TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT

BỘ MÔN TOÁN – KHOA KHCB

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ BÀI TOÁN OLP SINH VIÊN (TPSR)

Nguyễn Thị Lan Hương

Hà Nội, 01/2023

MỤC LỤC

KHÁI NIỆM VỀ TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Tích phân suy rộng loại một (tích phân suy rộng cận vô hạn)

- Cho hàm số f khả tích trên đoạn [a, A] với ∀ A > a. Khi đó

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx := \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx$$

Nếu giới hạn vế phải tồn tại và hữu hạn thì tích phân suy rộng ở vế trái được gọi là hội tụ. Ngược lại tích phân suy rộng được gọi là phân kỳ.

- Định nghĩa tương tự với tích phân suy rộng dạng $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx$ (a tùy ý)

Tích phân suy rộng ở vế trái hội tụ nếu cả hai tích phân ở vế phải hội tụ.

Định lí. Cho f là hàm khả tích trên mọi đoạn $[a, A]$, $b>a.$ Khi đó $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ và $\int_b^{+\infty} f(x)dx$ đồng thời hội tụ hoặc phân kì.

Định lí. (Tiêu chuẩn so sánh 1)

Cho hai hàm số f và g khả tích trên mọi đoạn [a, A] và $0 \le f(x) \le g(x), \forall x > a.$ Khi đó

- nếu $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ,
- nếu $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì thì $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì.

Định lí. (Tiêu chuẩn so sánh 2) Cho các hàm số không âm f(x), g(x) khả tích trên mọi đoạn $[a, A]$, $A > a.$ Khi đó

- nếu $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L\ (L \ne 0, \ne \infty),$ thì các tích phân suy rộng $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ và $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ cùng tính chất hội tụ.
- nếu $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0,$ và $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ,

- nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$, và $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ phân kì thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ phân kì.

Định lí. Nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ.

Định nghĩa.

- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ gọi là hội tụ tuyệt đối
- Nếu $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ phân kì và $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ gọi là bán hội tụ.

Tích phân suy rộng loại hai (tích phân suy rộng cận hữu hạn)

- Cho hàm số f xác định trên $[a,b]$, $x_0\in[a,b]$ được gọi là cực điểm của hàm f nếu $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$.
- Tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ trong đó b là cực điểm duy nhất của f

Giả sử hàm số f xác định trên $[a,b]$ và với $\forall\varepsilon>0$ đủ nhỏ f khả tích trên $[a,b-\varepsilon]$.Nếu $\exists\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx=I$ hữu hạn thì ta nói tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ hội tụ và có giá trị bằng I, tức là $\int\limits_a^b f(x)dx:=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.Ngược lại ta nói tích phân suy rộng là phân kỳ.

- Trường hợp tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ trong đó a là cực điểm duy nhất của f định nghĩa tương tự

$$\int\limits_a^b f(x)dx:=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$

- Trường hợp tích phân suy rộng $\int\limits_a^b f(x)dx$ trong đó c là cực điểm duy nhất của f. $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\lim\limits_{\varepsilon\to0^+}\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$
- Trường hợp tích phân suy rộng trên đoạn [a,b] mà hàm f có nhiều cực điểm trên đoạn đó thì ta chia ra thành các tích phân suy rộng trên từng

đoạn nhỏ sao cho trên từng đoạn nhỏ ấy hàm f chỉ có 1 cực điểm duy nhất.

Các định lí xét sự hội tụ của tích tích phân suy rộng cận vô hạn được phát biểu tương tự như cho tích phân suy rộng cận hữu hạn .

II – MỘT SỐ BÀI TOÁN TPSR

Bài 1. Tính $I=\int x\left(x+1\right)^{100}dx$.

Giải. Đặt $x+1=t\Rightarrow x=t-1,\ dx=dt$. Tích phân trở thành

$$\int\left(t-1\right)t^{100}dt=\int\left(t^{101}-t^{100}\right)dt=\frac{1}{102}t^{102}-\frac{1}{101}t^{101}+C.$$

Thay lại biến x ban đầu ta được $I=\frac{1}{102}(x+1)^{102}-\frac{1}{101}(x+1)^{101}+C$

Bài 2. Tính $I=\int\frac{dx}{e^x+1}$.

