TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT

BỘ MÔN TOÁN – KHOA KHCB

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ BÀI TOÁN NÂNG CAO VỀ PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Nguyễn Thị Lan Hương

Hà Nội, 06/2024

MỤC LỤC

I	Phép tính Tích phân	3
II	Một số bài toán Olympic sinh viên về Tích phân	12
III	Kết luận	14
IV	Tài liệu tham khảo	14

I- PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

1. NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

Định nghĩa 1.1. Xét hàm F: D(f) $\rightarrow$R. Hàm F(x) được gọi là nguyên hàm của hàm f(x) nếu F'(x) = f(x), $\forall$ x $\in$ D(f).

Mệnh đề 1.1.

1) F(x) là nguyên hàm của hàm f(x), thì F(x) + C cũng là nguyên hàm của hàm f(x).

2) Nếu F(x) và G(x) là hai nguyên hàm của cùng hàm f(x), thì F(x) – G(x) = k, với k là hằng số nào đó.

Mệnh đề 1.2. Phép tính nguyên hàm có tính chất tuyến tính:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Mệnh đề 1.3. Phương pháp tích phân từng phần để tính nguyên hàm.

Giả sử $\int f(x)dx$ có thể viết thành $\int u(x)v'(x)dx$, thì

$$\int f(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Mệnh đề 1.4. Phương pháp đổi biến để tính nguyên hàm.

a) Nếu đổi biến x = φ(t) và có φ'(t) thì $\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$,

b) Nếu $\int f(x)dx$ có thể viết thành $\int g\big(\psi(x)\big)\psi'(x)dx$, thì đổi biến t = ψ(x) và ta được $\int f(x)dx = \int g(t)dt.$

Bảng Nguyên hàm: Tự xem lại.

2. ĐỊNH NGHĨA VÀ SỰ TỒN TẠI CỦA TÍCH PHÂN (RIEMANN – STIELTJES)

Định nghĩa 2.1.

Cho hs y = f(x) xác định trên đoạn [a, b]

B1: Chia đoạn [a, b] thành các đoạn con $[x_i, x_{i+1}]$ bởi các điểm chia:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Gọi độ dài của mỗi đoạn con là: $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$

B2: Trên mỗi đoạn con lấy một điểm tùy ý: $\varepsilon_i(x_i, y_i)$.

B3: Lập tổng tích phân: $I_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i).\Delta x_i$

B4: Khi đó nếu tồn tại giới hạn: $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$ hữu hạn, không phụ thuộc vào cách chia đoạn [a, b], cách chọn điểm ε_I thì giới hạn I đgl tích phân xác định của hs y = f(x) trên đoạn [a, b] và ký hiệu là: $I = \int_a^b f(x)dx$.

Khi đó ta nói hs y = f(x) khả tích trên [a, b].

Mệnh đề 2.1. Nếu f là hàm liên tục trên [a, b] và α là hàm không giảm trên [a, b] thì $f \in R(\alpha)$ trên [a, b].

Mệnh đề 2.2. Nếu f đơn điệu trên [a, b] còn α liên tục và không giảm trên [a, b] thì $f \in R(\alpha)$.

Mệnh đề 2.3. Nếu hàm f bị chặn trên [a, b], f có nhiều nhất một số hữu hạn các điểm gián đoạn (liên tục từng khúc) trên [a, b] và hàm α không giảm, liên tục tại mỗi điểm gián đoạn của f thì $f \in R(\alpha)$.

Mệnh đề 2.4. Giả sử $f \in R(\alpha)$ trên [a, b], $m \le f(x) \le M$, $\forall\ x \in [a, b]$ và g là hàm liên tục trên [m, M]. Khi đó, $h = gof \in R(\alpha)$ trên [a, b].

