BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TÍNH LIÊN TỤC TRONG ĐỀ THI OLYMPIC

Thạc sỹ: Nguyễn Thùy Linh

Hà Nội, 1/2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TÍNH LIÊN TỤC TRONG ĐỀ THI OLYMPIC

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 1/2024

Lời nói đầu

Olympic toán sinh viên là một kì thi quan trọng, thu hút sự tham gia của đông đảo các bạn sinh viên từ các trường đại học. Trong kì thi Olympic sinh viên môn Giải tích thì Tính liên tục là một phần kiến thức quan trọng. Trong báo cáo học thuật này có đưa ra một số dạng bài tập cơ bản đến nâng cao với lời giải chi tiết. Báo cáo học thuật là một tài liệu tham khảo cho các thầy cô giáo và các em sinh viên trong quá trình dạy và học môn Giải tích phục vụ cho kì thi Olympic toán sinh viên hàng năm.

Báo cáo được chia thành các chương sau:

Phần 1. Lý thuyết về tính liên tục

Phần 2. Một số ví dụ.

Hà Nội, tháng 1 năm 2024

Thạc sỹ

Nguyễn Thùy Linh

I. Một số kiến thức cơ bản

1. Định nghĩa:

Hàm số $f(x)$ xác định trong tập $E \subset R$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E: |x - x_0| < \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Nếu x_0 là điểm tụ của tập $E \subset R$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm x_0 nếu: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm $x \in E thì$ $f(x)$ được gọi là liên tục trên E.

2. Liên tục đều một bên

- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục bên trái tại $x = x_0 \in E$ nếu $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục bên phải tại $x = x_0 \in E$ nếu $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
- Hàm số $f(x)$ được gọi là liên tục tại $x = x_0 \in E \leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

3. Hàm số gián đoạn

Hàm số $f(x)$ được gọi là gián đoạn tại điểm x_0 nếu nó không liên tục tại điểm đó.

Cho x_0 là điểm gián đoạn của $f(x)$.

- Nếu $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ là các số hữu hạn thì x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 1.

  $h = |f(x_0^+) - f(x_0^-)|$ được gọi là bước nhảy của $f(x)$ tại x_0.

  Nếu $h = 0$ thì a gọi là điểm gián đoạn bỏ được.
- Điểm x_0 được gọi là điểm gián đoạn loại 2 nếu a không là điểm gián đoạn loại 1.

4. Tính liên tục đối với các phép toán

Cho $f, g : X \to \mathbb{R}, a \in X, \lambda \in \mathbb{R}$

Khi đó:

- Nếu $f(x)$, $g(x)$ liên tục tại x_0 thì $f(x) + g(x)$ liên tục tại x_0.
- Nếu $f(x)$, $g(x)$ liên tục tại x_0 thì $f(x).g(x)$ liên tục tại x_0.
- Nếu $f(x), g(x)$ liên tục tại x_0 thì $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0.
- Nếu $f(x)$ liên tục tại x_0, $g(x)$ liên tục tại $f(a)$ thì $g \circ f$ liên tục tại x_0.

5. (Định lí Weierstrass) Nếu $f(x)$ liên tục trên [a,b] thì f đạt giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M trên [a,b]. Hơn nữa, $R(f) = [m, M]$.

6. Định lí trung gian

Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì $\exists c \in (a, b): f(c) = 0$.

7. Định lí Blozano – Cauchy

Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a,b], f(a) = u, f(b) = v$ thì mọi w nằm giữa u và v đều tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f(c) = w$.

8. **Định lí (liên tục và ánh xạ ngược)**

Cho E là một khoảng của $R, f: E \to R$ là một ánh xạ, ta kí hiệu

$$\begin{aligned} \hat{f}: E &\to f(E) \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Nếu f liên tục và đơn điệu thực sự thì:

- $f(E)$ là một khoảng.
- f là một song ánh.
- $\hat{f}^{-1}$ đơn điệu thực sự cùng với f.
- $\hat{f}^{-1}$ liên tục trên $f(E)$.