Giải. Đặt $e^x=t\Rightarrow dt=e^xdx\Rightarrow dx=\frac{dt}{e^x}=\frac{dt}{t}$. Tích phân trở thành

$$\int\frac{dt}{t(t+1)}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln|t|-\ln|t+1|+C$$

Đổi trở về biến x ban đầu ta được

$$I=\ln\left(e^x\right)-\ln\left(e^x+1\right)+C=x-\ln\left(e^x+1\right)+C.$$

Bài 3. Tính $\int x\arctan xdx$.

Giải. $\int x\arctan xdx=\frac{1}{2}\int\arctan xd\left(x^2\right)=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int x^2d\left(\arctan x\right)$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

Bài 4. Tính $I=\int e^x\sin xdx$.

Giải. $I=\int e^x\sin xdx=\int\sin xd\left(e^x\right)=e^x\sin x-\int e^xd\left(\sin x\right)$

$$=e^x\sin x-\int e^x.\cos xdx=e^x\sin x-\int\cos xd\left(e^x\right)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d\left(\cos x\right)$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x.\sin x dx$$

Suy ra $2I = e^x \sin x - e^x \cos x + C$.

Vậy $I = \frac{1}{2}\left(e^x \sin x - e^x \cos x + C\right)$.

Bài 5. Tính $\int \frac{x+2}{x^2-3x+2}dx$

Giải. $\frac{x+2}{x^2-3x+2} = \frac{x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$

Suy ra $x+2 = A(x-2) + B(x-1) = (A+B)x - 2A - B$

Đồng nhất hệ số 2 vế ta được $\begin{cases} A+B=1 \\ 2A+B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=4 \end{cases}$

Vậy $\int \frac{x+2}{x^2-3x+2}dx = \int \frac{-3}{x-1}dx + \int \frac{4}{x-2}dx = -3\ln|x-1| + 4\ln|x-2| + C$

Bài 6. Tính $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

Giải. Ta có $\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$

Suy ra $1 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$

Cho x=1 suy ra $A = \frac{1}{2}$; Cho x=2 suy ra $B=-1$; Cho x=3 suy ra $C = \frac{1}{2}$.

Vậy: $\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3}$

$$= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + C.$$

Bài 7. Tính $\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx$.

Giải.

$$\int \frac{x+3}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4+2}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+4x+5\right)}{x^2+4x+5} + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x^2+4x+5}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right| + \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} \quad = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+5\right| + \arctan(x+2) + C.$$

Bài 8. Tính $I = \int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$

Giải. Đặt $\tan\frac{x}{2} = t$. Khi đó

$\sin x = \frac{2t}{t^2+1},\ \cos x = \frac{1-t^2}{t^2+1},\ x = 2\arctan t,\ dx = \frac{2}{t^2+1}dt$. Tích phân đã cho trở thành

$$I = \int \frac{1}{4\frac{2t}{t^2+1} + 3\frac{1-t^2}{t^2+1} + 5}.\frac{2dt}{t^2+1} = \int \frac{2dt}{2t^2+8t+8} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C$$

Đổi trở lại biến x ta được $I = -\frac{1}{\tan\frac{x}{2}+2} + C$.

Bài 9. Tính $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$

Giải. Đặt $t = \sin x,\ dt = \cos x dx$. Ta có

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}d\left(\sin x\right) = \int \frac{1-t^2}{t^2}dt = \int \frac{1}{t^2}dt - \int dt = \frac{-1}{t} - t + C$$

Thay $t = \sin x$ ta được $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx = \frac{-1}{\sin x} - \sin x + C.$

Bài 10. Tính $\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x}dx$

Giải. Đặt $t = \cos x, dt = -\sin x dx$. Ta có

$$\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x}dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\cos x\right)}{2\cos^2 x - 1} = \int \frac{\cos^2 x d\left(\cos x\right)}{2\cos^2 x - 1}$$

$$= \int \frac{t^2 dt}{2t^2-1} = \frac{1}{2}\int dt - \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C.$$

Thay $t = \cos x$ ta được $\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos 2x}dx = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{\cos x\sqrt{2}-1}{\cos x\sqrt{2}+1}\right| + C.$

Bài 11. Tính $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}$

Giải. Đặt $t = \tan x, dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. Ta có

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin 2x + 2\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x}{\cos x} + 2\right)} = \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 2}$$

$$= \int \frac{dt}{(t-1)^2 + 1} = \arctan(t-1) + C$$

Thay $t = \tan x$ ta được $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x} = \arctan\left(\tan x - 1\right) + C$

Bài 12. Tính $I = \int \sin^2 x.\cos^4 x dx$.

