BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ĐỊNH LÝ RAMSEY VÀ ỨNG DỤNG

CN. Hà Hữu Cao Trình

Hà Nội, 1/2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ĐỊNH LÝ RAMSEY VÀ ỨNG DỤNG

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 1/2024

MỤC LỤC

1. MỞ ĐẦU

Trong thực tế có nhiều bài toán được quy về bài toán đồ thị để giải quyết. Đặc biệt là các bài toán về số Ramsey.

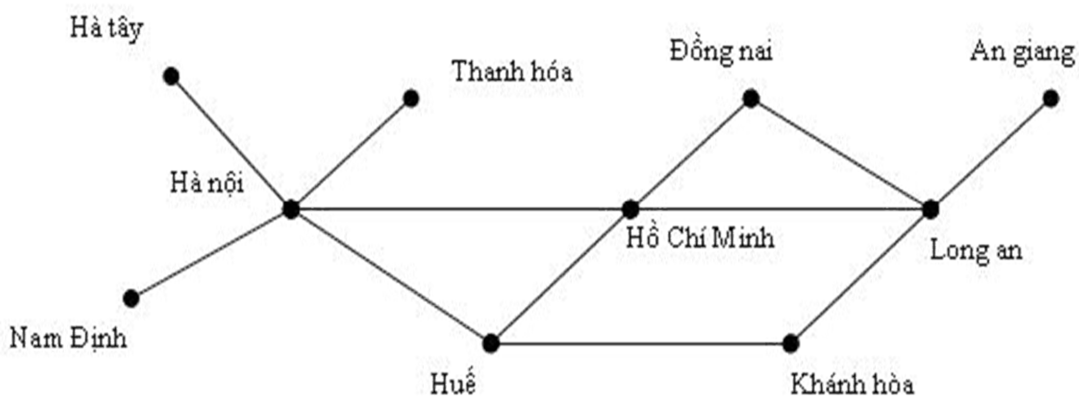
Báo cáo này cung cấp kiến thức cơ bản về lý thuyết đồ thị, nêu chứng minh một số định lý và kết quả về số Ramsey. Báo cáo trình bày một số ví dụ về ứng dụng thực tế của lý thuyết đồ thị nói chung và số Ramsey nói riêng.

Nội dung được chia thành 2 phần: Phần đầu giới thiệu về những kiến thức cơ bản về đồ thị và phần sau đề cập tới khái niệm số Ramsey, các định lý quan trọng, và các kết quả đã đạt được, cùng những ứng dụng điển hình trong thực tế.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Khái niệm đồ thị

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc bao gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh này. Chúng ta phân biệt các loại đồ thị khác nhau bởi *kiểu* và *số lượng* cạnh nối hai đỉnh nào đó của đồ thị. Để có thể hình dung được tại sao lại cần đến các loại đồ thị khác nhau, chúng ta sẽ nêu ví dụ sử dụng chúng để mô tả một mạng máy tính. Giả sử ta có một mạng gồm các máy tính và các kênh điện thoại (gọi tắt là kênh thoại) nối các máy tính này. Chúng ta có thể biểu diễn các vị trí đặt náy tính bởi các điểm và các kênh thoại nối chúng bởi các đoạn nối, xem hình 1.



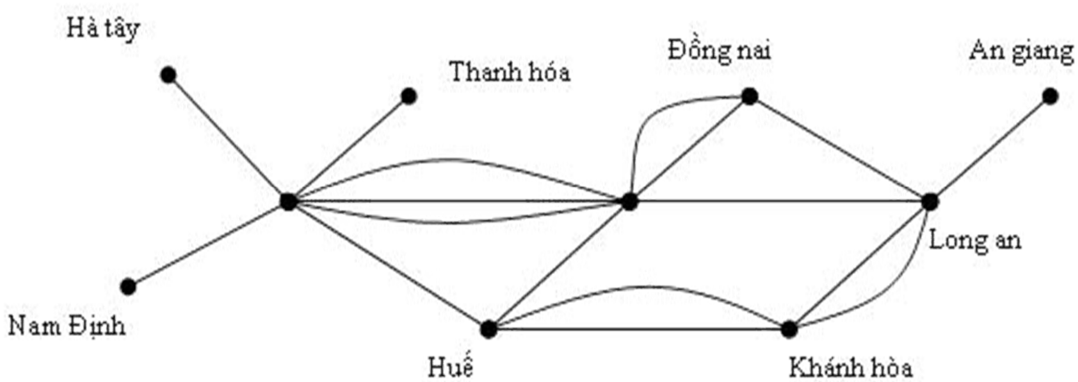
Hình 1. Sơ đồ mạng máy tính.

