BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MA TRẬN LUỸ LINH VÀ ỨNG DỤNG

TS. PHẠM TUẤN CƯỜNG

Hà Nội , tháng 06/2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MA TRẬN LUỸ LINH VÀ ỨNG DỤNG

Xác nhận của bộ môn

MỤC LỤC

PHẦN MỞ ĐẦU

Đại số tuyến tính là môn học quan trọng đối với sinh viên ngành Toán cũng như sinh viên ngành Kỹ thuật khác, là học phần tạo cho em nhiều hứng thú khi học. Đại số tuyến tính gồm nhiều vấn đề nhưng trong báo cáo này tôi đặt vấn đề liên quan đến ma trận, và đặc biệt quan tâm đến ma trận luỹ linh hay được đưa vào trong các bài thi Olympic.

Nội dung chính của báo cáo gồm 2 phần:

Phần 1: Trình bầy 6 phương pháp tạo ra ma trânh luỹ linh: tính trực tiếp, sử dụng công thức Newton, quy nạp, chéo hóa ma trận, đưa về dạng chuẩn tắc Jordan, sử dụng định lý Cayley – Hamilton.

Phần 2: Bài tập và lời giải

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP TÍNH LŨY THỪA CỦA MA TRẬN VUÔNG

1.1 Tìm ma trận luỹ linh bằng phương pháp tính trực tiếp

1.1.1 Phương pháp

Phân tích ma trận về các ma trận đặc biệt như ma trận đơn vị, ma trận không.

1.1.2 Các ví dụ

Ví dụ 1

Tính $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2020}$

Giải

Đặt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ta có $A^{2020} = \left(A^4\right)^{505} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ví dụ 2

Cho $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Dễ thấy $A^4 = 0 \Rightarrow A^n = 0, \forall n \geq 4$

$$\text{Vậy } A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n = 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n = 3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n \geq 4 \end{cases}$$

Ví dụ 3

Tìm tất cả các ma trận thực cấp 2 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sao cho $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$.

Giải

Dễ thấy ma trận $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ là ma trận cần tìm.

Vì $A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$ đúng với $\forall n \in N^* \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} a^n & b^n \\ c^n & d^n \end{pmatrix}$ đúng với n=2 .

Khi đó ta có: $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(\mathrm{a+d}) \\ c(\mathrm{a+d}) & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & b^2 \\ c^2 & d^2 \end{pmatrix}$

Suy ra hệ $\begin{cases} a^2 + bc = a^2 \\ b(\mathrm{a+d}) = b^2 \\ c(\mathrm{a+d}) = \mathrm{c}^2 \\ bc + d^2 = d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc = 0 & (1) \\ b(\mathrm{a+d-b}) = 0 & (2) \\ c(\mathrm{a+d-c}) = 0 & (3) \end{cases}$

Trường hợp 1: với $c \neq 0$

Từ hệ phương trình ta có $\begin{cases} b = 0 \\ a + d - c = 0 \ (4) \end{cases}$

Từ đẳng thức $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & b^3 \\ c^3 & d^3 \end{pmatrix} = A^2 A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ c(\mathrm{a+d}) & d^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ ac(\mathrm{a+d}) + \mathrm{d}^2 c & d^3 \end{pmatrix}$

Suy ra $c^3 = ac(\mathrm{a+d}) + \mathrm{d}^2 c$ đúng với n=2 .

Từ (4) ta có c=a+d thay vào phương trình trên ta được

$(\mathrm{a+d})^3 = a(\mathrm{a+d})^2 + d^2(\mathrm{a+d}) \Rightarrow \mathrm{ad} = 0$

+ Nếu a=0 từ (4) ta có $\begin{cases} b = 0 \\ d = c \neq 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & c \end{pmatrix}$

+ Nếu d=0 từ (4) ta có $\begin{cases} d = b = 0 \\ a = c \neq 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} c & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$

Trường hợp 2: với $b \neq 0$

+ Tương tự như trường hợp 1 ta có: Nếu a=0 từ (4) ta có $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$ hoặc $A = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Trường hợp 3: với $b = c = 0 \qquad \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$

Thử lại cả 5 trường hợp đều thỏa mãn. Vậy các ma trận cần tìm là:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} c & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & d \end{pmatrix};\ A = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

1.2 Tìm ma trận luỹ linh bằng phương pháp quy nạp toán học

1.2.1 Phương pháp

Bước 1: Tính các lũy thừa A^2 , A^3 , A^4 ,...