Giải. Dùng công thức hạ bậc

$$\sin^2 x.\cos^4 x = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2.\frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{1}{8}\sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^2 2x.\cos 2x$$

$$= \frac{1}{16}\left(1 - \cos 4x\right) + \frac{1}{8}\sin^2 2x.\cos 2x.$$

Vậy:

$$I = \int \frac{1}{16}\left(1 - \cos 4x\right)dx + \int \frac{1}{8}\sin^2 2x.\cos 2x dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin x + \frac{1}{48}\sin^3 x + C$$

Bài 13. Tính $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$.

Giải. Đặt $x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5 dt$. Ta có

$$I = \int \frac{6t^5 dt}{t^2 + t^3} = \int \frac{6t^3}{1+t}dt = 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= 6\left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 1 - \ln|t+1|\right) + C$$

Thay trở lại biến x ta được $I = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6 - \ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + C$

Bài 14. Tính $I = \int \frac{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}}{x^2}dx$.

Giải. Đặt $x = \sin t,\ t \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ dx = \cos t dt,\ \sqrt{1 - x^2} = \cos t$. Ta có

$$I=\int\frac{\cos^3 t}{\sin^2 t}\cos t dt=\int\frac{\left(1-\sin^2 t\right)^2}{\sin^2 t}dt=\int\frac{dt}{\sin^2 t}-2\int dt+\int\sin^2 t dt$$

$$=\cot t-2t+\int\frac{1}{2}\left(1-\cos 2t\right)dt=\cot t-2t+\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

Thay trở lại biến x ta được $I=-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}-\frac{3}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$

Bài 15. Tính $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

Giải. $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}}$

Đặt $x+1=\tan t,\ t\in\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ dx=\frac{1}{\cos^2 t}dt,\ \sqrt{\left(x+1\right)^2+1}=\frac{1}{\cos t}$.

Tích phân trở thành

$$\int\frac{\left(\tan t-1\right)^2}{\frac{1}{\cos t}}.\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int\frac{\left(\sin t-\cos t\right)^2}{\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin^2 t-2\sin t\cos t+\cos^2 t}{\cos^2 t}dt$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 t}dt-2\int\frac{\sin t}{\cos t}dt=\tan t+2\ln\left(\cos t\right)+C.$$

Thay trở lại biến x ta được

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}=x+1+2\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\left(x+1\right)^2+1}}\right)+C.$$

Bài 16. Tính $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$.

Giải. Đặt $t=\sqrt{x^2-4}$ được $t^2=x^2-4$, tdt = xdx. Vậy

$$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{tdt}{\left(t^2+4\right)t}=\frac{1}{2}\text{arctn}\frac{\text{t}}{2}+C=\frac{1}{2}\text{arctn}\frac{\sqrt{\text{x}^2-4}}{2}+C$$

Bài 17. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

a) $x=y^2, y=x^2$

b) $\begin{cases}x=2t-t^2\\ y=2t^2-t^3\end{cases}$

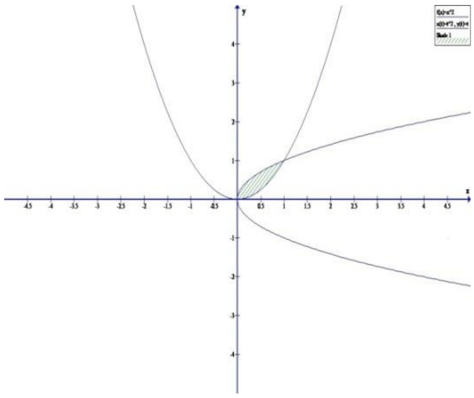
c) $r(\varphi)=3+2\cos\varphi$

Giải.