Nhận thấy rằng trong mạng ở hình 1, giữa hai máy bất kỳ chỉ có nhiều nhất là một kênh thoại nối chúng, kênh thoại naỳ cho phép liên lạc cả hai chiều và không có máy tính nào lại được nối với chính nó. Sơ đồ mạng máy cho trong hình 1 được gọi là *đơn đồ thị vô hướng*. Ta đi đến định nghĩa sau:

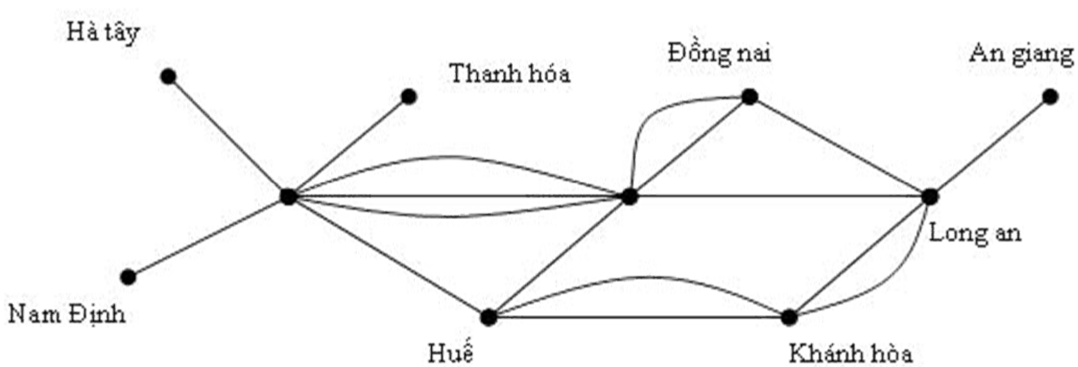
Định nghĩa 1. *Đơn đồ thị vô hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh, và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh.*

Trong trường hợp giữa hai máy tính nào đó thường xuyên phải truyền tải nhiều thông tin người ta phải nối hai máy nàu bởi nhiều kênh thoại. Mạng với đa kênh thoại giữa các máy được cho trong hình 2.

Định nghĩa 2. *Đa đồ thị vô hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh, và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh. Hai cạnh e 1 và e 2 được gọi là cạnh lặp nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.*



Hình 2 Sơ đồ mạng máy tính với đa kênh thoại.



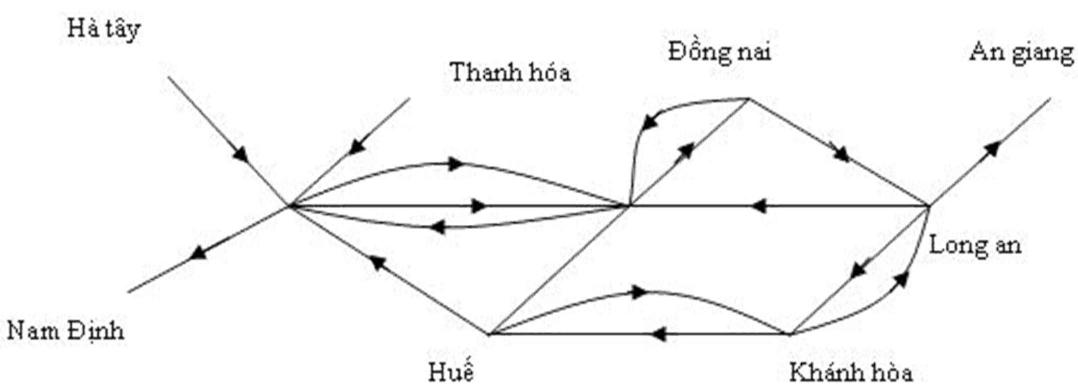
Hình 3 Sơ đồ mạng máy tính với kênh thoại thông báo.

Rõ ràng mỗi đơn đồ thị đều là đa đồ thị, nhưng không phải đa đồ thị nào cũng là đơn đồ thị, vì trong đa đồ thị có thể có hai (hoặc nhiều hơn) cạnh nối một cặp đỉnh nào đó.

Trong mạng máy tính có thể có những kênh thoại nối một náy nào đó với chính nó (chẳng hạn vời mục đính thông báo). Mạng như vậy được cho trong hình 3. Khi đó đa đồ thị không thể mô tả được mạng như vậy, bởi vì có những *khuyên* (cạnh nối một đỉnh với chính nó). Trong trường hợp nàychúng ta cần sử dụng đến khái niệm *giả đồ thị vô hướng,* được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 3. *Giả đồ thị vô hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử (không nhất thiết phải khác nhau) của V gọi là cạnh. Cạnh e được gọi là khuyên nếu nó có dạng e = (u, u).*

Các kênh thoại trong mạng máy tính có thể chỉ cho phép truyền tin theo một chiều. Chẳng hạn, trong hình 4 máy chủ ở Hà Nội chỉ có thể nhận tin từ các máy ở địa phương, có một số máy chỉ có thể gửi tin đi, còn các kênh thoại cho phép truyền tin theo cả hai chiều được thay thế bởi hai cạnh có hướng ngược chiều nhau.



Hình 4. Mạng máy tính với kênh thoại một chiều.

Định nghĩa 4. *Đơn đồ thị có hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung.*

Nếu trong mạng có thể có đa kênh thoại một chiều, ta sẽ phải sử dụng đến khái niệm *đa đồ thị có hướng*:

Định nghĩa 5. *Đa đồ thị có hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung. Hai cung e_1, e_2 tương ứng với cùng một cặp đỉnh được gọi là cung lặp.*

Trong các phần tiếp theo chủ yếu chúng ta sẽ làm việc với đơn đồ thị vô hướng và đơn đồ thị có hướng. Vì vậy, để cho ngắn gọn, ta sẽ bỏ qua tính từ **đơn** khi nhắc đến chúng.