Bước 2: Dự đoán công thức tổng quát A^n

Bước 3: Sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh công thức đã dự đoán ở bước 2.

1.2.2 Các ví dụ

Ví dụ 1

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Dễ thấy $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dự đoán $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

+ Ta chứng minh dự đoán trên bằng phương pháp quy nạp toán học

- Với n=1 công thức trên đúng
- Giả sử công thức đúng với n=k, ta có $A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Chứng minh công thức đúng với n=k+1

Thật vậy:

$$A^{k+1} = A^k A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vậy ta có $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ 2

Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Dễ thấy $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dự đoán $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(\mathrm{n}+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ví dụ 3

Cho $A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Dễ thấy $A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} \cos 3x & -\sin 3x \\ \sin 3x & \cos 3x \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} \cos 4x & -\sin 4x \\ \sin 4x & \cos 4x \end{pmatrix}$

Dự đoán $A^n = \begin{pmatrix} \cos \mathrm{nx} & -\sin \mathrm{nx} \\ \sin \mathrm{nx} & \cos \mathrm{nx} \end{pmatrix}$

Ví dụ 4

Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Đặt: $B=\begin{pmatrix}3 & -7\\ 8 & 4\end{pmatrix}; O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}; I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Khi đó ma trận A có dạng $A=\begin{pmatrix}2I & B\\ O & 2I\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}2^2 I & 2.2B\\ O & 2^2 I\end{pmatrix};\ A^3=\begin{pmatrix}2^3 I & 2^2.3B\\ O & 2^3 I\end{pmatrix};\ A^4=\begin{pmatrix}2^4 I & 2^3.4B\\ O & 2^4 I\end{pmatrix};$$

Dự đoán $A^n=\begin{pmatrix}2^n I & 2^{n-1}nB\\ O & 2^n I\end{pmatrix};(5)$

Chứng minh công thức (5) bằng phương pháp quy nạp:

- Với n=1 công thức (5) đúng;
- Giả sử công thức (5) đúng với n=k, ta có $A^k=\begin{pmatrix}2^k I & 2^{k-1}kB\\ O & 2^k I\end{pmatrix};$
- Ta cần chứng minh (5) đúng với n=k+1

Thật vậy

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}2^k I & 2^{k-1}kB\\ O & 2^k I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2I & B\\ O & 2I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{k+1} I & 2^k(k+1)B\\ O & 2^{k+1} I\end{pmatrix}.$$

Vậy ta được $A^n=\begin{pmatrix}2^n I & 2^{n-1}nB\\ O & 2^n I\end{pmatrix}$

Hay $A^n=\begin{pmatrix}2^n & 0 & 3n2^{n-1} & -72^{n-1}\\ 0 & 2^n & 8n2^{n-1} & 4n2^{n-1}\\ 0 & 0 & 2^n & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$

1.3 Tìm ma trận luỹ linh bằngphương pháp sử dụng nhị thức Newton

1.3.1 Phương pháp

Giả sử *A* là ma trận vuông cấp *k*, tính lũy thừa bậc *n* của ma trận *A* với *n* nguyên dương.

Bước 1 : Phân tích *A = B+ D*, trong đó *BD = DB, B, D* là các ma trận tính lũy thừa dễ dàng.

Bước 2: $A^n=(B+D)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k B^{n-k}D^k$

1.2.3 Các ví dụ

Ví dụ 1

Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Dễ thấy $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=3I_2+B$

Bằng phương pháp quy nạp ta chúng minh được $B^k=B$

Khi đó ta được $A^n=\left(3I_2+B\right)^n=C_n^0 3^n I_2+C_n^1 3^{n-1}B+C_n^2 3^{n-2}B^2+....C_n^n B^n$

$=3^n I_2+\left(C_n^0 3^n+C_n^1 3^{n-1}+C_n^2 3^{n-2}+....+C_n^n-C_n^0 3^n\right)B$