II. Một số ví dụ.

Bài 1. Xét tính liên tục của hàm số sau

a) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2024^n - 2 + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2}$

b) $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{(\cos 2023x)^{2n} + (\sin 2023x)^{2n}}$

Lời giải

a) Ta có $\sqrt[n]{2024^n - 2 + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^2} = \sqrt[n]{2024^n + x^{2n} + \frac{1}{x^{2n}}}$.

Khi đó $f(x) = \max\left\{2024, x^2, \frac{1}{x^2}\right\}$.

Mà các hàm số này đều liên tục trên $R\backslash\{0\}$. Do đó hàm số $f(x)$ liên tục trên $R\backslash\{0\}$.

b) Ta có $g(x) = \max\{|\cos 2023x|, |\sin 2023\, x|\}$.

Do đó hàm số $g(x)$ liên tục trên R.

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = [x] + (x - [x])^{[x]}$, $x \in [\frac{1}{2}; +\infty)$. Chứng minh rằng f liên tục trên $\in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Ta có

$$f(x) = \begin{cases} 1 & khi\ x \in [\mathbf{\frac{1}{2}}; +\infty) \\ n + (x-n)^n & khi\ x \in [n; n+1) \end{cases} \qquad (n \in N)$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại mọi $x \neq n$.

Hơn nữa $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} f(x) = n$.

Vậy f liên tục trên $\in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Bài 3 (Kỉ yếu Olympic 2017). Cho $\in \boldsymbol{N^*}$, hàm số $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ được cho bởi công thức

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} & n\text{ếu}\ \ x \in Q \\ -x^{\alpha} & n\text{ếu}\ \ x \notin Q \end{cases}}$$

Tùy theo α xét tính liên tục, khả vi của hàm $\boldsymbol{f}$.

<u>Lời giải</u>

Trường hợp 1: Với $x_0 \neq 0$. Do trù mật của của Q và $R \backslash Q$ trong R nên tồn tại các dãy $\{x_n\} \subset Q$ và $\{x_m\} \subset R \backslash Q$ sao cho $x_n \to x_0$ và $x_m \to x_0$.

Mặt khác $f(x_n) = x_n^{\alpha} \to x_0^{\alpha}$; $f(x_m) = -x_m^{\alpha} \to -x_0^{\alpha} \neq x_0^{\alpha}$.

Điều này suy ra không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, tức là $f(x)$ không liên tục và không khả vi tại x_0.

Trường hợp 2: Với $x_0 = 0$. Khi đó mọi dãy $\{x_n\}$ mà $x_n \to x_0$ ta có: $-x_0^{\alpha}\ và\, x_0^{\alpha}$ đều hội tụ về $f(0) = 0$ nên $f(x)$ liên tục tại $x = 0$ với $\forall \alpha \in N^*$.

+ Nếu $\alpha = 1$ ta có

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 1 & nếu\ x \in Q \\ -1 & nếu\ x \in R \backslash Q \end{cases}$$

Bằng cách chọn dãy như trên ta suy ra $f(x)$ không khả vi tại 0.

+ Nếu $\alpha > 1$ ta có:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} x^{\alpha-1} & nếu\ x \in Q \\ -x^{\alpha-1} & nếu\ x \in R \backslash Q \end{cases}$$

Suy ra $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$ hay $f(x)$ khả vi tại 0.

Kết luận:

+ Hàm số không liên tục và không khả vi tại mọi $x \in R^*$ với mọi $\alpha \in N^*$.

+ Nếu $\alpha = 1$ thì $f(x)$ chỉ liên tục tại 0 nhưng không khả vi tại điểm này.

+ Nếu $\alpha > 1$ thì $f(x)$ liên tục và khả vi tại 0.

Bài 4. Cho f là một hàm liên tục trên R thỏa mãn

$$\boldsymbol{f^{2023}(x) = f_0 f_0 \dots_0 f(x) = x}$$

Với mọi $x \in R$. Chứng minh rằng $f(x) = x$ với mọi $x \in R$.