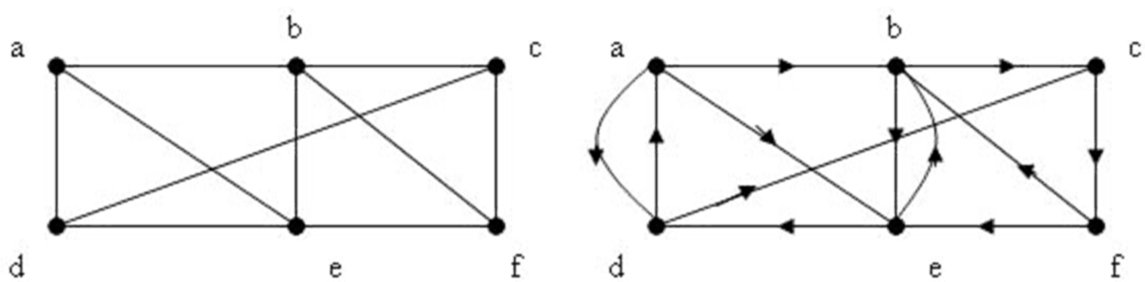
2.2. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

Định nghĩa 6. *Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v, trong đó n là số nguyên dương, trên đồ thị vô hướng G = (V, E) là dãy $x_0, x_1, \dots, x_n$ trong đó*

$$u = x_0 \,,\; v = x_n \,,\; (x_i, x_{i+1}) \in E,\; i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v gọi là đỉnh cuối của đường đi. Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là u = v) được gọi là chu trình . Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có cạnh nào bị lặp lại.

Ví dụ 1. Trên đồ thị vô hướng cho trong hình 5: a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4. Còn d, e, c, a không là đường đi, do (c,e) không phải là cạnh của đồ thị. Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 5. Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài là 5 không phải là đường đi đơn, do cạnh (a, b) có mặt trong nó 2 lần.



Hình 5 Đường đi trên đồ thị

Khái niệm đường đi và chu trình trên đồ thị có hướng được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong trường hợp đồ thị vô hướng, chỉ khác là ta có chú ý đến hướng trên các cung.

Định nghĩa 7. *Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v, trong đó, n là số nguyên dương, trên đồ thị có hướng G = (V, A) là dãy* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *trong đó*

$$u = x_0,\ v = x_n,\ (x_i, x_{i+1}) \in E,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1.$$

Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v gọi là đỉnh cuối của đường đi. Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là u = v) được gọi là chu trình . Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có cạnh nào bị lặp lại.

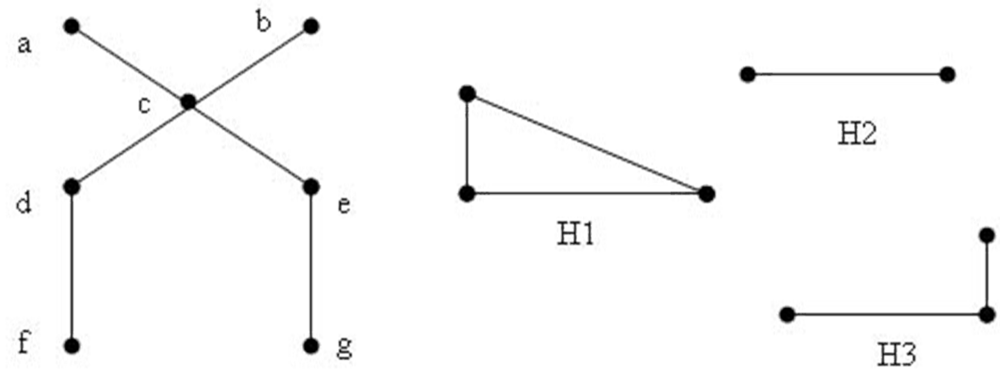
Ví dụ 2. Trên đồ thị có hướng cho trong hình 1.6: a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4. Còn d, e, c, a không là đường đi, do (c,e) không phải là cạnh của đồ thị. Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 4. Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài là 5 không phải là đường đi đơn, do cạnh (a, b) có mặt trong nó 2 lần.

Xét một mạng máy tính. Một câu hỏi đặt ra là hai máy tính bất kỳ trong mạng này có thể trao đổi thông tin được với nhau hoặc là trực tiếp qua kênh nối chúng hoặc thông qua một hoặc vài máy tính trung gian trong mạng? Nếu sử dụng đồ thị để biểu diễn mạng máy tính này (trong đó các đỉnh của đồ thị tương ứng với các máy tính, còn các cạnh tương ứng với các kênh nối) câu hỏi đó được phát biểu trong ngôn ngữ đồ thị như sau: Tồn tại hay không đường đi giữa mọi cặp đỉnh của đồ thị.

Định nghĩa 8. *Đồ thị vô hướng G = (V, E) được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.*

Như vậy hai máy tính bất kỳ trong mạng có thể trao đổi thông tin được với nhau khi và chỉ khi đồ thị tương ứng với mạng này là đồ thị liên thông.

Ví dụ 3. Trong hình 6: Đồ thị G là liên thông, còn đồ thị H là không liên thông.



Hình 6. Đồ thị G và H.

Định nghĩa 9. *Ta gọi đồ thị con của đồ thị G = (V, E) là đồ thị H = (W, F), trong đó W ⊆ V và F ⊆ E.*

Trong trường hợp đồ thị là không liên thông, nó sẽ rã ra thành một số đồ thị con liên thông đôi một không có đỉnh chung. Những đồ thị con liên thông như vậy ta sẽ gọi là các *thành phần liên thông* của đồ thị.