$=3^n I_2-(4^n-3^n)\mathrm{B}=\begin{pmatrix}4^n & 4^n-3^n\\ 0 & 4^n\end{pmatrix}$

Ví dụ 2

Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}-1 & a & a\\ 1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Dễ thấy $A=-I_3+B\ ;B=\begin{pmatrix}0 & a & a\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Bằng phương pháp quy nạp ta chúng minh được

$B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & a & a\\ 0 & -a & -a\end{pmatrix};\quad B^k=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, k\geq 3$

Khi đó ta được $A^n=\left(-I_3+B\right)^n=C_n^0(-1)^n I_3+C_n^1(-1)^{n-1}B+C_n^2(-1)^{n-2}B^2+....+C_n^n B^n$

$=C_n^0(-1)^n I_3+C_n^1(-1)^{n-1}B+C_n^2(-1)^{n-2}B^2$

$$=(-1)^n\begin{pmatrix}1 & -na & -na\\ -n & 1+\dfrac{n(\mathrm{n}-1)}{2}a & \dfrac{n(\mathrm{n}-1)}{2}a\\ n & -\dfrac{n(\mathrm{n}-1)}{2}a & 1-\dfrac{n(\mathrm{n}-1)}{2}a\end{pmatrix}$$

Ví dụ 3

Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}2006 & 1 & -2006\\ 2005 & 1 & -2006\\ 2005 & 1 & -2005\end{pmatrix}$, hãy xác định tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận $S=I+A^2+A^3+A^4+...+A^n$

Giải

Dễ thấy $A = I_3 + B\ ; B = \begin{pmatrix} 2005 & 1 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2006 \\ 2005 & 1 & -2006 \end{pmatrix}$

Ta tính được $B^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k \geq 2$

$A^n = \left(I_3 + B\right)^n = C_n^0 I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2 + ... + C_n^n B^n = I_3 + nB$

Khi đó

$S = I + A^2 + A^3 + A^4 + ... + A^n = I + (\mathrm{I} + \mathrm{B}) + (\mathrm{I} + 2\,\mathrm{B}) + ... + (\mathrm{I} + \mathrm{nB})$

$= (\mathrm{n}+1)\,\mathrm{I} + (1+2+3+...+\mathrm{n})\,\mathrm{B} = (\mathrm{n}+1)\,\mathrm{I} + \dfrac{n(\mathrm{n}+1)}{2} B = 3(\mathrm{n}+1) + 0$

1.4 Tìm ma trận luỹ linh bằng phương pháp chéo hóa ma trận

1.4.1 Thuật toán chéo hóa ma trận

Cho ma trận $A \in M_n$ Để chéo hóa ma trận A (nếu có thể) ta có thuật toán chéo hóa như sau:

Lập phương trình đặc trưng **det(**$A - \lambda I_n$ **)** $= 0$ và giải phương trình để tìm các giá trị riêng.

+ Nếu A không có giá trị riêng nào thì A không chéo hóa được.

+ Giải sử A có r giá trị riêng đôi một phân biệt λ_1 , λ_2 , ..., λ_r tương ứng với số bội là n_1 , n_2 ,..., n_r . Nếu từ các giá trị riêng ta tìm được đủ n véc tơ riêng độc lập tuyến tính thì ma trận A là chéo hóa được, (trong trường hợp ngược lại không đủ n véc tở riêng độc lập tuyến tính thì ma trận A không chéo hóa được).

1.4.2 Phương pháp

Giả sử $A \in M_n$ và A là ma trận chéo hóa được.

Bước 1: chéo hóa ma trận A. Khi đó $D = T^{-1}AT$ là ma trận chéo mà các phần tử trên đường chéo chính lần lượt là các giá trị riêng của A.

