BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ĐỊNH LÝ DIWORTH VÀ ỨNG DỤNG

CN. Hà Hữu Cao Trình

Hà Nội, 6/2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ĐỊNH LÝ DIWORTH VÀ ỨNG DỤNG

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 6/2024

MỤC LỤC

1. MỞ ĐẦU

Trong thực tế có nhiều bài toán được quy về bài toán trong tập hợp có quan hệ thứ tự. Vì vậy mà lý thuyết tập hợp sắp thứ tự ra đời, và nó cũng có liên hệ chặt chẽ với lí thuyết đồ thị. Định lý Diworth là một định lý quan trọng trong lý thuyết tập hợp sắp thứ tự.

Báo cáo này cung cấp kiến thức cơ bản về lý thuyết đồ thị, về lý thuyết tập hợp sắp thứ tự một phần, nêu một số khái niệm cơ bản và một số định lý quan trọng. Báo cáo cũng trình bày một số ví dụ về ứng dụng thực tế của lý thuyết tập hợp sắp thứ tự nói chung và định lý Diworth nói riêng.

Nội dung được chia thành 2 phần: Phần đầu giới thiệu về những kiến thức cơ bản về tập hợp sắp thứ tự một phần và phần sau đề cập tới định lý Diworth và các định lý quan trọng khác, cùng những ứng dụng điển hình trong thực tế.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

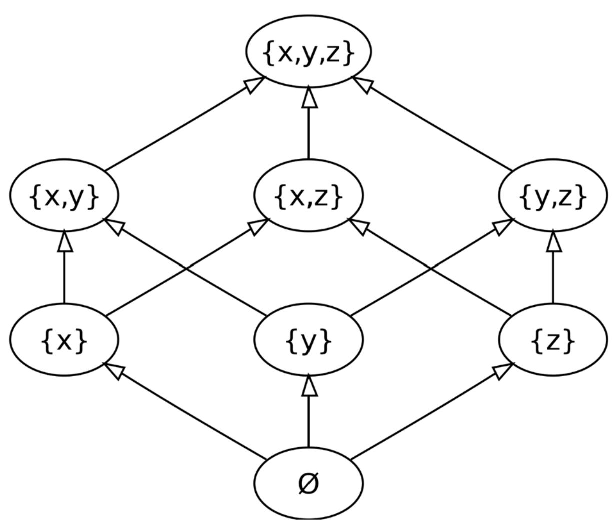
2.1. Tập hợp sắp thứ tự một phần

Trong toán học, đặc biệt là trong lý thuyết thứ tự, một tập hợp sắp thứ tự một phần (hay còn gọi là tập hợp sắp thứ tự bộ phận, hay tập hợp sắp thứ tự riêng phần) bao gồm một tập hợp cùng với một quan hệ hai ngôi có tính phản xạ (mỗi phần tử được so sánh với chính nó), tính phản đối xứng (giữa hai phần tử có nhiều nhất một cách so sánh) và tính bắc cầu (ta có thể so sánh theo kiểu bắc cầu).

Từ "một phần" hay "bộ phận" có nghĩa là: không phải mọi cặp phần tử đều so sánh được với nhau. Tức là, có một số cặp phần tử ta không biết phần tử nào đứng trước trong tập sắp thứ tự một phần. Do đó, quan hệ thứ tự riêng phần là dạng tổng quát của quan hệ thứ tự toàn phần, quan hệ mà mọi cặp trong tập hợp đều so sánh được với nhau.

Định nghĩa. Quan hệ thứ tự một phần là một khái niệm trong so sánh trong đó hai phần tử x và y chỉ ở một trong bốn quan hệ sau: hoặc $x < y$, hoặc $x = y$, hoặc $x > y$, hoặc x và y không so sánh được với nhau.

Tập hợp đi cùng quan hệ thứ tự một phần được gọi là tập hợp sắp thứ tự một phần. Tập hợp sắp thứ tự một phần thường được vẽ qua biểu đồ Hasse.



Quan hệ thứ tự một phần

Quan hệ thứ tự một phần là quan hệ thuần nhất có tính bắc cầu và phản đối xứng. Có hai định nghĩa thường gặp: quan hệ thứ tự một phần phản xạ và không phản xạ, được gọi là "không nghiêm ngặt" và "nghiêm ngặt" tương ứng. Hai định nghĩa này có thể đặt trong ương ứng một-một, trong đó mỗi quan hệ thứ tự một phần nghiêm ngặt có duy nhất một quan hệ thứ tự một phần không nghiêm ngặt tương ứng và ngược lại cũng thế.

Quan hệ thứ tự một phần không nghiêm ngặt

Quan hệ thứ tự một phần không nghiêm ngặt (hoặc quan hệ thứ tự một phần yếu) là quan hệ thuần nhất ≤ có tính phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu trên tập hợp, nghĩa là với mọi a, b, c phải thỏa mãn:

1. Tính bắc cầu: $a \leq a$ tức mỗi phần tử có quan hệ với chính nó
2. Tính phản đối xứng: nếu $a \leq b$ và $b \leq a$ thì $a = b$ tức không có hai phần tử phân biệt nào đứng trước cái còn lại.

3. Tính bắc cầu: nếu $a \leq b$ và $b \leq c$ thì $a \leq c$.   .

Quan hệ thứ tự một phần không nghiêm ngặt còn là tiền thứ tự phản đối xứng.

Quan hệ thứ tự một phần nghiêm ngặt

Quan hệ thứ tự một phần nghiêm ngặt (hoặc quan hệ thứ tự một phần mạnh) là quan hệ thuần nhất < có tính hoàn toàn không phản xạ, bất đối xứng và bắc cầu trên tập hợp P; nghĩa là nó phải thỏa mãn các điều kiện sau với mọi a, b, c:

1. Tính hoàn toàn không phản xạ: không $a < a$ tức không có phần tử nào có quan hệ với chính nó.

2. Tính bất đối xứng: nếu $a < b$ thì không $b < a$.   .

3. Tính bắc cầu: nếu $a < b$ và $b < c$ thì $a < c$.   .

Tính hoàn toàn không phản xạ và tính bắc cầu suy ra tính bất đối xứng. Tính bất đối xứng thì sẽ suy ra tính hoàn toàn không phản xạ. Nói cách khác, quan hệ bắc cầu có tính bất đối xứng khi và chỉ khi nó hoàn toàn không phản xạ. Do vậy, định nghĩa giữ nguyên kể cả khi bỏ đi điều kiện hoàn toàn không phản xạ hoặc điều kiện bất đối xứng (nhưng không thể bỏ cả hai). Quan hệ thứ tự một phần nghiêm ngặt còn được gọi là tiền thứ tự nghiêm ngặt.