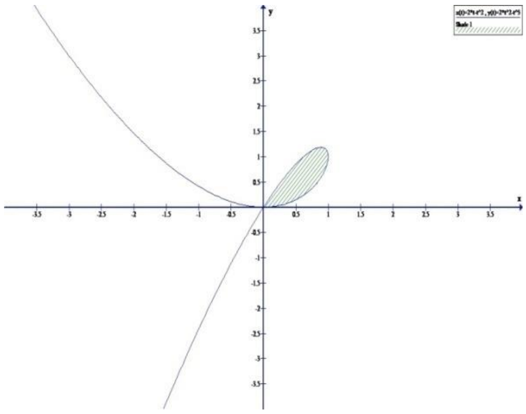
a)

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}$$

(đơn vị diện tích).



b)



Đường cong tự cắt tại các điểm ứng với

x=0 (t=0 và t=2), y=0 (t=0 và t=2)

Miền phẳng giới hạn bởi đường cong cho dưới dang tham số với $0\le t\le 2$

Diện tích là

$$S=\frac{1}{2}\int_0^2(xy'-yx')dt=\frac{1}{2}\int_0^2\left[\left(2t-t^2\right)\left(4t-3t^2\right)-\left(2t^2-t^3\right)\left(2-2t\right)\right]dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\left(t^4-4t^3+4t^2\right)dt=\frac{8}{15}\ \text{(đơn vị diện tích).}$$

c) Ta có $r(\varphi)$ tuần hoàn chu kỳ 2π và $r(\varphi)=r(-\varphi)$ nên miền phẳng đối xứng nhau qua trục cực

$$S=2.\frac{1}{2}\int_0^\pi r^2(\varphi)d\varphi=\int_0^\pi(3+2\cos\varphi)^2d\varphi$$

$$=\int_0^\pi\left(9+12\cos\varphi+4\cos^2\varphi\right)d\varphi=9\varphi\Big|_0^\pi+12\sin\varphi\Big|_0^\pi+2\int_0^\pi\left(1+\cos2\varphi\right)d\varphi$$

$$=9\pi+2\pi=11\pi\ \text{(đơn vị diện tích).}$$

Bài 18. Tính độ dài cung cho bởi phương trình sau

a) $y=a.\ln\dfrac{a^2}{a^2-x^2},\ (0\le x\le b<a)$.

b) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Giải.

a) $y = a.\ln\dfrac{a^2}{a^2 - x^2}$, $y'(x) = a.\dfrac{a^2 - x^2}{a^2}.\dfrac{a^2}{\left(a^2 - x^2\right)^2}.(-2x) = \dfrac{2ax}{x^2 - a^2}$

$$1 + y'^2(x) = 1 + \frac{4a^2x^2}{\left(x^2 - a^2\right)^2} = \left(\frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}\right)^2$$

Do đó $\quad l = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \int_0^b \dfrac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}dx = -\int_0^b dx + 2a^2\int_0^b \dfrac{dx}{x^2 - a^2}$

$$= -b + a\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right|_0^b = a\ln\frac{a + b}{a - b} - b \text{ (đơn vị độ dài).}$$

b) $x'(t) = t\cos t,\ y'(t) = t\sin t$, $x'^2(t) + y'^2(t) = t^2$

Do đó $\quad l = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt = a\int_0^{2\pi} tdt = \left.\dfrac{at^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2\pi^2 a$ (đơn vị độ dài).

Bài 19. Tính tích phân suy rộng sau

a) $I_1 = \int_1^2 \dfrac{dx}{x.\ln x}$ $\qquad$ b) $I_2 = \int_0^1 \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x}}dx$

Giải. $\quad$ a) $I_1 = \int_1^2 \dfrac{dx}{x.\ln x}$ là tích phân suy rông với cực điểm x=1.

$$I_1 = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x.\ln x} = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d\left(\ln x\right)}{\ln x} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\ln\left(\ln 2\right) - \ln\left(\ln(1 - \varepsilon)\right)\right] = +\infty$$

Vậy I_1 là tích phân phân kì.

b) I_2 là tích phân suy rộng với cực điểm x=1

$$I_2 = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_0^{1-\varepsilon} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x}}dx$$

Tính $\int_0^{1-\varepsilon} \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}dx$. Đặt $\sqrt{1 - x} = t \Rightarrow x = 1 - t^2, dx = -2tdt$