Bước 2: $A^n = AA...A = TAT^{-1}.TAT^{-1}...\mathrm{T}AT^{-1} = TD^nT^{-1}$

1.4.3 Các ví dụ:

Ví dụ 1

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Dễ dàng tìm được $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -4$

Với các véc tơ riêng tương ứng là

$u_1 = a(1,0,3); u_2 = b(-3,-2,1); u_3 = c(-3,5,1)$

Khi đó ta thu đươc $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^n = TD^nT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & (-4)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-7}{20} & \frac{-3}{10} & \frac{9}{20} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{4} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{-1}{10} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-7}{20} + \frac{9}{4}3^n - \frac{9}{10}(-4)^n & \frac{3}{10} + \frac{3}{2}3^n - \frac{9}{10}(-4)^n & \frac{3}{10} - \frac{3}{14}3^n - \frac{3}{35}(-4)^n \\ -\frac{3}{2}3^n + \frac{3}{2}(-4)^n & -3^n + 2(-4)^n & \frac{1}{2}3^n - \frac{1}{2}(-4)^n \\ -\frac{21}{20} + \frac{3}{4}3^n + \frac{3}{10}(-4)^n & \frac{-9}{10} + \frac{1}{2}3^n + \frac{2}{5}(-4)^n & \frac{27}{20} - \frac{1}{4}3^n - \frac{1}{10}(-4)^n \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 & \frac{-5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \end{pmatrix}$, tính A^{2014}

Giải

Dễ dàng tìm được $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$

với các véc tơ riêng tương ứng là: $u_1 = a(2 - \mathrm{i}, 1); u_2 = b(2 + \mathrm{i}, 1).$

Khi đó ta thu đươc $D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$; $T = \begin{pmatrix} 2-i & 2+i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{-\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{-\pi}{6}) & 0 \\ 0 & \cos(\frac{\pi}{6}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow D^{2014} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{pmatrix}.$$

Vậy ta thu được $A^{2014} = TD^{2014}T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \sqrt{3} & \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

1.5 Tìm ma trận luỹ linh bằng phương pháp đưa ma trận về dạng chuẩn tắc Jordan

1.5.1 Khối Jordan

Ta gọi ma trận sau đây là một khối Jordan

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

Nếu cấp của khối Jordan bằng 1 ta qui ước: $J(\lambda) = \lambda$

Ta gọi ma trận sau đây là ma trận Jordan, trong $J(\lambda_1)...J(\lambda_n)$ là các khối Jordan.

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

1.5.2 Định lí

Cho f là toán tử tuyến tính tùy ý. Giả sử đa thức cực tiểu của nó có $J(\lambda) = \lambda$ trong đó p_1 ,..., $p_r \geq 1$ và g_1,..., g_r là những đa thức bất khả quy khác nhau. Khi đó, f có ma trận biểu diễn là ma trận Jordan. Hơn nữa, mọi ma trận vuông A đều có dạng chuẩn tắc Jordan và dạng chuẩn tắc Jordan xác định duy nhất, nếu không kể thứ tự các khối Jordan. Cụ thể nếu kí hiệu S_{ik} là các khối Jordan của đa thức $g_i^k (\mathrm{i} = \overline{1,r}, 1 \leq k \leq p_i)$ xuất hiện trong dạng chuẩn tắc Jordan thì:

$$S_{ik} = \frac{1}{\deg g_i}\left[rankg_i^{k-1}(\mathrm{A}) - 2rankg_i^{k}(\mathrm{A}) + rankg_i^{k+1}(\mathrm{A})\right]$$

là các khối Jordan. trận sau đây là ma trận Jordan, trong $J(\lambda_1)...J(\lambda_n)$ là các khối Jordan.

1.5.3 Thuật toán tìm dạng chuẩn tắc Jordan của ma trận vuông *A*

Bước 1: Tính đa thức đặc trưng và phân tích ra các nhân tử bất khả qu

Giả sử: $f_A(\lambda) = g_1^{m_1} \ldots g_r^{m_r}$

Bước 2: Tìm đa thức cực tiểu dưới dạng $g_A(\lambda) = g_1^{p_1} \ldots g_r^{p_r}$

Trong đó $1 \le p_1 \le m_1, \ldots, 1 \le p_r \le m_r$

Bước 3: Với mỗi nhân tử g_i sử dụng định lí 1.5.2 để tính số các khối Jordan liên kết với g_i^k

Bước 4: Lập các khối Jordan liên kết với tất cả đa thức g_i^k có $S_{ik} > 0$, rồi ghép chúng lại với nhau, mỗi khối xuất hiện S_{ik} lần, để được ma trận đường chéo khối. Đó chính là dạng chuẩn tắc Jordan cần tìm.