Ví dụ 4. Đồ thị H trong hình 2 gồm 3 thành phần liên thông H_1, H_2, H_3.

Trong mạng máy tính có thể có những máy (Những kênh nối) mà sự hỏng hóc của nó sẽ ảnh hưởng đến việc trao đổi thông tin trong mạng. Các khái niệm tương ứng với tình huống này được đưa ra trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 10. *Đỉnh v được gọi là đỉnh rẽ nhánh nếu việc loại bỏ v cùng với các cạnh liên thuộc với nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị. Cạnh e được gọi là cầu nếu việc loại bỏ nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.*

Ví dụ 5. Trong đồ thị G ở hình 2, đỉnh d và e là đỉnh rẽ nhánh, còn các cạnh (d, g) và (e, f) là cầu.

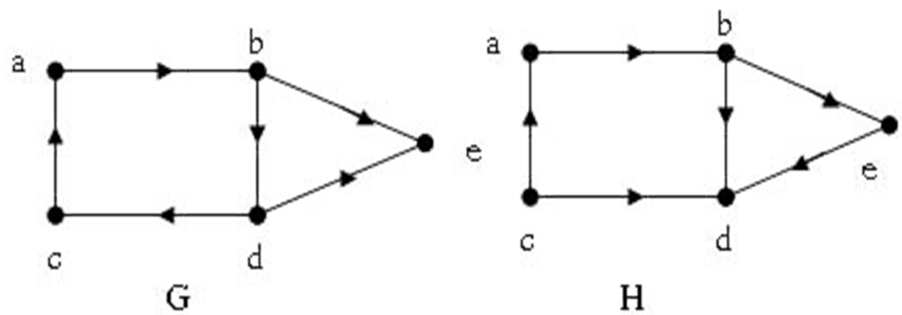
Đối với đồ thị có hướng có hai khái niệm liên thông phụ thuộc vào việc ta có xét đến hướng trên các cung hay không.

__Định nghĩa 11.__ Đồ thị có hướng G = (V, A) được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.

__Định nghĩa 12.__ Đồ thị có hướng G = (V, A) được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là vô hướng liên thông.

Rõ ràng nếu đồ thị là liên thông mạnh thì nó cũng là liên thông yếu, nhưng điều ngược lại là không luôn đúng, như chỉ ra trong ví dụn dưới đây.

Ví dụ 6. Trong hình 7 đồ thị G là liên thông mạnh, còn H là liên thông yếu nhưng không là liên thông mạnh.



Hình 8 Đồ thị liên thông mạnh G và đồ thị liên thông yếu H.

Một câu hỏi đặt ra là khi nào có thể định hướng các cạnh của một đồ thị vô hướng liên thông để có thể thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh? Ta sẽ gọi đồ thị như vậy là đồ thị định hướng được. Định lý dưới đây cho ta tiêu chuẩn nhận biết một đồ thị có là định hướng được hay không.

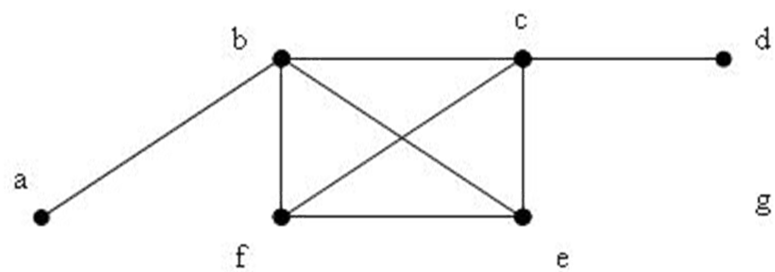
__Định lý 1.__ Đồ thị vô hướng liên thông là định hướng được khi và chỉ khi mỗi cạnh của nó nằm trên ít nhất một chu trình.

2.3. Đồ thị vô hướng liên thông

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày một số thuật ngữ cơ bản của lý thuyết đồ thị. Trước tiên, ta xét các thuật ngữ mô tả các đỉnh và cạnh của đồ thị vô hướng.

__Định nghĩa 13.__ Hai đỉnh u và v của đồ thị vô hướng G được gọi là kề nhau nếu (u,v) là cạnh của đồ thị G. Nếu e = (u, v) là cạnh của đồ thị ta nói cạnh này là liên thuộc với hai *đỉnh u và v, hoặc cũng nói là nối đỉnh u và đỉnh v, đồng thời các đỉnh u và v sẽ được gọi là các đỉnh đầu của cạnh (u, v).*

Định nghĩa 14. *Ta gọi bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó và sẽ ký hiệu là deg(v).*



Hình 8. Đồ thị vô hướng.