Khi $x = 0$ thì $t = 1$, Khi $x = 1 - \varepsilon$ thì $t = \sqrt{\varepsilon}$

Suy ra $\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\limits_1^{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t}(-2t)\,dt = 2\int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \left(1-t^2\right)^2 dt$

$$= 2\int\limits_{\sqrt{\varepsilon}}^1 \left(1+t^4-2t^2\right)dt = 2\left(t+\frac{1}{5}t^5-\frac{2}{3}t^3\right)\Bigg|_{\sqrt{\varepsilon}}^1$$

$$= 2\left(1-\sqrt{\varepsilon}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{\varepsilon^5}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon^3}\right)$$

Vậy $I_2 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} 2\left(1-\sqrt{\varepsilon}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\sqrt{\varepsilon^5}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{\varepsilon^3}\right) = 2\left(1+\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{15}$.

Bài 20. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

a) $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ b) $\int\limits_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Giải. a) Ta có $0 \le \frac{e^x}{\sqrt{x}} \le \frac{e}{\sqrt{x}},\ \forall x \in [0,1]$. Mà tích phân $\int\limits_0^1 \frac{e}{\sqrt{x}}dx$ hội tụ do $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Nên theo tiêu chuẩn so sánh thì tích phân đã cho hội tụ.

b) Ta có $0 \le \left|\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{1-x}},\ \forall x \in [0,1]$. Mà tích phân $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ hội tụ do $\alpha = \frac{1}{2} < 1$. Nên theo tiêu chuẩn so sánh thì tích phân $\int\limits_0^1 \left|\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}\right|dx$ hội tụ. Suy ra tích phân $\int\limits_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ hội tụ (tiêu chuẩn 3).

Bài 21. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

a) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$ c) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin^2 x}-1}dx$

b) $\int\limits_1^2 \frac{\sqrt{1-x^2}}{\ln x}dx$ d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\cos^2 x}$

Giải. a) $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$ là tích phân suy rộng với cực điểm x=1.

Đặt $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}, g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Ta có $f(x), g(x)$ liên tục trên [0,1).

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}.\sqrt{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)(1+x)}}=\frac{1}{2}$$

Suy ra $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$ và $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Mà $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ hội tụ do $\alpha=\frac{1}{2}<1$ nên tích phân đã cho hội tụ.

b) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln x}dx$ là tích phân suy rộng với cực điểm x=1.

Đặt $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln x}, g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Ta có $f(x), g(x)$ liên tục trên [1,2).

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln x}.\sqrt{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{x+1}}{\ln\left(x-1+1\right)}=2$ .Suy ra $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{\ln x}dx$ và $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Mà $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ hội tụ do $\alpha=\frac{1}{2}<1$ nên tp đã cho hội tụ.

c) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin^2 x}-1}dx$ là tích phân suy rộng với cực điểm x=0.

Đặt $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin^2 x}-1}, g(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$. Ta có $f(x), g(x)$ liên tục trên (0,1].

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x}}{e^{\sin^2 x}-1}}{\frac{1}{x\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{\sin^2 x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{e^{\sin^2 x}-1}.\frac{x^2}{\sin^2 x}=1$$

Suy ra $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin^2 x}-1}dx$ và $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Mà $\int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}dx$ phân kỳ do $\alpha=\frac{3}{2}>1$ nên tích phân đã cho phân kỳ.

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\cos^2 x}$ là tích phân suy rộng với hai cực điểm x=0 và $x=\frac{\pi}{2}$.

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\cos^2 x} = I_1 + I_2$

- Xét $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\cos^2 x}$.

Do $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{\sin x}\cos^2 x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2 x} = 1$ nên tích phân I_1 và tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ. Mà $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ do $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ .Vậy I_1 hội tụ.

- Xét $I_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}\cos^2 x}$

Do $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x}\cos^2 x} : \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}{\cos^2 x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{-2\cos x.\sin x}$

$= \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{-2\cos x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{2}{2\sin x} = 1$ (quy tắc Lôpitan)

Nên tích phân I_2 và tích phân $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Mà $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} dx$ phân kỳ do $\alpha = 2 > 1$. Vậy I_2 phân kỳ. Vậy tích phân đã cho phân kỳ.