Chú ý: Trong một số trường hợp, không cần thực hiện bước 3 mà chỉ cần dựa vào hai chú ý sau là ta có thể tìm được số các khối Jordan.

- Với mỗi i= 1, 2,3…,r có ít nhất một khối Jordan liên kết với $g_i^{p_i}$
- Với mỗi i= 1, 2,3…,r tổng các cấp của khối Jordan liên kết với $g_i^{p_i}$ đúng bằng m_i.

1.5.4 Phương pháp

V là không gian véc tơ hữu hạn chiều trên trường số thực

Giả sử $A \in M_n, f \in End(\text{V}), \text{S}'$ là cơ sở chính tắc của V và $[f]_{S'} = A.$

Bước 1: Tìm ma trận J là dạng chính tắc Jordan cảu ma trận A.

Bước 2: Tìm cơ sở S của V sao cho $[f]_S = J.$

Bước 3: gọi P là ma traanh chuyển từ cơ sở S' sang S. Suy ra các cột trong ma trận P là các véc tơ trong cơ sở S.

Khi đó, $J = P^{-1}AP \Rightarrow A = PJP^{-1} \Rightarrow A^n = PJ^nP^{-1}$.

1.5.5 Các ví dụ

Ví dụ 1

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} 5 & -17 & 25 \\ 2 & -9 & 16 \\ 1 & -5 & 9 \end{pmatrix}$, tính A^n

Giải

Giả sử S' là cơ sở chính tắc của $R^3, f \in End(\text{R}^3)$ và $[f]_{S'} = A.$

Đa thức của trưng của A: $f_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

Đa thức cực tiểu của A: $g_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = g_1 g_2^2$

$$g_1 = \lambda - 1 \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{1}\left[rankI_3 - 2rank(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3) + \mathrm{rank}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)^2 \right] = 3 - 2.2 + 2 = 1.$$

$$g_2 = \lambda - 2 \Rightarrow S_{22} = \frac{1}{1}\left[rank(\mathrm{A} - 2\,\mathrm{I}_3) - 2rank(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)^2 + \mathrm{rank}(\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)^2 \right] = 1.$$

Khi đó dạng chuẩn tắc của Jordan của ma trận A là:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Gọi $S = \{\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2, \mathrm{u}_3\}$ là cơ sở của R^3 sao cho: $[f]_S = J \Rightarrow \begin{cases} f(\mathrm{u}_1) = \mathrm{u}_1 \\ f(\mathrm{u}_2) = 2\,\mathrm{u}_2 \\ f(\mathrm{u}_3) = \mathrm{u}_2 + 2u_3 \end{cases}$

trong đó, $\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2$ lần lượt là các vec tơ riêng ứng với các giá trị riêng $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Tính toán ta thu được $u_1 = (11,7,3)$; $\mathrm{u}_2 = (3,2,1)$.

Giả sử $\mathrm{u}_3 = (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$ với $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c} \in R$

Ta có: $[f]_{S'} = A, (u_i)_{S'} = u_i, i = \overline{1,3}$ và $f(\mathrm{u}_3) = \mathrm{u}_2 + 2u_3$

Suy ra

Chọn c=0 suy ra $\mathrm{u}_3 = (1,0,0)$

Gọi P là ma trận chuyển từ cơ sở S’ sang S suy ra $P = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 7 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Do đó $J^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

Vậy $A^n = \begin{pmatrix} -4 + 3.2^n + 3n2^{n-1} & 19 - 15.2^n - 6n2^{n-1} & -26 + 24.2^n + 3n2^{n-1} \\ -4 + 2.2^n + 2n2^{n-1} & 15 - 10.2^n - 4n2^{n-1} & -18 + 16.2^n + 2n2^{n-1} \\ -2 + 2^n + n2^{n-1} & 7 - 5.2^n + 2n2^{n-1} & -8 + 8.2^n + n2^{n-1} \end{pmatrix}$.