Ví dụ 7. Xét đồ thị cho trong hình 8, ta có

deg(a) = 1, deg(b) = 4, deg(c) = 4, deg(f) = 3,

deg(d) = 1, deg(e) = 3, deg(g) = 0

Đỉnh bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh bậc 1 được gọi là đỉnh treo. Trong ví dụ trên đỉnh g là đỉnh cô lập, a và d là các đỉnh treo. Bậc của đỉnh có tính chất sau:

Định lý 2. *Giả sử G = (V, E) là đồ thị vô hướng với m cạnh. Khi đó tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng hai lần số cung.*

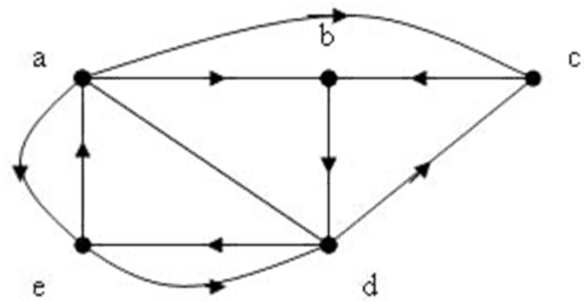
Hệ quả 3. *Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ (nghĩa là có bậc là số lẻ) là một số chẵn.*

2.4. Đồ thị có hướng liên thông

Định nghĩa 15. *Nếu e = (u, v) là cung của đồ thị có hướng G thì ta nói hai đỉnh u và v là kề nhau, và nói cung (u, v) nối đỉnh u với đỉnh v hoặc cũng nói cung này là đi ra khỏi đỉnh u và vào đỉnh v. Đỉnh u(v) sẽ được gị là đỉnh đầu (cuối) của cung (u,v).*

Tương tự như khái niệm bậc, đối với đồ thị có hướng ta có khái niệm bán bậc ra và bán bậc vào của một đỉnh.

Định nghĩa 16. *Ta gọi bán bậc ra (bán bậc vào) của đỉnh v trong đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi ra khỏi nó (đi vào nó) và ký hiệu là* $deg_+(v)$ $(deg_-(v))$.



Hình 9. Đồ thị có hướng.

Ví dụ 9. Xét đồ thị cho trong hình 9. Ta có

$$deg_-(a)=1,\ deg_-(b)=2,\ deg_-(c)=2,\ deg_-(d)=2,\ deg_-(e) = 2.$$

$$deg_+(a)=3,\ deg_+(b)=1,\ deg_+(c)=1,\ deg_+(d)=2,\ deg_+(e)=2.$$

Định lý 4. *Giả sử G = (V, E) là đồ thị có hướng. Khi đó tổng bán bậc ra của tất cả các đỉnh bằng tổng bán bậc vào của tất cả các đỉnh.*

Rất nhiều tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng trên các cung của nó. Vì vậy, trong nhiều trường hợp sẽ thuận tiện hơn nếu ta bỏ qua hướng trên các cung của đồ thị. Đồ thị vô hướng thu được bằng cách bỏ qua hướng trên các cung được gọi là *đồ thị vô hướng tương ứng* với đồ thị có hướng đã cho.

3. ĐỊNH LÝ RAMSEY VÀ ỨNG DỤNG

Trong phần này, chúng ta sẽ khảo sát một loại cấu trúc con cơ bản thường được chứa trong các đồ thị G đủ lớn. Về hình thức, vấn đề này chính là bài toán ngược của bài toán: Cho trước một đồ thị H và số nguyên dương $n \geq |H|$, một đồ thị G với n đỉnh sẽ cần có bao nhiêu cạnh để có thể chứa H như một đồ thị con bất kể cách phân bố của các cạnh này? Bổ đề Szemerédi cung cấp một lời giải sơ bộ cho loạt vấn đề này: Mọi đồ thị G đủ lớn đều có chứa những đồ thị con H có cấu trúc gần giống với các đồ thị đa phân. Nếu chúng ta đang tìm kiếm những đồ thị con H có cấu trúc xác định hơn thì một câu trả lời như trên là hoàn toàn chưa đủ.

Mặc dù có nhiều nét tương đồng với các bài toán cực trị đồ thị nhưng vấn đề trên dẫn chúng ta đến một loạt các kết quả toán học mang màu sắc riêng biệt. Thật vậy, các kết quả và phép chứng minh trong này có nhiều nét tương đồng với các kết quả trong đại số và hình học hơn so với hầu hết các lĩnh vực thuộc về lý thuyết đồ thị. Như vậy, việc nghiên cứu các phương pháp cơ bản để giải quyết vấn đề trên có thể được coi như một lĩnh vực hoàn toàn riêng biệt của toán tổ hợp: lý thuyết Ramsey.

Để phù hợp với chủ đề, chúng ta sẽ chỉ tập trung vào các kết quả được biểu thị một cách tự nhiên dưới dạng đồ thị. Ngay cả khi nhìn nhận từ quan điểm của lý thuyết Ramsey tổng quát, việc chúng ta chỉ tập trung vào các kết quả biểu thị dưới dạng đồ thị cũng sẽ không làm giảm đi tính tổng quát của vấn đề: đồ thị là sự lựa chọn tự nhiên để biểu diễn các kết quả của lý thuyết Ramsey và đưa ra đủ loại ý tưởng và phương pháp để truyền đạt những đặc điểm nổi bậc nhất của lý thuyết Ramsey.

3.1. Dạng nguyên mẫu của định lí Ramsey

Dạng nguyên mẫu của định lí Ramsey phát biểu rằng: "Mọi đồ thị G đủ lớn đều có chứa một đồ thị con khung có dạng K_r hoặc $\overline{K_r}$. Thoạt nhìn, khẳng định này dường như vô lý: bởi vì mọi đồ thị G với n đỉnh sẽ cần chứa khoảng $\frac{r-1}{r-1}\ C_n^2$ cạnh để đảm bảo G sẽ chứa một đồ thị con có dạng K_r trong khi cả G và $\bar{G}$ không thể cùng chứa nhiều hơn $\frac{1}{2}C_n^2$ cạnh. Như vậy, việc ép quá nhiều cạnh vào đồ thị G mà không tạo ra được đồ thị K_r sẽ buộc G phải chứa một đồ thị con có dạng $\overline{K_r}$.