Bài 22. Tính tích phân suy rộng

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$

b) $\int_0^{+\infty} e^{\sqrt{x}} dx$

Giải. a) Ta có

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0}\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{B\to+\infty}\int_{0}^{B}\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\lim_{A\to-\infty}\arctan x\Big|_A^0+\lim_{B\to+\infty}\arctan x\Big|_0^B=-\lim_{A\to-\infty}\arctan A+\lim_{B\to+\infty}\arctan B=\pi$$

b) Ta có $\int_0^{+\infty}e^{\sqrt{x}}dx=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A e^{\sqrt{x}}dx$. Tính $\int_0^A e^{\sqrt{x}}dx$. Đặt $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2, dx=2tdt$.

Khi $x=0\Rightarrow t=0$. Khi $x=A\Rightarrow t=\sqrt{A}$.

$$\int_0^A e^{\sqrt{x}}dx=\int_0^{\sqrt{A}}e^t.2tdt=2\int_0^{\sqrt{A}}td(e^t)=2t.e^t\Big|_0^{\sqrt{A}}-2\int_0^{\sqrt{A}}e^tdt=2\sqrt{A}.e^{\sqrt{A}}-2e^{\sqrt{A}}+2$$

$$=\left(2\sqrt{A}-2\right)e^{\sqrt{A}}+2$$

Suy ra $\int_0^{+\infty}e^{\sqrt{x}}dx=\lim_{A\to+\infty}\left[\left(2\sqrt{A}-2\right)e^{\sqrt{A}}+2\right]=+\infty$. Vậy tích phân đã cho phân kỳ.

Bài 23. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

a) $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}dx$ b) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$

Giải. a) Ta có $0<\frac{e^{-x}}{x^2}<\frac{1}{x^2},\ \forall x\in[1,+\infty)$, mà tích phân $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ hội tụ do $\alpha=2>1$ nên theo tiêu chuẩn so sánh tích phân đã cho hội tụ.

b) Ta có $0<\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\le\frac{1}{x^2},\forall x\in[1,+\infty)$. Tích phân $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ hội tụ do $\alpha=2>1$ nên theo tiêu chuẩn so sánh tích phân $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx$ hội tụ. Suy ra tích phân $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx$ hội tụ.

Bài 24. Xét sự hội tụ của tích phân suy rộng

a) $\int_1^{+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x^5+x^2+2}}dx$ b) $\int_1^{+\infty}x.e^{-x}dx$

Giải.

a) Đặt $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^5+x^2+2}}, g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $f(x)>0, g(x)>0, \forall x\in[1,+\infty)$ và $f(x), g(x)$ liên tục $\forall x\in[1,+\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x+1}{x^5+x^2+2}}.x^2=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{(x+1)x^2}{x^5+x^2+2}}=1$

Suy ra tích phân $\int\limits_1^{+\infty}\sqrt{\dfrac{x+1}{x^5+x^2+2}}dx$ và $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Mà tích phân $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$ hội tụ do $\alpha=2>1$ nên tích phân đã cho hội tụ.

b) Đặt $f(x)=x.e^{-x}, g(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $f(x)>0, g(x)>0, \forall x\in[1,+\infty)$ và $f(x), g(x)$ liên tục $\forall x\in[1,+\infty)$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}x.e^{-x}:\dfrac{1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}\overset{Lopital}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{e^x}=0$. Hơn nữa tích phân $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$ hội tụ do $\alpha=2>1$. Theo hệ quả thì tích phân đã cho hội tụ.

KẾT LUẬN

1) Báo cáo học thuật đã giới thiệu khái quát một số khái niệm cơ bản nhất về Tích phân suy rộng.

2) Báo cáo học thuật cũng đã giới thiệu được một số bài toán điển hình về TPSR.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1) *Tài liệu ôn tập Olympic Toán sinh viên*, Vũ Tiến Việt, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

2) *Một số chuyên đề ôn tập thi Olympic toán sinh viên (Phần 2, Giải tích),* Vũ Tiến Việt, Phan Thế Hải, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

3) *Tài liệu ôn tập Giải tích 1*, bộ môn Toán, ĐH Mỏ - Địa chất.