Mối liên hệ giữa quan hệ thứ tự một phần nghiêm ngặt và không nghiêm ngặt

Quan hệ một phần nghiêm ngặt và không nghiêm ngặt trên cùng tập hợp P khá gần gũi với nhau. Quan hệ thứ tự một phần không nghiêm ngặt $\leq$ có thể biến đổi sang dạng nghiêm ngặt bằng cách loại bỏ tất cả quan hệ dưới dạng $\alpha \leq a$ tức quan hệ nghiêm ngặt là tập hợp $< := \leq \Delta_p$ trong đó $\Delta_P = \{(p,p): p \in P\}$ là quan hệ đơn vị trên $P \times P$ và $\setminus$ ký hiệu hiệu của hai tập hợp. Ngược lại, quan hệ thứ tự một phần nghiêm ngặt $<$ trên P có thể đổi sang dạng không nghiêm ngặt bằng cách hợp thêm các quan hệ dưới dạng đó; tức là, $\leq := \Delta_P \cup <$ là quan hệ thứ tự một phần không nghiêm ngặt.

Do đó, nếu $\leq$ là quan hệ thứ tự một phần, thì quan hệ thứ tự một phần nghiêm ngặt $<$ là hạt nhân không phản xạ được cho bởi: $a < b$ nếu $a \leq b$ và $a \neq b$. Ngược lại, nếu $<$ là quan hệ thứ tự một phần nghiêm ngặt thì quan hệ thứ tự một không phần nghiêm ngặt $\leq$ là bao đóng phản xạ được cho bởi: $a \leq b$ nếu $a < b$ hoặc $a = b$.

Quan hệ đối ngẫu

Đối ngẫu (hoặc *đối ngược*) R^{op} của quan hệ thứ tự một phần R được định nghĩa bằng cách đặt R^{op} là quan hệ ngược của R, tức là $xR^{op}y$ khi và chỉ khi yRx. Đối ngẫu của quan hệ thứ tự một phần không nghiêm ngặt là quan hệ thứ tự một phần không nghiêm ngặt, tương tự như vậy đối với đối ngẫu của quan hệ thứ tự một phần nghiêm ngặt.

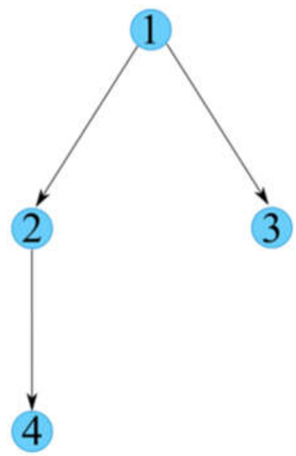
Ta có thể coi tập hợp sắp thứ tự một là bộ ba $(P, \leq, <)$ trong đó $\leq$ là quan hệ thứ tự một phần không nghiêm ngặt trên P , $<$ là quan hệ một phần nghiêm ngặt tương ứng trên P (hạt nhân không phản xạ của của $\leq$), $\geq$ là đối ngẫu của $\leq$, và $>$ là đối ngẫu của $<$.

Bất kỳ một trong bốn quan hệ thứ tự một phần $\leq, <, \geq, >$ trên cùng một tập cho trước sẽ xác định duy nhất ba quan hệ còn lại. Do đó, ta có thể viết $(P, \leq)$ hoặc $(P, <)$ và giả định rằng các quan hệ còn lại được định nghĩa tương tự.

2.2. Các ví dụ

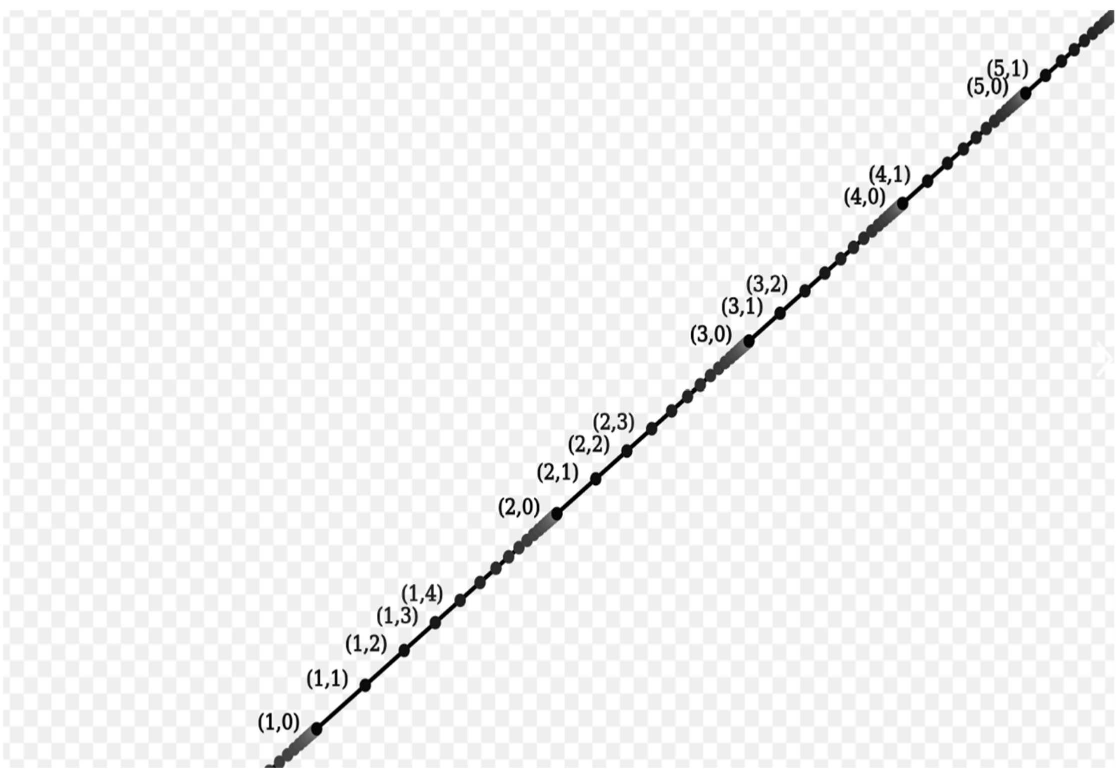
Các ví dụ của tập hợp sắp thứ tự một phần trong toán học bao gồm:

- Tập số thực, hoặc tổng quát hơn là bất kỳ tập có thứ tụ toàn phần, có quan hệ thứ tự nhỏ hơn hoặc bằng ≤, là tập sắp thứ tự một phần không nghiêm ngặt.
- Vẫn trên tập số thực R quan hệ chuẩn nhỏ hơn < là quan hệ thứ tự một phần nghiêm ngặt. Điều này cũng đúng với quan hệ lớn hơn > trên R. .
- Tập các tập con của tập cho trước (tập lũy thừa) sắp xếp theo quan hệ bao hàm.
- Tương tư như vậy đối với tập các dãy sắp xếp theo dãy con và tập các xâu sắp thứ tự theo xâu con.
- Tập hợp các số tự nhiên cùng quan hệ chia hết.
- Tập đỉnh của đồ thị có hướng không chu trình xếp thứ tự theo tính chạm được.
- Tập các không gian con của không gian vectơ xếp thứ tự theo phép bao hàm.
- Cho tập hợp X và tập sắp thứ tự một phần P, không gian hàm chứa mọi hàm từ X đến P, trong đó $f \leq g$ khi và chỉ khi $f(x) \leq g(x)$ với mọi
- Tập các sự kiện trong tương đối hẹp và trong đa số trường hợp của[b] tương đối rộng, trong đó cho hai sự kiện X và Y, $X \leq Y$ khi và chỉ khi Y nằm trong nón ánh sáng của X. Sự kiện Y chỉ có thể là hệ quả của X khi $X \leq Y$.
- Một ví dụ khác thường gặp trong ngoài đời là tập các con người sắp xếp theo thứ tự phả hệ. Một số cặp người có thể có quan hệ tổ tiên-con cháu nhưng cũng có một số cặp người không so sánh với nhau vì không ai trong cặp là con cháu của người kia.
- Đồ thị của tính chia hết của các số từ 1 dến 4. Tập hợp này sắp tự một phần nhưng không toàn phần vì có quan hệ từ 1 đến các số còn lại nhưng không có quan hệ nào từ số 2 đến số 3 hay từ số 3 đến số 4.

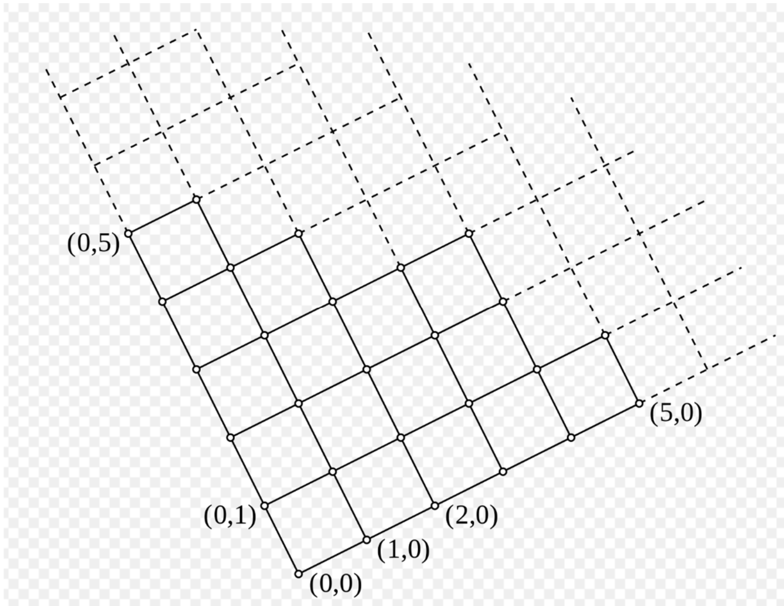


2.3. Thứ tự trên tích Descartes của tập sắp thứ tự một phần

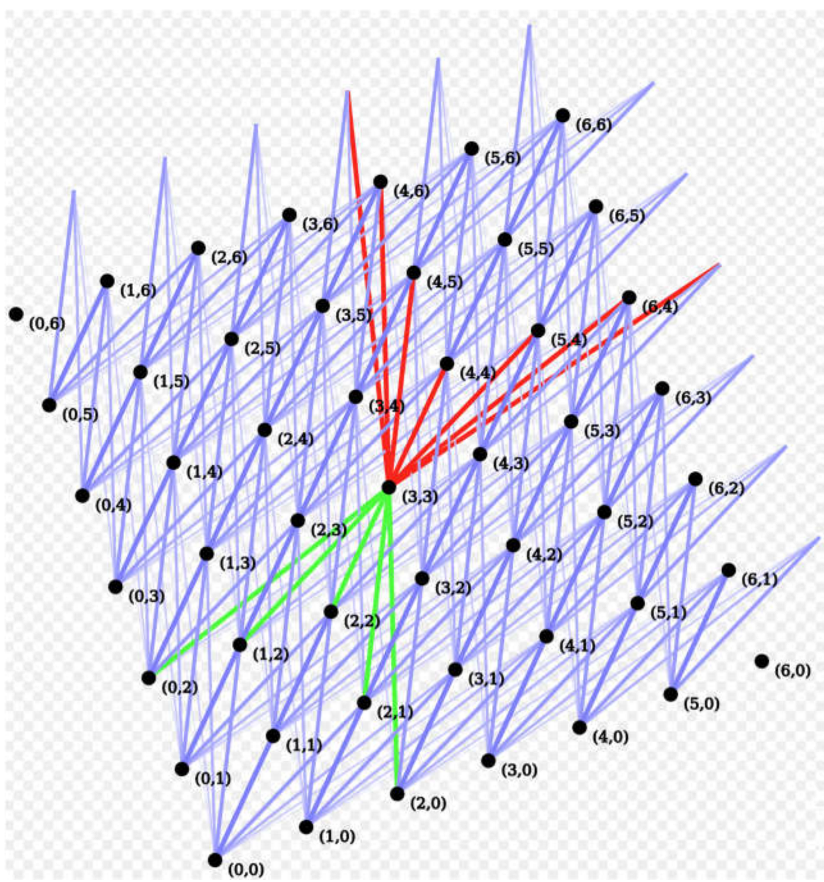
- Thứ tự từ điển: $(a, b) \leq (c, d)$ nếu $a < c$ hoặc ($a = c$ và $b \leq d$):