1.6 Tìm ma trận luỹ linh bằng phương pháp sử dụng định lí Cayley - Hamilton

1.6.1 Định lí

Cho A là ma trận vuông cấp n. Đa thức đặc trưng của A bậc n là định thức $P_A(\lambda) = |A - \lambda I_n|$. Khi đó $P_A(\mathrm{A}) = 0$.

1.6.2 Phương pháp

Cho $f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0$, tính $f(A)$ với A là ma trận vuông cấp k.

Bước 1: Lập đa thức đặc trưng của A và tìm các giá trị riêng của A. Giả sử A có λ_i giá trị riêng tương ứng với bội α_i , $i = \overline{1, r}$

Khi đó: $P_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2}\ldots(\lambda - \lambda_r)^{\alpha_r}$.

Bước 2: Lấy $f(\lambda)$ chia cho $P_A(\lambda)$ giả sử được thương $Q(\lambda)$ dư $R(\lambda)$

Khi đó: $f(\lambda) = P_A(\lambda)\, Q(\lambda) + R(\lambda)$

$\Rightarrow f(A) = P_A(A)Q(A) + R(A) = R(A)$

Vì theo định lí Cayley-Hamilton $P_A(A) = 0$

Cách tìm đa thức dư $R(\lambda)$

Ta có: $0 \le \deg R(\lambda) \le n - 1$

Giả sử: $R(\lambda) = b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} \ldots + b_1\lambda + b_0$

Các hệ số $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} f(\lambda_i) = \mathrm{R}(\lambda_i),\ i = \overline{1, r} \\ f^{(j_1)}(\lambda_i) = \mathrm{R}^{(j_1)}(\lambda_i),\ j_1 = \overline{1, \alpha_1 - 1} \\ \ldots \\ f^{(j_r)}(\lambda_i) = \mathrm{R}^{(j_r)}(\lambda_i),\ j_r = \overline{1, \alpha_r - 1} \end{cases}$$

Chú ý Cách tính $f(\mathrm{x}) = 0$ là trường hợp đặc biệt của tính $f(\mathrm{A})$ với $f(\lambda) = \lambda^k \Rightarrow A^k = f(\mathrm{A})$.

1.6.3 Các ví dụ:

Ví dụ 1

Cho ma trận $A=\begin{pmatrix}4 & -5 & 2\\ 5 & -7 & 3\\ 6 & -9 & 4\end{pmatrix}$, tính $f(\mathrm{A})$ biết

$f(x)=2009x^{2009}-2008x^{2008}+...+x$

Giải

Đa thức đặc trưng của A: $P_A(\mathrm{x})=-\mathrm{x}^2(\mathrm{x}-1)$

Lấy $f(\mathrm{x})$ chia cho $P_A(\mathrm{x})$ giả sử được thương $Q(\mathrm{x})$ dư R(x):

Khi đó: $f(\mathrm{x})=\mathrm{P}_A(\mathrm{x})\mathrm{Q}(\mathrm{x})+\mathrm{R}(\mathrm{x})$.

Giả sử $R(\mathrm{x})=\mathrm{ax}^2+bx+c$

Ta có $\begin{cases}f(0)=R(0)\\ f(1)=R(1)\\ f'(0)=R'(0)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ a+b+c=1005\\ b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=0\\ a=1004\\ b=1\end{cases}$

Suy ra $R(\mathrm{x})=1004\,\mathrm{x}^2+x$

Theo định lý Caylet- Hamilton thì $P_A(\mathrm{A})=0$.

Do đó $f(\mathrm{A})=\mathrm{R}(\mathrm{A})=1004A^2+A=\begin{pmatrix}3016 & -3017 & 1006\\ 3017 & -3019 & 1007\\ 3018 & -3021 & 1008\end{pmatrix}$.

Phần 2: Các ứng dụng

Bài 1.1

Tính A^n, biết

a) $A=\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, b) $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}$, c) $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a\end{pmatrix}$,

d) $A=\begin{pmatrix}a & 0 & ... & 0\\ 0 & a & ... & 0\\ ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & ... & a\end{pmatrix}$

Bài 1.2

Tìm các số thực sao cho $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Bài 1.3 Cho λ là giá trị riêng của $A \in \mathrm{M}_n(K)$, $\alpha \in K$ và $k \in \mathbb{N}$. Chứng minh rằng

a) $\alpha\lambda$ là giá trị riêng của ma trận αA.

b) λ^k là giá trị riêng của ma trận A^k.

c) $\lambda + \alpha$ là giá trị riêng của ma trận $A + \alpha I$.

d) $f(\lambda)$ là giá trị riêng của ma trận đa thức $f(A)$.