Ý tưởng chính cho phép chứng minh của định lí Ramsey nằm ở việc chúng ta sẽ xây dựng đệ quy một đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ trong G bắt đầu từ một đỉnh $v_1 \in V1 \coloneqq V(G)$ tuỳ ý như sau: Nếu $|G|$ đủ lớn thì sẽ tồn tại một tập đỉnh $V_2 \subseteq V_1 \setminus \{v_1\}$ đủ lớn mà tất cả các đỉnh đều liên thuộc với v_1 hoặc tất cả các đỉnh đều không liên thuộc với v_1. Khi đó, v_1 có thể được xem như đỉnh đầu tiên của một đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ với tất cả các đỉnh đều nằm trong V_2. Kí hiệu $v_2 \in V_2$ là một đỉnh khác cũng nằm trên đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ này. Nếu $|V_2|$ đủ lớn thì sẽ tồn tại một tập đỉnh $V_3 \subseteq V_2 \setminus \{v_2\}$ đủ lớn mà tất cả các đỉnh đều liên thuộc với v_2 hoặc tất cả các đỉnh đều không liên thuộc với v_2. Khi đó, v_2 có thể được xem như đỉnh đầu tiên của một đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ với tất cả các đỉnh đều nằm trong V_3. Bằng cách lặp lại quá trình xây dựng nêu trên, chúng ta sẽ tìm được một dãy các đỉnh v_1, v_2, v_3,...

Câu hỏi tiếp theo đặt ra: Cần lặp lại quá trình xây dựng nêu trên trong bao lâu để có thể tìm được một đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ trong dãy các đỉnh $v_1, v_2, v_3 \ldots$ nêu trên? Câu trả lời sẽ phụ thuộc nhiều vào kích thước $V(G)$ của G. Thật vậy, do mỗi tập V_i đều chứa ít nhất $|V_{i-1}|/2$ đỉnh từ tập tiền nhiệm V_{i-1} nên nếu đồ thị G chứa khoảng 2^s đỉnh thì quá trình xây dựng nêu trên sẽ kết thúc sau s lần thực hiện. Phép chứng minh sau sẽ chỉ ra rằng nếu chọn $s = 2r - 3$ thì chúng ta hoàn toàn có thể tìm được một đồ thị con K_r hoặc $\overline{K_r}$ từ trong dãy các đỉnh $v_1, v_2, v_3 \ldots$ nêu trên.

3.2 Kết quả 1 (Dạng nguyên mẫu)

Với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $n(r) \in \mathbb{N}$ sao cho nếu G là một đồ thị với $|G| \geq n$ thì G sẽ chứa một đồ thị con khung có dạng K_r hoặc $\overline{K_r}$.

Chứng minh. Nhận thấy rằng khẳng định trên hiển nhiên là đúng nếu $r \leq 1$, nên không giảm tính tổng quát của vấn đề chúng ta có thể giả sử rằng $r \geq 2$. Kí hiệu $n \coloneqq 2^{2r-3}$. Giả sử G là một đồ thị với $|G| \geq n$. Chúng ta sẽ xây dựng một dãy các tập đỉnh $V_1, V_2, \dots, V_{2r-2}$ và một dãy các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_{2r-2}$ sao cho $v_{i\backslash i}V_i$ và thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $|V_i| = 2^{2r-2-i}$ ($i = 1, \dots, 2r-2$);

ii) $V_i \subseteq V_{i-1} \backslash \{v_{i-1}\}$ ($i = 2, \dots, 2r-2$);

iii) v_{i-1} hoặc liên thuộc với tất cả các đỉnh trong V_i hoặc không liên thuộc với bất kì đỉnh nào trong V_i ($i = 2, \dots, 2r-2$).

Giả sử $V_1 \subseteq V(G)$ là một tập đỉnh bất kì với $|V_1| = 2^{2r-3}$ và $v_1 \in V_1$ là một đỉnh bất kì. Khi đó, tính đúng đắn của các điều kiện (i), (ii), (iii) là hiển nhiên. Giả sử đã xây dựng được một dãy các tập đỉnh $V_1, \dots, V_{i-1}$ và một dãy các đỉnh $v_1, \dots, v_{i-1}$ sao cho $v_i \in V_j$ ($j =$ 1, 2 … , i) và thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii). Do $|V_{i-1} \backslash \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-1}$ là một số lẻ nên V_{i-1} phải chứa một tập đỉnh con V_i thỏa mãn các điều kiện (i), (ii), (iii). Để hoàn tất quá trình xây dựng nêu trên, chúng ta chỉ cần chọn v_i là một đỉnh bất kì thuộc V_i.

Nhận thấy rằng trong số $2r-3$ đỉnh $v_1, \dots, v_{2r-3}$ phải có $r-1$ đỉnh cùng liên thuộc nhau đôi một hoặc cùng không liên thuộc nhau đôi một. Bằng cách kết hợp $r-1$ đỉnh này với đỉnh v_{2r-2} chúng ta sẽ nhận được một đồ thị con khung có dạng K_r hoặc $\overline{K_r}$ trong G (do $v_i, \dots, v_{2r-2} \in V_i$ với mọi chỉ số i). □

Số nguyên dương $n(r)$ nhỏ nhất thỏa mãn Kết quả 1 được gọi là số Ramsey $\boldsymbol{R(r)}$. Phép chứng minh chỉ ra rằng $R(r) \leq 2^{2r-3}$. Sử dụng một lập luận xác suất đơn giản có thể chỉ ra rằng $R(r) \leq 2^{r-2}$.