3. CÁC TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN (old)

4. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN (old)

5. CÁC ĐỊNH LÝ GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH

Định lý 5.1. Giả sử f là hàm liên tục và α là hàm đơn điệu tăng trên [a, b]. Khi đó, tồn tại điểm $c \in [a, b]$ sao cho

$$\int_a^b f d\alpha = f(c)[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Định lý 5.2. Giả sử f là hàm đơn điệu và α liên tục, đơn điệu tăng trên [a, b]. Khi đó, tồn tại điểm c ∈ [a, b] sao cho

$$\int_a^b f d\alpha = f(a)[\alpha(c) - \alpha(a)] + f(b)[\alpha(b) - \alpha(c)]$$

Định lý 5.3. (Định lý thứ 1)

Xét các hàm f, g ∈ R([a,b]) và gọi m = inf f(x), M = supf(x), x ∈ [a, b]. Nếu g là hàm không âm (hoặc không dương) trên [a, b] thì

$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$ với μ ∈ [m, M]

Hơn nữa, nếu f ∈ C[a, b] thì ∃ ξ ∈ [a, b] sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

Định lý 5.4. (Định lý thứ 2)

Xét các hàm f, g ∈ R([a,b]) và g là hàm đơn điệu trên [a, b]. Khi đó ∃ ξ ∈ [a, b] sao cho

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

Định lý 5.5.

Giả sử f(x) là hàm liên tục trên đoạn [a, b], khả vi trong khoảng (a, b). Khi đó tồn tại điểm c ∈ (a, b) sao cho thỏa mãn hệ thức

$$f'(c)\int_a^b f(x)dx = f(c)[f(b) - f(a)]$$

Định lý 5.6.

Giả sử f(x) và g(x) là hàm liên tục trên đoạn [a, b], khả vi trong khoảng (a, b). Khi đó tồn tại điểm c ∈ (a, b) sao cho thỏa mãn hệ thức

$$f'(c)\int_a^b f(t)dt + g'(c)\int_a^b f(t)dt = f(c)[f(b) - f(a)] + g(c)[f(b) - f(a)]$$

Định lý 5.7.

Giả sử f(x) là hàm liên tục trên đoạn [a, b], thỏa mãn f(a) = 0 và $\int_a^b f(x)dx = 0$. Khi đó tồn tại điểm c ∈ [a, b] sao cho

$$f(c) = \frac{1}{c-a}\int_a^c f(x)dx$$

6. MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC

6.1 BĐT AM-GM tổng quát và BĐT Young

Cho các số $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ và các trọng số $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (tức là $m_i \geq 0$ và $\sum_{i=1}^n m_i = 1$). Khi đó ta có BĐT AM-GM tổng quát

$$m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n \geq a_1^{m1}a_2^{m2}\ldots\ldots a_n^{mn}$$

Với $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = \frac{1}{n}$, ta được BĐT Cauchy

$$\frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \geq \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots \ldots a_n}$$

6.2 BĐT Holder và BĐT Cauchy-Schwartz

a) Cho các số $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tùy ý. Khi đó, với p > 0, q > 0, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ta có BĐT Holder

$$\sum_{i=1}^n |x_iy_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)\left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)$$

Khi p = q = 2 ta được BĐT Cauchy-Schwartz quen thuộc (còn gọi là BĐT Bunyakovsky).

b) Cho các hàm không âm $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ khả tích R-S đối với hàm không giảm α(x) trên đoạn [a, b] và các trọng số $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Khi đó ta có BĐT

$$\int_a^b f_1^{m1}f_2^{m2}\ldots\ldots f_n^{mn}d\alpha \leq \left(\int_a^b f_1 d\alpha\right)^{m1}\left(\int_a^b f_2 d\alpha\right)^{m2}\ldots\left(\int_a^b f_n d\alpha\right)^{mn}$$

Với p > 0, q > 0, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, ta được BĐT Holder

$$\int_a^b |fg|d\alpha \leq \left(\int_a^b f^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}}.\left(\int_a^b f^q d\alpha\right)^{\frac{1}{q}}$$

Với p = q = 2 ta được BĐT Cauchy-Schwartz

$$\left(\int_a^b |fg| d\alpha\right)^2 \le \int_a^b f^2 d\alpha . \int_a^b g^2 d\alpha$$

6.3 BĐT Minskowski

a) BĐT Minskowski cho dãy số.