- Thứ tự tích: $(a, b) \leq (c, d)$ nếu $a \leq c$ và $b \leq d$:



- Bao đóng phản xạ của tích trực tiếp của hai thứ tự nghiêm ngặt tương ứng: $(a, b) \leq (c, d)$ nếu ($a < c$ và $b < d$) hoặc ($a = c$ và $b = d$).



Đây là ba trong nhiều quan hệ thứ tự một phần được định nghĩa trên tích đề các của hai tập hợp sắp thứ tự một phần, xếp thứ tự từ yếu đến mạnh. Cả ba đều có thể định nghĩa tương tự cho tích Descartes của nhiều hơn hai tập hợp.

Khi áp dụng cho các không gian vectơ có thứ tự trên cùng một trường, kết quả thu được trong mỗi trường hợp cũng là không gian vectơ có thứ tự.

2.4. Tổng của tập sắp tự thứ tự một phần

Một cách khác để hợp hai tập sắp thứ tự một phần (không giao nhau) là tổng thứ tự (hay còn gọi là tổng tuyến tính), $Z = X \oplus Y$, được định nghĩa trên hợp của hai tập X và Y theo quan hệ $a \leq_Z b$ khi và chỉ khi:

- $a, b \in X$ và $a \leq_X b$, hoặc
- $a, b \in Y$ và $a \leq_Y b$, hoặc
- $a \in X$ *và* $b \in Y$.

Nếu hai tập sắp thứ tự một phần đó có thứ tự tốt, thì tổng thứ tự của nó cũng vậy.

- a có quan hệ với b khi $a \leq b$. Điều này không có nghĩa b cũng có quan hệ với a, bởi vì quan hệ không cần phải đối xứng.
- a và b so sánh được với nhau nếu $a \leq b$ hoặc $b \leq a$. Ngược lại, thì chúng được gọi là không so sánh được với nhau.
- *Quan hệ toàn phần* hoặc *quan hệ tuyến tính* là quan hệ thứ tự một phần mà mọi cặp phần tử đều so sánh được với nhau.
- *Xích* là tập con có thứ tự toàn phần của tập sắp thứ tự một phần.
- *Phản xích* là tập con của tập sắp thứ tự một phần mà trong đó không có hai phần tử phân biệt nào so sánh được với nhau.
- Phần tử a được gọi là *nhỏ hơn nghiêm ngặt* với phần tử b, nếu $a \leq b$ và $a \neq b$.
- Phần tử *a được gọi là phủ bởi phần tử* b, được viết là $a \lessdot b$ (hoặc $a <: b$), nếu a nhỏ hơn nghiêm ngặt với b và không có phần tử thứ ba c nằm giữa chúng,

Nói cách khác: nếu đồng thời $a \le b$ và $a \neq b$, và $a \le c \le b$ là sai với với mọi c thỏa mãn $a \neq c \neq b$.

2.5. Cực trị

Phần tử lớn nhất và nhỏ nhất:

Phần tử g là *phần tử lớn nhất* nếu với mọi phần tử a thì $a \le g$. Phần tử m là *phần tử nhỏ nhất* nếu với mọi phần tử a thì $m \le a$. Tập sắp thứ tự một phần chỉ có một phần tử lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

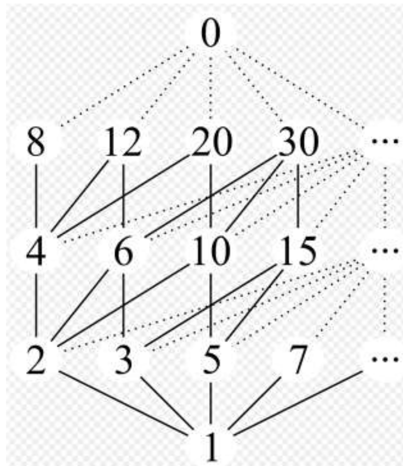
Phần tử tối đại và phần tử tối tiểu:

Phần tử g là *phần tử tối đại* nếu không có phần tử a sao cho $a > g$. Tương tự như vậy, phần tử m là *phần tử tối tiểu* nếu không có phần tử a sao cho $a < m$. Nếu tập sắp thứ tự một phần có phần tứ lớn nhất đó thì phần tử đó là phần tử tối đại duy nhất, nhưng nếu không thì có thể có nhiều hơn một phần tử tối đại, và tương tự như vậy cho phần tử nhỏ nhất và phần tử tối tiểu.