Theo thông lệ trong lý thuyết Ramsey, một phép tô màu các phần tử của một tập hợp X bởi c màu phân biệt (hay nói ngắn gọn là một phép $\boldsymbol{c}$ − tô màu của $\boldsymbol{X}$) có thể được xem như một phép phân hoạch của X thành c lớp phân biệt. Những phép c −tô màu này không cần đáp ứng bất kì yêu cầu nào về tính liên hợp.

Giả sử cho trước một phép $c-$ tô màu của $[X]^k$, tập $Y \subseteq X$ được gọi là đơn sắc nếu tất cả các phần tử của $[Y]^k$ đều được tô bởi cùng một màu, hay nói cách khác tất cả các phần tử của $[Y]^k$ đều nằm trong cùng một lớp tương đương của phân hoạch c tương ứng của $[X]^k$. Tương tự, nếu $G = (V, E)$ là một đồ thị và $H \subseteq G$ là một đồ thị con có tất cả các cạnh được tô bởi cùng một màu trong một phép tô màu nào đó của E thì H được gọi là một đồ thị con đơn sắc của G.

Theo thuật ngữ trên, định lí Ramsey có thể được phát biểu lại dưới dạng: với mọi số tự nhiên $r \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho, với mọi $n-$ tập X, mọi phép $2-$ tô màu của $[X]^2$ đều có chứa một $r-$ tập con đơn sắc $Y \subseteq X$. Tổng quát hơn, với mọi số tự nhiên $r, k \in \mathbb{N}$, tồn tại một số tự nhiên $n \in \mathbb{N}$ sao cho, với mọi $n-$ tập X, mọi phép $k-$ tô màu của $[X]^k$ đều có chứa một $r-$ tập con đơn sắc $Y \subseteq X$.

Nhằm tránh sự trùng lặp, chúng ta sẽ trình bày một kĩ thuật chứng minh thay thế khá phổ biến: đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh dạng vô hạn của định lí Ramsey; sau đó, chúng ta suy ra tính đúng đắn của dạng hữu hạn của định lí Ramsey (do chúng ta không phải quan tâm đến số phần tử của tập X khi chứng minh dạng vô hạn của định lí Ramsey nên tính phức tạp của vấn đề sẽ được giảm đi) – lập luận compact.

3.3. Kết quả 2. (Dạng vô hạn của định lí Ramsey*)*

Giả sử cho trước các số nguyên dương $k, c \in \mathbb{N}$ và một tập vô hạn X. Khi đó, với mọi phép $c-$ tô màu của $[X]^k$, X có chứa một tập con đơn sắc vô hạn Y.

Chứng minh. Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta tạm cố định giá trị của chỉ số c và thực hiện quy nạp toán học theo chỉ số k. Với $k = 1$, tính đúng đắn của khẳng định là hiển nhiên. Giả sử $k > 1$ và tính đúng đắn của khẳng định đã được chứng minh với mọi giá trị nhỏ hơn k. Xét một phép $c-$ tô màu bất kì của $[X]^k$. Để chứng minh tính đúng đắn của khẳng định trên, chúng ta sẽ xây dựng một dãy vô hạn các tập con vô hạn $X_0, \dots, X_i, \dots$ của X và một dãy vô hạn các điểm $x_0, \dots, x_i, \dots$ sao cho $x_i \in X_i$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $X_{i+1} \subseteq X_i \backslash \{x_i\}$;

ii) tất cả các $k-$ tập có dạng $\{x_i\} \cup Z$ với $Z \in [X_{i+1}]^{k-1}$ đều được tô bởi cùng một màu c_i nào đó.

Đầu tiên, chúng ta sẽ bắt đầu với tập con vô hạn tầm thường $X_0 \coloneqq X$ và một điểm $x_0 \in X_0$ bất kì. Giả sử chúng ta đã chọn được một tập vô hạn X_i và $x_i \in X_i$ với một chỉ số i nào đó, bằng cách tô mỗi tập $Z \in X_i \backslash \{x_i\}$ bởi màu của tập $\{x_i\} \cup Z$ trong phép $c-$ tô màu của tập $[X]^k$. Theo giả thiết quy nạp của bài toán, $X_i \backslash \{x_i\}$ có chứa một tập con đơn sắc vô hạn X_{i+1}. Hiển nhiên, tập X_{i+1} này thỏa mãn cả hai điều kiện (i) và (ii). Sau đó, chúng ta chọn ra một điểm $x_{i+1} \in X_{i+1}$ bất kì.

Do c hữu hạn nên phải có một màu ci nào đó trong c màu này liên kết với vô hạn các điểm x_i. Tập các điểm x_i sẽ tạo thành một tập con đơn sắc của X. □

Để nhận được dạng hữu hạn của định lí Ramsey, chúng ta sẽ cần đến kết quả sau:

3.4. Kết quả 3. (Dạng vô hạn của bổ đề König)

Giả sử $V_0, \dots, V_i, \dots l$à một dãy vô hạn các tập hữu hạn không rỗng đôi một phân biệt và G là một đồ thị trên hợp của các tập này. Giả sử mỗi đỉnh v trong tập V_i với $i \geq 1$ đều có một đỉnh láng giềng $f(v)$ trong V_{i-1}. Khi đó, G có chứa một đường đi vô hạn $v_0 v_1 \dots v_i \dots$ trong đó $v_i \in V_i$ với mọi i.