Cho các số (x_1, x_2,….., x_n) và (y_1, y_2,…., y_n) tùy ý. Với p ≥ 1 ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

b) BĐT Minskowski cho tích phân R-M

Giả sử các hàm f và g khả tích R-S đối với hàm không giảm α trên [a, b]. Khi đó với p ≥ 1 ta có

$$\left(\int_a^b |f+g|^p d\alpha\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |f|^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p d\alpha\right)^{\frac{1}{p}}$$

6.4 BĐT Chebyshev

BĐT Chebyshev cho tích phân R-M

a) Giả sử các hàm f và g cùng chiều đơn điệu (cùng tăng hoặc cùng giảm) và khả tích R-S đối với hàm đơn điệu tăng α trên [a, b]. Khi đó,

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \int_a^b fg d\alpha \ge \int_a^b f d\alpha . \int_a^b g d\alpha$$

b) Giả sử các hàm f và g ngược chiều đơn điệu (một hàm tăng, một hàm giảm) và khả tích R-S đối với hàm đơn điệu tăng α trên [a, b]. Khi đó,

$$|\alpha(b) - \alpha(a)| \int_a^b fg d\alpha \le \int_a^b f d\alpha . \int_a^b g d\alpha$$

6.5 BĐT Jensen

ĐN Hàm lồi: Xét khoảng I ⊂ R. Hàm φ: I → R gọi là lồi, nếu ∀ a, b ∈ I (a < b) thì

$$\varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y), \forall x, y \in [a, b], \forall \lambda \in [0, 1]$$

a) BĐT Jensen thường

Giả sử φ: [a, b] →R là hàm lồi. Với bất kỳ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ và các trọng số $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, ta có BĐT

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

b) BĐT Jensen đối với tích phân

Giả sử hàm f: [α, β] → [a, b] khả tích và φ: [a, b] → R là hàm lồi. Khi đó ta có BĐT

$$\varphi\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt\right) \leq \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(f(t))dt$$

6.6. BĐT Hermite-Hadamard

Cho f(x) là hàm lồi và khả tích Riemann trong khoảng I ⊂ R. Khi đó với a, b ∈ I, a < b ta có

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_{a}^{b} f(x)dx \leq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

7. TÍCH PHÂN SUY RỘNG TRÊN KHOẢNG VÔ HẠN

Định nghĩa 7.1. Cho hàm số f: [a, +∞) → R khả tích trên mọi đoạn con hữu hạn [a, B] của khoảng [a, +∞), (a ≤ B). Ta ký hiệu,

$$\lim_{B\to+\infty}\int_{a}^{B} f(x)dx = \int_{a}^{+\infty} f(x)dx \quad (1)$$

và gọi đó là tích phân suy rộng loại 1 của hàm f trên khoảng vô hạn [a, +∞).

Giới hạn (1) nếu tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu giới hạn (1) không tồn tại hoặc bằng ∞ thì ta nói tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Định nghĩa 7.2. Cho hàm số f: (-∞, a] → R khả tích trên mọi đoạn con hữu hạn [A, a] của khoảng (-∞, a], (A ≤ a). Ta ký hiệu,

$$\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx \quad (2)$$

và gọi đó là tích phân suy rộng loại 1 của hàm f trên khoảng vô hạn (-∞, a].

Giới hạn (2) nếu tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{A} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu giới hạn (2) không tồn tại hoặc bằng ∞ thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{A} f(x)dx$ phân kỳ.

Định nghĩa 7.3. Cho hàm số f: (-∞, +∞) → R khả tích trên mọi đoạn con hữu hạn [A, B] của khoảng (-∞, +∞), (A ≤ B). Ta ký hiệu,

$$\lim_{\substack{A\to-\infty \\ B\to+\infty}} \int_{A}^{B} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad (3)$$

và gọi đó là tích phân suy rộng loại 1 của hàm f trên khoảng vô hạn (-∞, +∞).

Giới hạn (3) nếu tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Nếu giới hạn (3) không tồn tại hoặc bằng ∞ thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ.

Nhận xét: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx$

Định lý 7.4. (Tiêu chuẩn Cauchy về sự hội tụ)

Giả sử hàm số f(x) xác định trên khoảng [a, +∞), khả tích trên mọi đoạn hữu hạn [a, B], (a < B). Khi đó tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi với mọi ε > 0, tồn tại A_0 = A(ε) sao cho với mọi $A_0 < A \le B$ ta có $\left|\int_{A}^{B} f(x)dx\right| < \varepsilon$.

Mệnh đề 7.5. Giả sử hàm số f(x) xác định trên khoảng [a, +∞), khả tích trên mọi đoạn hữu hạn [a, B], (a < B). Khi đó tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ khi và chỉ khi $\int_{b}^{+\infty} f(x)dx$ (a < b) hội tụ.