<u>Lời giải</u>

Ta chứng minh f là đơn ánh

Với mọi $x_1, x_2 \in R$ ta có:

$$f(x_1) = f(x_2) \to f^2(x_1) = f^2(x_2) \to \cdots \to f^{2023}(x_1) = f^{2023}(x_2)$$

$$\to x_1 = x_2$$

Do đó f là đơn ánh.

Hơn nữa f liên tục nên f đơn điệu ngặt trên R.

Nếu f giảm ngặt trên R thì f^2 tăng trên R. Suy ra f^3 giảm thực sự trên R.

Tiếp tục quá trình ta sẽ thu được hàm f^{2023} giảm ngặt trên R.

Mâu thuẫn với giả thiết $f^{2023}(x) = f_0 f_0 \dots_0 f(x) = x$

Nếu f tăng ngặt trên R.

Ta sẽ chứng minh phản chứng.

Giả sử tồn tại $x_0 \in R: f(x_0) \neq x_0$.

Không mất tính tổng quát giả sử tồn tại $x_0: f(x_0) > x_0$ thì

$$f^2(x_0) > f(x_0) > x_0 \to f^3(x_0) > f(x_0) > x_0 \to \cdots \to f^{2023}(x_0) > f(x_0) > x_0$$

Mâu thuẫn.

Vậy $f(x) = x \quad \forall x \in R$.

Bài 5. Chứng minh rằng nếu $f(x)$ liên tục trên $[a, +\infty)$ và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ thì $f(x)$ bị chặn trên $[a, +\infty)$.

<u>Lời giải</u>

Do $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ nên theo định nghĩa về giới hạn, với $\varepsilon = 1, \exists x_0 > 0 : \forall x \geq x_0$ sao cho $|f(x) - L| < 1$.

Suy ra, $|f(x)| < |L| + 1, \forall x > x_0$.

Tức là, $f(x)$ bị chặn trên $(x_0, +\infty)$.

Mặt khác, do $f(x)$ liên tục trên $[a, x_0]$, nên nên đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên $[a, x_0]$ và do đó bị chặn trên $[a, x_0]$.

Vậy hàm f bị chặn trên $[a, +\infty)$.

Bài 6. Cho $f: R \to R$ liên tục sao cho $|f(x) - f(y)| \geq \sqrt{2023}|x - y|, \forall x, y \in R$. Chứng minh rằng f là song ánh.

<u>Lời giải</u>

Ta chứng minh f là đơn ánh.

Với $\forall x_1, x_2 \in R$ ta có

$f(x_1) = f(x_2) \to 0 = |f(x_1) - f(x_2)| \geq \sqrt{2023}|x_1 - x_2| \geq 0 \to x_1 = x_2$

Ta có f đơn ánh và liên tục trên R nên f là hàm đơn điệu

Giả sử f là hàm đơn điệu tăng.

Khi đó

$$f(x) - f(0) \geq \sqrt{2023}(x - 0) = \sqrt{2023}x \quad \forall x > 0$$

$$f(x) - f(0) \leq \sqrt{2023}(x - 0) = \sqrt{2023}x \quad \forall x < 0$$

Chuyển qua giới hạn ta được:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Nghĩa là $Imf = f(R) = R$.

Suy ra f là toàn ánh.

Vậy f là song ánh.

Bài 7. Giả sử hàm số f liên tục trên $[0;+\infty)$, $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ và $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2023}{2024}$.

Chứng minh rằng tồn tại $c \geq 0$ sao cho $f(c) = c$.

<u>Lời giải</u>

+ Nếu $f(0) = 0$ thì kết luận trên hoàn toàn đúng.

+ Nếu $f(0) > 0$

Đặt $g(x) = f(x) - x$

Vì f liên tục trên $[0;+\infty)$ nên g cũng liên tục trên $[0;+\infty)$.