Bài 1.4 Cho λ là giá trị riêng của $A \in \mathrm{M}_n(K)$. Chứng minh rằng

a) Nếu A khả nghịch thì λ^{-1} là giá trị riêng của ma trận A^{-1}.

b) Nếu A khả nghịch thì $\lambda + \lambda^{-1}$ là giá trị riêng của ma trận $A + A^{-1}$.

Bài 1.5 Cho A là ma trận vuông cấp n trên K và $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ là các giá trị riêng của nó. Chứng minh rằng

a) $\det(\alpha A) = \alpha^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.

b) $\det A^k = \lambda_1^k \lambda_2^k \cdots \lambda_n^k$.

c) $\det(A + \alpha I) = (\lambda_1 + \alpha)(\lambda_2 + \alpha) \cdots (\lambda_n + \alpha)$.

d) $\det f(A) = f(\lambda_1) f(\lambda_2) \cdots f(\lambda_n)$.

Bài 1.6 Cho ma trận A trên trường số thực $\mathbb{R}$ như sau

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 5 & 7 \\ 8 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

a) Tính $\det A$

b) Tính $\det(A - \alpha I_4)$ với $\alpha \in \mathbb{R}$.

c) Tính $\det f(A)$ biết rằng $f(x) = x^n + x^2 - 1$.

PHẦN KẾT LUẬN

Báo cáo đã nêu được Các phương pháp tìm ma trận luỹ linh và bài tập liên quan đến ma trận vuông. Cách tính lũy thừa ma trận, chéo hóa ma trận, tìm dạng chuẩn tắc Jordan của ma trận bằng phần mền Maple. Ngoài ra, một số bài toán trong đại số tuyến tính có thể quy về giải trong số phức và ngược lại.

Qua báo cáo này tôi học hỏi, tích lũy thêm được nhiều kiến thức về Đại số tuyến tính. Nếu điều kiện cho phép tôi sẽ nghiên cứu sâu về ma trận vuông nhằm cung cấp thêm tài liệu tham khảo cho sinh viên đặc biệt là những bạn thi Olympic Toán học sinh viên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Thanh Bình – Nguyễn Hoàng Xinh (2006), *Giáo trình Đại số tuyến tính*, Đại học Cần thơ.

[2] Trần Lưu Cường (2000), *Toán Olympic cho sinh viên tập II*, Nhà xuất bản giáo dục.

[3] Lê Tuấn Hoa (2005), *Đại số tuyến tính qua các ví dụ và bài tập*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

[4] Hội toán học Việt Nam (2012), *Các đề dự tuyển và đáp án Olympic toán học sinh viên lần thứ XX – 2012*, Hà Nội.

[5] Hội toán học Việt Nam (2013), *Kỷ yếu kỳ thi Olympic toán sinh viên lần thứ XXI*, Đại học Duy Tân, Đà Nẵng.

[6] Hoàng Việt Long (2013), *Chuyên đề một số phương pháp tính lũy thừa của ma trận vuông*, Đại học giao thông vận tải.

[7] Nguyễn Văn Mậu (2006), *Các đề thi Olympic toán sinh viên toàn quốc*, Nhà xuất bản giáo dục, Hà Nội.

[8] Ngô Việt Trung (2001), *Giáo trình Đại số tuyến tính*, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà Nội, Hà Nội.

[9] Nguyễn Hoàng Xinh (2005), *Tài liệu bồi dưỡng Toán Olympic sinh viên phần Đại số*, Đại học Cần thơ, Cần Thơ.

[10] Nguyễn Hoàng Xinh (2005), *Bài giảng Maple*, Đại học Cần Thơ, Cần Thơ.

[11]Jean – Marie Monier (2006), *Giáo trình toán – tập 6 Đại số 2*, Nhà xuất bản