Mệnh đề 7.6. Giả sử các tích phân $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ; α, β là các hằng số thực bất kỳ. Khi đó tích phân $\int_{a}^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx$ hội tụ và ta có

$$\int_{a}^{+\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_{a}^{+\infty} f(x)dx + \beta\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$$

Mệnh đề 7.7. Giả sử f(x), g(x) là các hàm xác định trên khoảng [a, +∞), khả tích trên mọi đoạn hữu hạn [a, B], (a ≤ B) và 0 ≤ f(x) ≤ g(x) , ∀ x ∈ [a, +∞). Khi đó

1) Nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx$,
2) Nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kỳ.

Mệnh đề 7.8. Giả sử f(x), g(x) là các hàm xác định và không âm trên khoảng [a, +∞), khả tích trên mọi đoạn hữu hạn [a, B], (a ≤ B) và tồn tại giới hạn

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = k \ \ (0 < k < +\infty)$$

Khi đó $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.

Mệnh đề 7.9. (Tiêu chuẩn Dirichlet) Giả sử f(x), g(x) là các hàm xác định và liên tục trên khoảng [a, +∞). Đồng thời,

1) Hàm f(x) có nguyên hàm bị chặn trên khoảng [a, +∞), tức là tồn tại số K > 0 sao cho $|F(B)| = \left|\int_a^B f(x)dx\right| \leq K, (a \ \leq B < +\infty)$,
2) Hàm g(x) đơn điệu giảm tới 0 khi x →+∞ và có đạo hàm g'(x) liên tục trên khoảng [a, +∞).
   Khi đó $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.

Mệnh đề 7.10. (Tiêu chuẩn Abel) Giả sử f(x), g(x) là các hàm liên tục trên khoảng [a, +∞). Đồng thời,

1) Tích phân $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ,
2) Hàm g(x) đơn điệu bị chặn trên khoảng [a, +∞) và có đạo hàm g'(x) liên tục trên khoảng đó.
   Khi đó $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ hội tụ.

8. TÍCH PHÂN SUY RỘNG ĐỐI VỚI HÀM KHÔNG BỊ CHẶN

Định nghĩa 8.1. Giả sử hàm f(x) xác định trên khoảng [a, b), (-∞ < a, < b < +∞), không bị chặn trên lân cận điểm x = b.

Giả thiết rằng với mọi η > 0 khá bé sao cho a < b - η < b thì hàm f(x) khả tích trên đoạn [a, b-η]. Ta ký hiệu

$$\lim_{\eta\to 0+}\int_a^{b-\eta} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad (4)$$

và gọi đó là tích phân suy rộng loại 2 của hàm f(x) trên khoảng [a, b).

Giới hạn (4) nếu tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nếu giới hạn (4) không tồn tại hoặc bằng ∞ thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Định nghĩa 8.2. *Giả sử hàm f(x) xác định trên khoảng (a, b], (-∞ < a, < b < +∞), không bị chặn trên lân cận điểm x = a.*

Giả thiết rằng với mọi η > 0 khá bé sao cho a < a + η < b thì hàm f(x) khả tích trên đoạn [a + η, b]. Ta ký hiệu

$$\lim_{\eta\to 0+}\int_{a+\eta}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad (5)$$

và gọi đó là tích phân suy rộng loại 2 của hàm f(x) trên khoảng (a, b].

Giới hạn (5) nếu tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nếu giới hạn (5) không tồn tại hoặc bằng ∞ thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Định nghĩa 8.3. Nếu hàm f(x) xác định trên khoảng (a, b), (-∞ < a < b < +∞), không bị chặn trên lân cận các điểm x = a, x = b.

Giả thiết rằng với mọi η1 > 0, η > 0 khá bé sao cho a < a + η1 < b - η2 < b thì hàm f(x) khả tích trên đoạn [a + η1, b - η2]. Ta ký hiệu

$$\lim_{\substack{\eta 1\to 0+\\ \eta 2\to 0+}}\int_{a+\eta 1}^{b-\eta 2} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad (6)$$

và gọi đó là tích phân suy rộng loại 2 của hàm f trên khoảng (a, b).

Giới hạn (6) nếu tồn tại hữu hạn thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ hội tụ.

Nếu giới hạn (6) không tồn tại hoặc bằng ∞ thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)dx$ phân kỳ.