Ta có: $g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$ mọi $x \geq 0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{2023}{2024} < 1 \rightarrow \exists b > 0: \frac{f(b)}{b} < 1 \leftrightarrow \exists b > 0: f(b) < b.$$

Khi đó: $g(b) = f(b) - b < 0$.

$$g(0)g(b) \leq 0 \rightarrow \exists c \in [0;b] \subset [0;+\infty): g(c) = 0 \leftrightarrow \exists c \geq 0: f(c) = c.$$

Bài 8. Tồn tại hay không hàm liên tục: $f : (0;+\infty) \rightarrow (0;+\infty)$ thoả mãn các điều kiện

a) $f(2023) < f(2024)$

b) $f(f(x)) = \frac{2022}{x}$

<u>Lời giải</u>

Với $\forall x_1, x_2 \in R^+$, ta có:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \rightarrow \frac{2022}{x_1} = \frac{2022}{x_2} \rightarrow x_1 = x_2.$$

f liên tục và đơn ánh suy ra f đơn điêu.

Kết hợp với điều kiện a suy ra f đồng biến trên R^+.

Khi đó $(f(x)) = \frac{2022}{x}$ cũng là hàm đồng biến.

Điều này vô lý vì $y = \frac{2022}{x}$ là hàm nghich biến.

Vậy không tồn tại hàm f thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 9. Tìm giá trị của k sao cho tồn tại hàm liên tục $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ thoả mãn:

$\boldsymbol{f(f(x)) = kx^9 \quad \forall x \in R}$ **.**

<u>Lời giải</u>

- Trường hợp $k = 0$ thì hàm $f(x) = 0 \ \forall x \in R$ thoả mãn yêu cầu bài toán.
- Trường hợp $k \neq 0$

+ f liên tục.

+ f là một đơn ánh.

Thật vậy, với $\forall x, y \in R$ ta có

$$f(x) = f(y) \to f(f(x)) = f(f(y)) \to kx^9 = ky^9 \to x^9 = y^9 \to x = y.$$

Vì f liên tục và đơn ánh nên f đơn điệu thực sự.

Nếu f tăng thực sự

Khi đó $x < y \to f(x) < f(y) \to f(f(x)) < f(f(y)) \to f(f(x))$ tăng thực sự.

Nếu f giảm thực sự

Khi đó $x < y \to f(x) > f(y) \to f(f(x)) < f(f(y)) \to f(f(x))$ giảm thực sự.

Vậy $f(f(x))$ là hàm tăng thực, vì thế $y = kx^9$ cũng là hàm tăng thực sự.

Do đó, $k > 0$.

Ngược lại với $k > 0$, ta luôn tìm được hàm $f(x) = \sqrt[4]{k\,x^3} \ \ \forall x \in R$.

Kết luận

Báo cáo đã đưa ra một số phương pháp và bài tập về tính liên tục giúp các thầy cô và các em sinh viên dạy và ôn tập tốt hơn trong quá trình ôn thi môn Giải tích để chuẩn bị cho kì Olympic toán sinh viên.

Tài liệu tham khảo

1. Trần Đức Long – Nguyễn Đình Sang – Hoàng Quốc Toàn (2002), Giáo trình giải tích tập 2, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội.
2. Trần Đức Long – Nguyễn Đình Sang – Hoàng Quốc Toàn (2002), Bài tập giải tích tập 2, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội.
3. Nguyễn Đình Trí – Tạ Văn Đĩnh – Nguyễn Hồ Quỳnh (2009), Toán học cao cấp tập 2, Phép tính giải tích một biến số, Nhà xuất bản Giáo dục.
4. Nguyễn Đình Trí – Tạ Văn Đĩnh – Nguyễn Hồ Quỳnh (2009), Bài tập toán cao cấp tập 2, Phép tính giải tích một biến số, Nhà xuất bản Giáo dục.
5. Nguyễn Vũ Lương – Phạm Văn Hùng – Nguyễn Ngọc Thắng (2007), Các bài giảng về bất đẳng thức, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội.
6. Văn Phú Quốc (2012), Bài tập giải tích dành cho Olympic Toán, Đại học Quảng Nam.