max} |f''(x)|$

+ $\int_0^{\alpha} f(x)dx = \alpha \int_0^1 f(\alpha x)dx = \alpha \int_0^1 \left[f(x) + (\alpha - 1)xf'(x) + \frac{(\alpha-1)^2 x^2}{2} f''(\theta) \right] dx$

+ $\int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 0$

+ $\Rightarrow \int_0^{\alpha} f(x)dx = \alpha \int_0^1 f(\alpha x)dx = \alpha \int_0^1 \frac{(\alpha-1)^2 x^2}{2} f''(\theta)dx$

$\Rightarrow \left|\int_0^{\alpha} f(x)dx\right| = \alpha \left|\int_0^1 \frac{(\alpha-1)^2 x^2}{2} f''(\theta)dx\right| \le \frac{\alpha(\alpha-1)^2}{2} \int_0^1 x^2 |f''(\theta)|dx \le \frac{\alpha(\alpha-1)^2}{6} \underset{x\in[0;1]}{Max} |f''(x)|$

+ $\frac{\alpha(\alpha-1)^2}{6} = \frac{2\alpha(1-\alpha)(1-\alpha)}{12} \le \frac{1}{12}\left(\frac{2\alpha + 2(1-\alpha)}{3}\right)^3 = \frac{1}{12}.\frac{8}{27} = \frac{2}{81}$

+ $\left|\int_0^{\alpha} f(x)dx\right| \le \frac{2}{81} \underset{x\in[0;1]}{Max} |f''(x)|$

Bài 10. Cho hàm f khả vi trên $[0;1]$ và $f(0) = f(1) = 0, \ |f'(x)| \le 1, \forall x \in [0;1]$.

Chứng minh: $\left|\int_0^1 f(x)dx\right| < \frac{1}{4}$

+ $f(x) = f(0) + f'(c_1).x \Rightarrow f(x) = f'(c_1).x \Rightarrow |f(x)| \le x, \ c_1 \in (0;x)$

+ $f(x) = f(1) + f'(c_2)(x-1) \Rightarrow |f(x)| = |f'(c_2)|(1-x) \le 1-x$, với $c_2 \in (x;1)$

$+\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \int_0^1 |f(x)|dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|dx \le \int_0^{\frac{1}{2}} xdx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)dx = \frac{1}{4}$

Bài 11. Cho hàm f khả vi liên tục đến cấp hai trên $[a;b]$ thỏa mãn $f(a)+f(b)=0.$

Đặt $m=\min\limits_{x\in[a;b]} f''(x).$ Chứng minh: $\int_a^b f(x)dx \le \frac{m(a-b)^3}{12}$

$+\ f(a)=f(x)+f'(x).(a-x)+f''(\theta_1).\frac{(a-x)^2}{2}$ với $\theta_1\in(a;x)$

$+\ f(b)=f(x)+f'(x).(b-x)+f''(\theta_2).\frac{(b-x)^2}{2}$ với $\theta_2\in(x;b)$

$+\Rightarrow 2f(x)+f'(x).(a+b-2x)+f''(\theta_1).\frac{(a-x)^2}{2}+f''(\theta_2).\frac{(b-x)^2}{2}=0$

$+\Rightarrow 2f(x)+f'(x).(a+b-2x)=-f''(\theta_1).\frac{(a-x)^2}{2}-f''(\theta_2).\frac{(b-x)^2}{2}$

$+\Rightarrow 2f(x)+f'(x).(a+b-2x)\le -\frac{m}{2}(a-x)^2-\frac{m}{2}(b-x)^2$

$+\Rightarrow 2\int_a^b f(x)dx+\int_a^b f'(x).(a+b-2x)dx \le -\frac{m}{2}\int_a^b (a-x)^2dx-\frac{m}{2}\int_a^b (b-x)^2dx$

$+\int_a^b f'(x).(a+b-2x)dx=(a+b-2x)f(x)\Big|_a^b+2\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f'(x).(a+b-2x)dx=(a-b)f(b)+(a-b)f(a)+2\int_a^b f(x)dx=2\int_a^b f(x)dx$

$+\int_a^b (a-x)^2dx=\frac{(x-a)^3}{3}\Big|_a^b=\frac{(b-a)^3}{3};\ \int_a^b (b-x)^2dx=\frac{(x-b)^3}{3}\Big|_a^b=\frac{(b-a)^3}{3}$

$+\Rightarrow 4\int_a^b f(x)dx \le -m\frac{(b-a)^3}{3}\Rightarrow \int_a^b f(x)dx\le\frac{m(a-b)^3}{12}$

4. Kết luận

Bất đẳng thức tích phân rất hay xuất hiện trong các đề thi olympic toán sinh viên toàn quốc. Để giúp các em sinh viên có thể làm tốt câu bất đẳng thức tích phân tôi đã hoàn thành báo cáo này.

Báo cáo gồm một hệ thống bài tập có lời giải chi tiết cùng với phần mở đầu, kết luận, danh mục tài liệu tham khảo.

Nội dung được trình bày trong báo cáo là những kiến thức bổ ích về bất đẳng thức tích phân. Báo cáo này là tài liệu tham khảo tốt cho các em trong đội tuyển olympic. Mặt khác nó cũng là tài liệu tham khảo tốt cho các em sinh viên năm thứ nhất các trường Đại học. Do thời gian có hạn nên những nội dung được trình bày trong báo cáo vẫn còn mang tính chất khái quát. Vì vậy nếu bạn đọc muốn tìm hiểu sâu hơn về báo cáo có thể tham khảo thêm các tài liệu được trích ở cuối báo cáo này.

Hy vọng nội dung của báo cáo sẽ giúp các thầy, cô giáo cùng với các bạn sinh viên đang giảng dạy và học tập có thêm nguồn tài liệu hữu ích, bổ sung thêm phương pháp để tiếp cận vấn đề, nhằm nâng cao chất lượng bài giảng, giúp các em sinh viên hiểu sâu sắc được vấn đề hướng tới đạt thành tích cao trong các kì thi ./.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Xuân Liêm, Giải tích, Tập 2, NXB GD, 2010.

[2] Nguyễn Đình Trí, Toán học cao cấp, Tập 2, NXB GD, 2005.

[3] Nguyễn Thừa Hợp, Giải tích, Tập 2, NXB GD, 2010.

[4 В. А. Зорич, Математический Анализ, Москва, 2002.

[5] Hội toán học Việt Nam, Tuyển tập các đề thi Olympic Toán sinh viên từ năm 1993 đến năm 2011.