Nhận xét: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Nhận xét: Bằng phép đổi biến số có thể đưa TPSR loại 2 sang loại 1 nên các KQ đối với TPRS loại 1 vẫn đúng cho TPSR loại 2 một cách tương ứng.

II- MỘT SỐ BÀI TOÁN OLYMPIC SINH VIÊN VỀ TÍCH PHÂN

PHẦN 1&2

Bài tập ứng dụng TP tính giới hạn và ngược lại.

PHẦN 3&4

Bài 1 (160) Giả sử $a^2 + b^2 \neq 0$. Tính các nguyên hàm sau:

$$\int e^{ax} cosbxdx \text{ và } \int e^{ax} sinbxdx$$

Bài 2 (160) Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+(tanx)^{\sqrt{2}}}$

Bài 3 (162) Cho hàm f(x) liên tục trên [a, b], khả vi trong (a, b), thỏa mãn f(a) = f(b) = 0 và $\int_a^b (f(x))^2 dx = 1$. Chứng minh rằng $\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}$.

PHẦN 5&6

Bài 4 (162) Cho hàm f(x) liên tục trên [a, b], khả vi trong (a, b), thỏa mãn f(a) = f(b) = 0 và $\int_a^b (f(x))^2 dx = 1$. Chứng minh rằng $\int_a^b (f'(x))^2 dx \int_a^b x^2 (f'(x))^2 dx \geq \frac{1}{4}$.

Bài 5 (176) Cho hàm f: [a, b] $\to$ R khả vi. Xét x $\in$ [a, b], theo định lý giá trị trung bình tích phân, tồn tại $c_x \in [a, x]$ sao cho $\int_a^x f(t)dt = f(c_x)(x-a)$. Giả thiết thêm $f'(a) \neq 0$. Chứng minh rằng $\lim_{x\to a} \frac{c_x - a}{x-a} = \frac{1}{2}$.

PHẦN 7&8

Bài 6 (207) Xét sự hội tụ của các tích phân sau

$$\int_a^{+\infty} \frac{sinx}{x^\alpha} dx; \int_a^{+\infty} \frac{cosx}{x^\alpha} dx \quad (a > 0, \alpha > 0)$$

Bài 7 (209) Chứng tỏ tích phân sau không phụ thuộc α

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$$

Bài 8 (215) Tính $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 e^{x^n} dx$

Bài 9 (215) Cho hàm f(x) liên tục trên [0, 1]. Chứng minh rằng

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x^n) dx = f(0)$$

Bài 10 (168) Cho hàm f: [0, 1] $\to$ R liên tục thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.

1) Chứng minh rằng tồn tại điểm α ∈ (0, 1) sao cho $\int_0^\alpha f(x)dx = 0$
2) Chứng minh rằng với mỗi α ∈ R, tồn tại điểm c ∈(0, 1) sao cho
$$f(c) = a\int_0^c f(x)dx$$
3) Chứng minh rằng tồn tại điểm α ∈ (0, 1) sao cho $\int_0^\alpha xf(x)dx = 0$
4) Chứng minh rằng với mỗi α ∈ R, tồn tại điểm c ∈ (0, 1) sao cho
$$cf(c) = a\int_0^c xf(x)dx$$
5) Chứng minh rằng với mỗi α ∈ R, tồn tại điểm c ∈(0, 1) sao cho
$$cf(c) + a\int_0^c f(x)dx = 0$$
6) Chứng minh rằng với mỗi k > 0 tồn tại điểm c ∈ (0, 1) sao cho
$$c^{k+1} f(c) = \int_0^c x^k f(x)dx$$

KẾT LUẬN

1) Báo cáo học thuật đã giới thiệu khái quát một số khái niệm cơ bản nhất về Tích phân của hàm số một biến số.

2) Báo cáo học thuật cũng đã giới thiệu được một số bài toán nâng cao về Tích phân.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1) *Tài liệu ôn tập Olympic Toán sinh viên*, Vũ Tiến Việt, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

2) *Một số chuyên đề ôn tập thi Olympic toán sinh viên (Phần 2, Giải tích)*, Vũ Tiến Việt, Phan Thế Hải, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

3) *Tài liệu ôn tập Giải tích 1,* bộ môn Toán, ĐH Mỏ - Địa chất.