Chứng minh. Kí hiệu $\mathcal{P}$ là tập tất cả các đường đi có dạng $vf(v)f(f(v)) \dots$ kết thúc trong V_0. Do V_0 hữu hạn nhưng $\mathcal{P}$ vô hạn nên tồn tại vô hạn đường đi trong $\mathcal{P}$ kết thúc tại cùng một điểm $v_0 \in V_0$. Trong số những đường đi này, tồn tại vô hạn đường đi cùng đi qua đỉnh $v_1 \in V_1$ (điều này suy ra từ việc V_1 là một tập hữu hạn).

Tương tự, trong số những đường đi này, tồn tại vô hạn đường đi cùng đi qua một điểm $v_2 \in V_2$ . ... Lập luận tương tự, chúng ta xác định được các đỉnh $v_i \in V_i$ tương tự như trên với mọi $i \in \mathbb{N}$. Từ cách định nghĩa, mỗi đỉnh v_1 đều liên hợp với đỉnh v_{i-1}, nên $v_0 v_1 \dots v_i \dots$ chính là đường đi vô hạn cần tìm. □

3.5. Kết quả 4. (Dạng hữu hạn của định lí Ramsey)

Với mọi số nguyên dương $k, c, r \geq 1$, tồn tại một số tự nhiên $n(k, c, r) \geq k$ sao cho mọi $n -$ tập X đều có chứa một $r -$ tập con đơn sắc Y với mọi phép $c -$ tô màu của $[X]^k$.

Chứng minh. Kí hiệu $[n] \coloneqq \{0, \dots, n-1\}$. Giả sử khẳng định của bài toán là sai với các số nguyên dương $k, c, r \geq 1$ nào đó. Khi đó, tồn tại một n tập, không giảm tính tổng quát của vấn đề chúng ta giả sử là tập $[n]$, và một phép $c -$ tô màu $[n]^k \to c$ sao cho $[n]$ không chứa bất kì $r -$ tập con đơn sắc nào. Chúng ta sẽ gọi một phép $c -$ tô màu như vậy là một phép tô màu xấu. Như vậy, với mọi $n \geq k$, luôn tồn tại ít nhất một phép tô màu xấu của $[n]^k$. Ý tưởng của phép chứng minh của chúng ta là sẽ tổ hợp các phép tô màu này lại để tạo ra một phép tô màu xấu của $[N]^k$, mâu thuẫn với Kết quả 3.

Với mọi $n \geq k$, kí hiệu $V_n \neq \emptyset$ là tập các phép tô màu xấu của $[n]^k$. Nhận thấy rằng, với mọi $n > k$, phép thu hẹp $f(g)$ của mọi phép tô màu $g \in V_n$ cũng là một phép tô màu xấu, nghĩa là $f(g) \in V_{n-1}$. Từ Kết quả 3, tồn tại một dãy vô hạn $g_k, \dots, g_n, \dots$ các phép tô màu xấu $g_n \in V_n$ sao cho $f(g_n) = g_{n-1}$ với mọi $n > k$. Với mọi $m \geq k$, tất cả các phép tô màu g_n với $n \geq m$ đều trùng với nhau trên $[m]^k$, nên với mọi $Y \in [N]^k$ giá trị của $g_n(Y)$ trùng với nhau với mọi $n > max(Y)$. Kí hiệu $g(Y)$ là giá trị chung $g_n(Y)$ này. Khi đó, g là một phép tô màu xấu của $[N]^k$: do mọi $r -$ tập $S \subseteq \mathbb{N}$ đều được chứa trong một tập $[n]$ nào đó đủ lớn nên S không thể là một tập con đơn sắc của (điều này suy ra từ việc phép tô màu g trùng với phép tô màu xấu g_n trên $[n]^k$). □

4. KẾT LUẬN

Báo cáo này có mục đích tìm hiểu và trình bày các khái niệm cơ bản về đồ thị và các dạng đồ thị thường gặp, đưa ra các ví dụ minh họa cụ thể. Ngoài ra báo cáo cũng nêu những kết quả tốt nhất về số Ramsey và ứng dụng vào thực tế.

Hy vọng nội dung của báo cáo sẽ giúp các thầy, cô giáo cùng với các bạn sinh viên đang giảng dạy và học tập có thêm nguồn tài liệu hữu ích, bổ sung thêm phương pháp để tiếp cận các vấn đề về lý thuyết đồ thị. Nhờ đó các thầy cô có thể nâng cao chất lượng bài giảng, giúp các em sinh viên hiểu sâu sắc được vấn đề, đặc biệt khi tìm hiểu về các môn học liên quan đến Toán học và Tin học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Tô Thành, Nguyễn Đức Nghĩa, *Giáo trình Toán rời rạc*. NXB Đại học quốc gia Hà Nội, 2003.

[2] Đặng Huy Ruận, *Lý thuyết đồ thị và ứng dụng,* NXB Khoa học tự nhiên, 2004.

[3] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*. Vol. 367. American Mathematical Soc., 2009.

[4] diendantoanhoc.org.