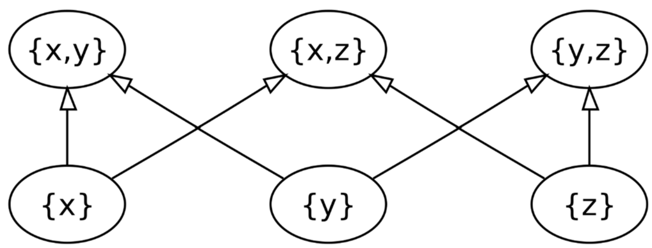
Cận trên và dưới:

Cho tập con A của P, phần tử x thuộc P là *cận trên* của A nếu $a \le x$, với mỗi phần tử a thuộc A. Cụ thể hơn, x không nhất thiết phải nằm trong A để trở thành cận trên của A. Tương tự như vậy, phần tử x thuộc P là *cận dưới* của A nếu $a \ge x$, với mỗi phần tử a thuộc A. Phần tử lớn nhất của P cũng là cận trên của P, và phần tử nhỏ nhất là cận dưới của P.

Ví dụ 1: Các số nguyên không âm được sắp thứ tự theo tính chia hết:



Ví dụ 2: Tập hợp sau có ba phần tử tối đại và ba phần tử tối tiểu, không có phần tử lớn nhất và nhỏ nhất:



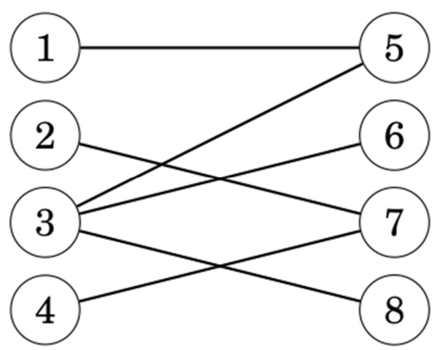
3. ĐỊNH LÝ DIWORTH VÀ ỨNG DỤNG

3.1. Cặp ghép cực đại

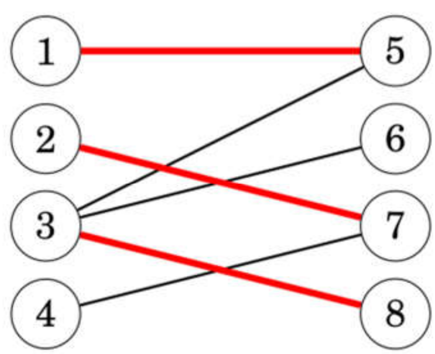
Bài toán cặp ghép cực đại yêu cầu tìm một tập kích thước tối đa các cặp ghép trong đồ thị vô hướng sao cho mỗi cặp được nối bằng 1 cạnh và mỗi đỉnh thuộc về nhiều nhất một cặp. Có các thuật toán đa thức để tìm cặp ghép cực đại trong đồ thị tổng quát. Tuy nhiên, trong các đồ thị hai phần, bài toán cặp ghép cực đại là dễ giải hơn, vì chúng ta có thể đưa nó vào bài toán luồng cực đại.

Tìm cặp ghép cực đại

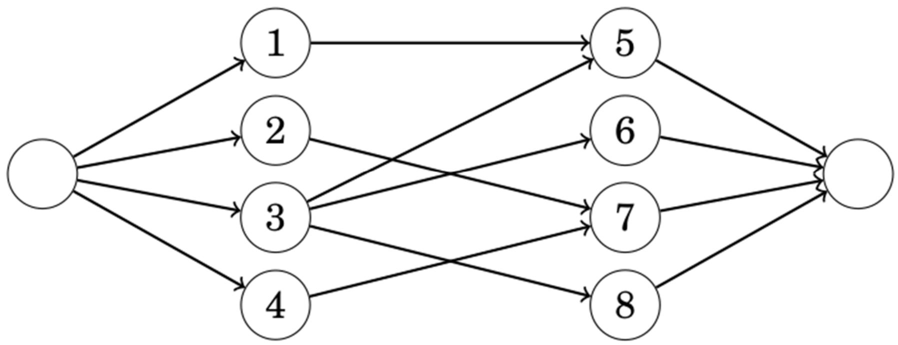
Các đỉnh của đồ thị phân đôi luôn có thể chia vào 2 nhóm sao cho tất cả các cạnh của đồ thị đi từ nhóm bên trái sang nhóm bên phải. Ví dụ, trong đồ thị phân đôi như sau, các nhóm là {1, 2, 3, 4} và {5, 6, 7, 8}.



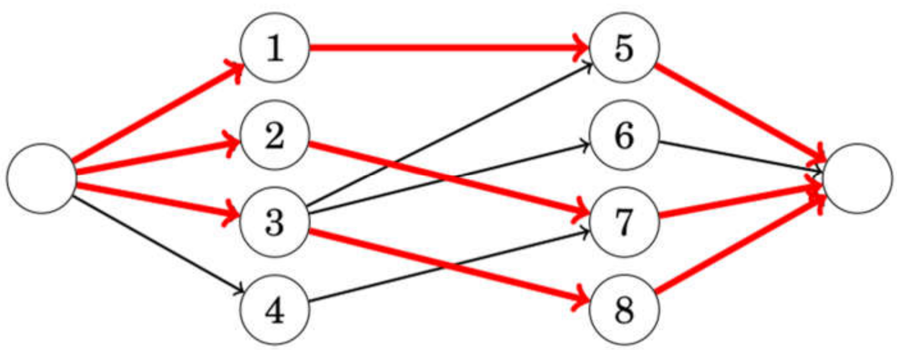
Kích thước cặp ghép cực đại của đồ thị là 3:



Chúng ta có thể đưa bài toán cặp ghép cực đại hai bên vào bài toán luồng cực đại bằng cách thêm 2 đỉnh mới vào đồ thị: source và sink. Chúng ta cũng thêm các cạnh từ source đến mỗi đỉnh bên trái và từ mỗi đỉnh bên phải đến sink. Sau đó, kích thước của luồng cực đại trong đồ thị bằng kích thước của cặp ghép tối đa trong đồ thị gốc. Việc điều chỉnh cho đồ thị trên là như sau:



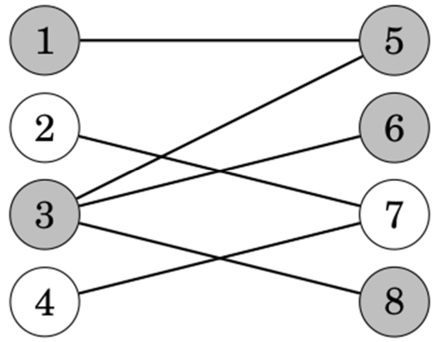
Luồng cực đại của đồ thị này là như sau:



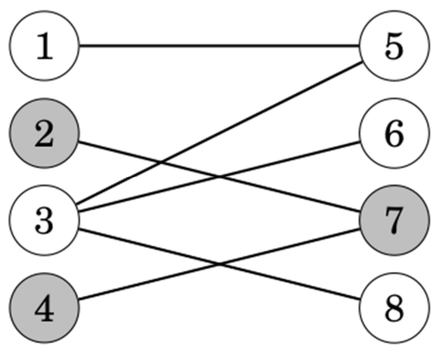
3.2. Ghép cặp hoàn hảo

Định lý Hall có thể được sử dụng để tìm đồ thị phân đôi có cặp ghép mà chứa tất cả các đỉnh bên trái và phải hay không. Nếu số lượng các đỉnh bên trái và phải là như nhau, định lý Hall nói rằng có thể xây dựng một cặp ghép hoàn hảo mà chứa tất cả các đỉnh của đồ thị.

Giả thiết rằng chúng ta muốn tìm cặp ghép mà chứa tất cả các đỉnh bên trái. Cho X là một tập bất kỳ các đỉnh bên trái và cho $f(X)$ là tập các đỉnh hàng xóm của chúng. Theo định lý Hall, cặp ghép mà chứa tất cả các đỉnh bên trái tồn tại với mỗi X, thỏa điều kiện $|X| \leq |f(X)|$. Chúng ta cùng áp dụng định lý Hall vào đồ thị ví dụ. Đầu tiên, cho $X = \{1, 3\}$ ta có $f(X) = \{5, 6, 8\}$:



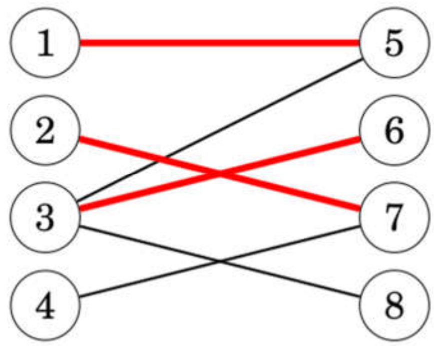
Điều kiện của định lý Hall thỏa mãn, vì $|X| = 2$ và $|f(X)| = 3$. Tiếp theo, cho $X = \{2, 4\}$ ta được $f(X) = \{7\}$.



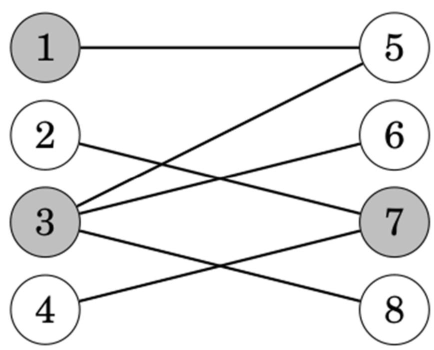
Trong trường hợp này, $|X| = 2$ và $|f(X)| = 1$, vì thế điều kiện định lý Hall không còn thỏa. Có nghĩa là nó không thể hình thành cặp ghép hoàn hảo với đồ thị. Kết quả này không lạ, vì ta biết rằng cặp ghép cực đại của đồ thị là 3 và không phải 4. Nếu điều kiện của định lý Hall không thỏa mãn, thì tập X giải thích tại sao chúng ta không thể hình thành một kết hợp như thế. Khi X chứa nhiều đỉnh hơn $f(X)$, không có cặp cho tất cả các đỉnh trong X. Ví dụ, trong đồ thị trên, cả đỉnh 2 và 4 đều kết nối tới đỉnh 7 là không thể.

3.3. Phủ đỉnh tối tiểu

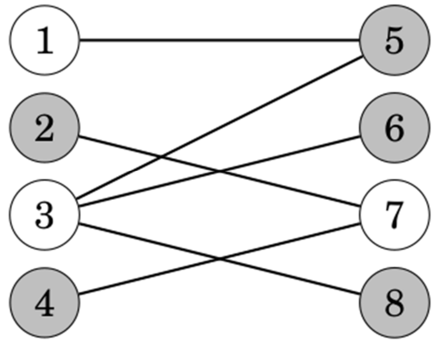
Phủ đỉnh tối tiểu của đồ thị là tập nhỏ nhất của các đỉnh sao cho mỗi cạnh của đồ thị có ít nhất một điểm cuối trong tập. Trong đồ thị tổng quát, việc tìm một phủ đỉnh tối tiểu là bài toán NP-hard. Tuy nhiên, nếu đồ thị là phân đôi, thì định lý Konig nói rằng kích thước của phủ đỉnh tối tiểu và kích thước của cặp ghép cực đại là luôn bằng nhau. Vì thế, chúng ta có thể tính toán kích thước của phủ đỉnh tối tiểu sử dụng thuật toán luồng cực đại. Chúng ta cùng xem xét đồ thị sau với kích thước cặp ghép cực đại là 3:



Bây giờ định lý Konig nói rằng kích thước của phủ đỉnh tối tiểu cũng là 3. Vì vậy phủ có thể được xây dựng như sau:



Các đỉnh mà không thuộc về phủ đỉnh tối tiểu tạo ra tập độc lập cực đại. Đây là một tập lớn nhất có thể mà không có 2 đỉnh nào trong tập có kết nối với nhau. Một lần nữa, việc tìm kiếm tập độc lập cực đại trong đồ thị tổng quát là bài toán NP-hard, nhưng trong đồ thị 2 phía, thì chúng ta có thể sử dụng định lý Konig để giải quyết bài toán hiệu quả. Trong đồ thị ví dụ, tập độc lập cực đại là như sau:

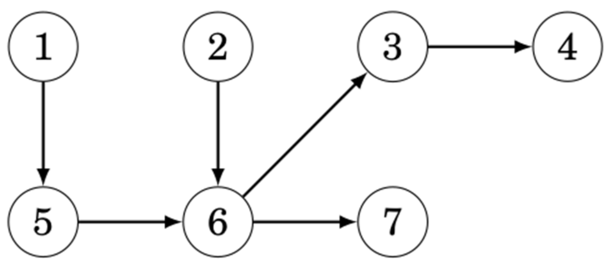


3.4. Định lý Dilworth

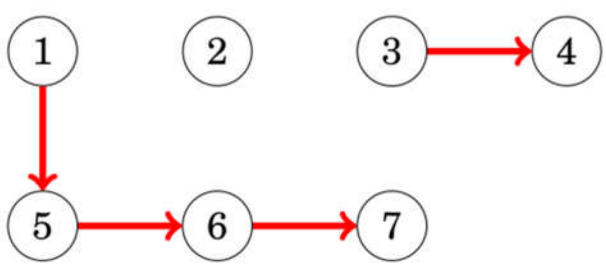
Phủ đường đi là một tập các đường đi trong đồ thị mà mỗi đỉnh của đồ thị thuộc về ít nhất một đường đi. Trong đồ thị có hướng không tuần hoàn, chúng ta có thể đưa bài toán tìm phủ đường đi tối thiểu thành bài toán tìm luồng cực đại trong đồ thị.

Phủ đường đi đỉnh rời nhau

Trong phủ đường đi đỉnh rời nhau, mỗi đỉnh thuộc về chính xác 1 đường đi. Ví dụ, xem xét đồ thị sau:

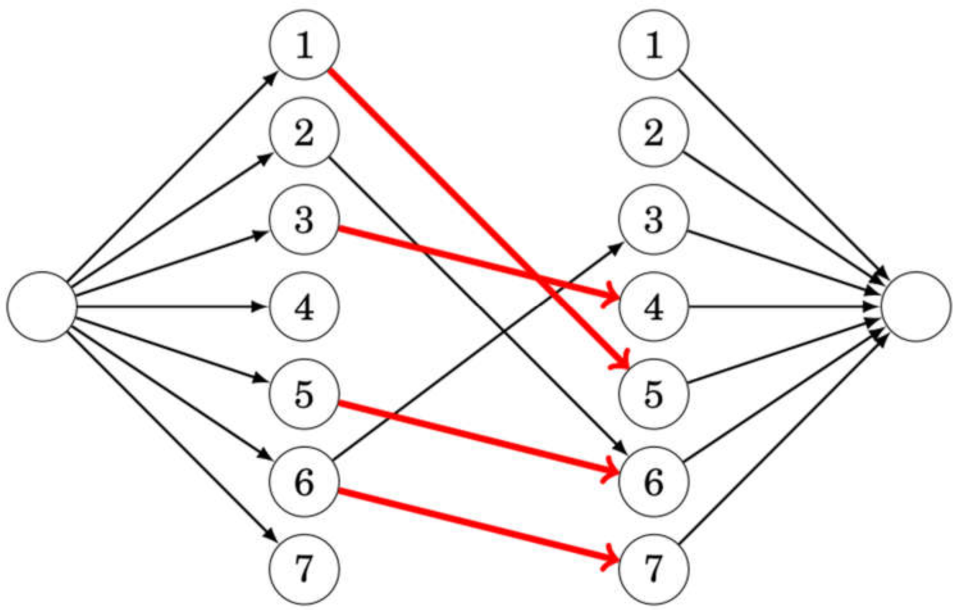


Phủ đường đi đỉnh rời nhau tối tiểu của đồ thị này chứa 3 đường đi. Ví dụ, chúng ta có thể chọn các đường đi sau:



Chú ý rằng một trong số các đường đi chỉ chứa đỉnh 2, vì thế có khả năng rằng đường đi không chứa bất kỳ cạnh nào. Chúng ta có thể tìm phủ đường đi đỉnh rời nhau tối tiểu bằng cách xây dựng một đồ thị cặp ghép khi mỗi đỉnh của đồ thị gốc được biễu diễn bằng 2 đỉnh: đỉnh bên trái và đỉnh bên phải. Có một cạnh từ đỉnh bên trái đến đỉnh bên phải nếu có một cạnh như thế trong đồ thị gốc. Ngoài ra, đồ thị cặp ghép chứa một source và sink, và có các cạnh từ source đến tất cả các đỉnh bên trái và từ tất cả các đỉnh bên phải đến sink.

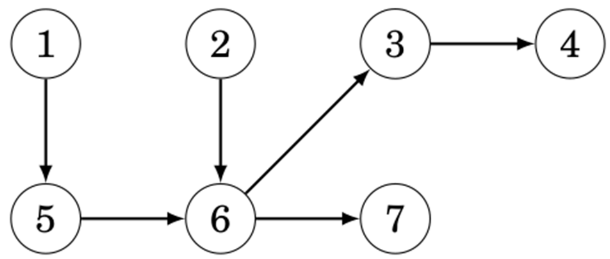
Cặp ghép cực đại trong đồ thị kết quả tương ứng với phủ đường đi đỉnh rời nhau tối tiểu trong đồ thị gốc. Ví dụ, đồ thị cặp ghép với đồ thị trên chứa cặp ghép tối đa là 4:



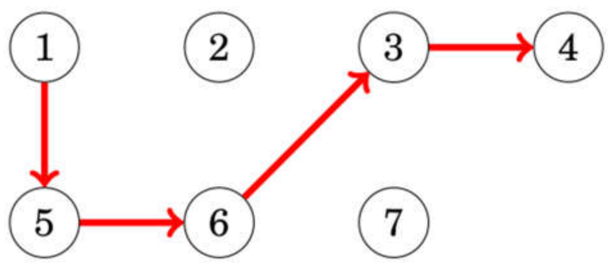
Mỗi cạnh trong cặp ghép cực đại của đồ thị cặp ghép tương ứng với một cạnh trong phủ đường đi đỉnh rời nhau tối tiểu của đồ thị gốc. Vì thế, kích thước của phủ đường đi đỉnh rời nhau tối tiểu là $n - c$, khi n là số lượng đỉnh trong đồ thị gốc và c là kích thước của cặp ghép cực đại.

Phủ đường đi tổng quát

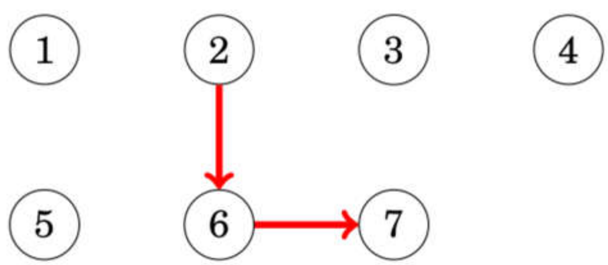
Phủ đường đi tổng quát là phủ đường đi mà một đỉnh có thể thuộc về nhiều hơn một đường đi. Phủ đường đi tổng quát tối tiểu có thể nhỏ hơn phủ đường đi đỉnh rời nhau tối tiểu, vì một đỉnh có thể được sử dụng nhiều lần hơn trong các đường đi. Xem xét lại đồ thị sau:



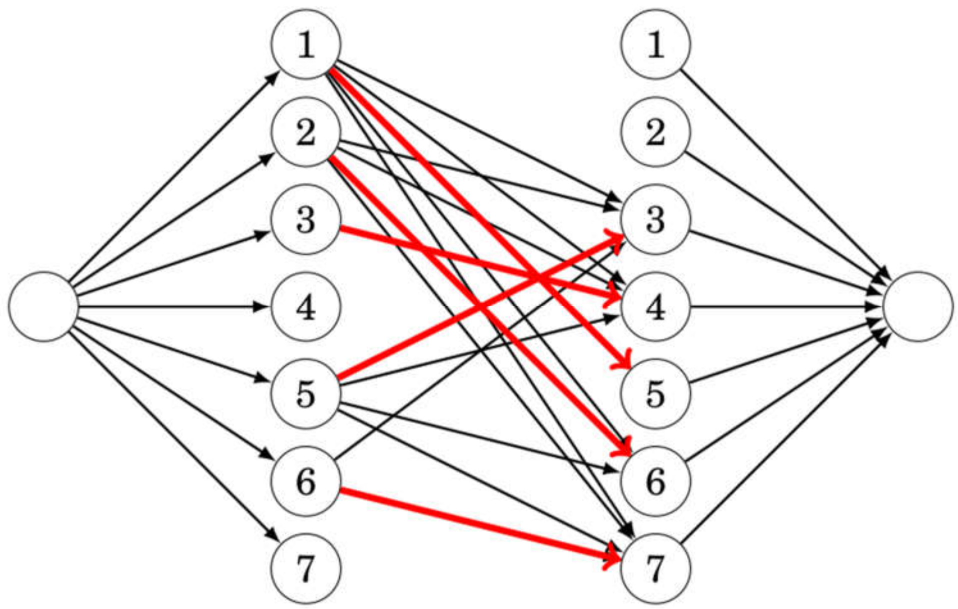
Phủ đường đi tổng quát tối tiểu của đồ thị này bao gồm 2 đường đi. Ví dụ, đường đi đầu tiên có thể là như sau:



Và đường đi thứ hai có thể là như sau:

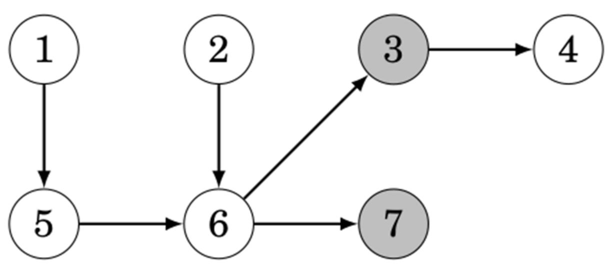


Phủ đường đi tổng quát tối tiểu có thể được tìm thấy giống như phủ đường đi đỉnh rời nhau tối tiểu. Thêm một số cạnh mới vào đồ thị ghép cặp sao cho luôn có một cạnh $a \rightarrow b$ khi có đường đi từ a đến b trong đồ thị gốc (khả năng đi qua một vài cạnh). Đồ thị ghép cặp cho đồ thị trên là như sau:



Phản xích là một tập các đỉnh của đồ thị mà không có đường đi nào từ một đỉnh bất kỳ đến đỉnh khác qua các cạnh của đồ thị.

Định lý Dilworth cho biết trong đồ thị có hướng không tuần hoàn, kích thước của phủ đường đi tổng quát tối tiểu bằng kích thước của phản xích cực đại. Ví dụ, đỉnh 3 và 7 hình thành một antichain trong đồ thị sau:



Đây là một phản xích cực đại, vì không thể xây dựng antichain nào mà chứa 3 đỉnh. Trước đây, chúng ta đã thấy rằng kích thước của phủ đường đi tổng quát tối tiểu của đồ thị này chứa 2 đường đi.

4. KẾT LUẬN

Báo cáo này có mục đích tìm hiểu và trình bày các khái niệm cơ bản về đồ thị, về tập hợp sắp thứ tự một phần và các mô hình tập sắp thứ tự thường gặp, đưa ra các ví dụ minh họa cụ thể. Ngoài ra báo cáo cũng nêu những định lý quan trọng trong lý thuyết tập hợp sắp thứ tự và ứng dụng vào thực tế.

Hy vọng nội dung của báo cáo sẽ giúp các thầy, cô giáo đang giảng dạy cùng với các bạn sinh viên đang học tập có thêm một sự tham khảo bổ ích, đồng thời có thể liên hệ tiếp cận lý thuyết tập hợp sắp thứ tự với các vấn đề khác của toán học, tin học, và khoa học công nghệ hiện đại.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đặng Huy Ruận, *Lý thuyết đồ thị và ứng dụng,* NXB Khoa học tự nhiên, 2004.

[2] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*. Vol. 367. American Mathematical Soc., 2009.

[3] Stasys Jukna, *Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science*, Second Edition.

[4] wikipedia.org.

[5] vallicon.com.