TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BỘ MÔN KỸ THUẬT CƠ KHÍ

BÁO CÁO HỌC THUẬT

(Mô hình hóa các trường vận tốc bằng các hàm đa thức)

Người báo cáo : TS. Nguyễn Văn Tuệ

Năm học : 2018 - 2019

1. Nội suy và xấp xỉ hàm

Một hàm $f(x)$ liên tục được xác định trên miền Ω. Chúng tôi tìm cách xấp xỉ nó bằng một hàm $f_n(x)$ với số lượng tham số cố định và hữu hạn $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$. Hàm xấp xỉ $f_n(x)$ được mô tả dưới dạng như sau :

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i(x) \tag{1}$$

với $\{P_i\}$ là một tập hợp các đa thức.

Có một vấn đề nảy sinh, đó là việc đánh giá chất lượng của phép xấp xỉ. Để thực hiện việc đó, trước tiên, người ta xác định sai số giữa hai hàm $f(x)$ và $f_n(x)$. Về hàm sai số, chúng tôi sử dụng tiêu chuẩn L_2, sai số giữa hai hàm được tính như sau :

$$\|f(x) - f_n(x)\|_2 = \sqrt{\langle f(x) - f_n(x) \mid f(x) - f_n(x)\rangle} \tag{2}$$

Từ các hàm xấp xỉ và hàm sai số, ta có thể xác định được hàm xấp xỉ tốt nhất $f_n(x)$ cho $f(x)$, có nghĩa là tập hợp các tham số $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ đảm bảo $\|f(x) - f_n(x)\|_2$ là nhỏ nhất theo chuẩn L_2 (sai số bình phương cực tiểu).

Trong nghiên cứu của chúng tôi, tích vô hướng giữa các véc tơ luôn được tính với hàm trọng số $\omega(x)$:

$$\langle f_1(x) \mid f_2(x)\rangle = \int_\Omega f_1(x) f_2(x) \omega(x) dx \tag{3}$$

với Ω là miền đã được định nghĩa.

2. Cơ sở đa thức

Trước tiên, chúng tôi giới hạn nghiên cứu với các trường hai chiều, hai thành phần (2D-2C).

Một trường chuyển động $\mathcal{F}$ được định nghĩa như sau :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \big(U(x,y), V(x,y)\big) \end{aligned} \tag{4}$$

Với $U : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ và $V : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là hai thành phần chuyển động ngang và dọc tại các điểm $(x, y) \in \Omega$.

Một họ hàm đa thức hai biến thực bậc D trong $\mathbb{R}[x, y]$ được định nghĩa như sau :

$$P_{IJ}(x,y) = \sum_{i=0}^{D} \sum_{j=0}^{D-i} a_{ij}(x)^i(y)^j \tag{5}$$

Trong đó

$I \in \mathbb{N}^+$ là bậc lớn nhất của đa thức theo x.

$J \in \mathbb{N}^+$ là bậc lớn nhất của đa thức theo y.

$\{a_{ij}\}$ là các hệ số thực của đa thức.

Như vậy, số bậc tổng của đa thức sẽ là : $D = I + J$.

Một họ các hàm trực giao có thể được tạo ra từ công thức đệ quy sau :

$$P_{n+1}(x) = (a_n x + b_n)P_n(x) - c_n P_{n-1}(x)$$

và

$$P_{IJ}(x,y) = P_I(x)P_J(y) \tag{6}$$

a_n, b_n, c_n là các giá trị tương ứng với các họ đa thức trực giao phổ biến được giới thiệu trong Bảng 1.

Quy tắc trực giao :

$$\langle P_{ij} \mid P_{kl} \rangle = \delta^{(i,j),(k,l)} \tag{7}$$

Với $\delta^{(i,j),(k,l)}$ là ký hiệu Kronecker được định nghĩa như sau :

$$\delta^{(i,j),(k,l)} = \begin{cases} 1 & nếu\ (i,j) = (k,l) \\ 0 & nếu\ (i,j) \neq (k,l) \end{cases} \tag{8}$$

Họ đa thức	Ω	$\omega(x,y)$	a_n	b_n	c_n
Legendre	$[-1;1]^2$	1	$\frac{2n+1}{n+1}$	0	$\frac{n}{n+1}$
Tchebychev (1er sorte)	$[-1;1]^2$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2(1-y)^2}}$	2	0	1
Tchebychev (2e sorte)	$[-1;1]^2$	$\frac{1}{\sqrt{(1-x)^2(1-y)^2}}$	2	0	1
Laguerre	$[0;\infty]^2$	$e^{-(x+y)}$	$\frac{-1}{n+1}$	$\frac{2n+1}{n+1}$	$\frac{n}{n+1}$
Hermite	$[-\infty;\infty]^2$	$e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$	2	0	$2n$

Bảng 1 Một số họ đa thức trực giao phổ biến.

$\mathcal{B} = \{P_{ij}\}_{i\in\{0..I\},j\in\{0..J\}}$ là tập hợp các đa thức trực giao. Gọi D là số bậc lớn nhất của cơ sở đa thức, các đa thức này được sắp xếp theo thứ tự tăng dần theo số bậc của x và y. Như vậy, một cơ sở hai chiều bậc D bao gồm tập các đa thức $\{P_{ij}\}$ với $i + j \leq D$:

$$\mathcal{B}_D = \{P_{00}; P_{01}; P_{02} \dots; P_{0D}; P_{10}; P_{11}; P_{12} \dots; P_{1(D-1)}; \dots; P_{(D-1)0}; P_{(D-1)1}; P_{D0}\} \qquad (9)$$

Số lượng các đa thức để tạo thành một cơ sở đa thức được xác định như sau :

$$n = \frac{(D+1)(D+2)}{2}$$

Công việc nghiên cứu của chúng tôi dựa trên một phần luân án Tiến sỹ của Martin Druon (Druon, 2009). Trong công việc của mình, Martin đã sử dụng cơ sở đa thức trực giao của Legendre để mô hình hóa sự chuyển động. Ưu điểm của các đa thức Legendre là xác định trên một miền hình vuông trong hệ tọa độ Descartes. Hơn nữa, hàm trọng số $\{\omega(x,y) = 1\}$ sẽ đơn giản và giảm đáng kể thời gian khi tính toán các hệ số chiếu.

Hình 1 dưới đây mô tả một cơ sở đa thức hai chiều :

$\mathcal{B}_D =$

	y^0	y^1	$\cdots$	$y^{(D-1)}$	y^D
x^0	$P_{0,0}$	$P_{0,1}$	$\cdots$	$P_{0,D-1}$	$P_{0,D}$
x^1	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$	$\cdots$	$P_{1,D-1}$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\iddots$		
$x^{(D-1)}$	$P_{D-1,0}$	$P_{D-1,1}$			
x^D	$P_{D,0}$				

Hình 1. Cơ sở đa thức hai chiều bậc D.

3. Các đa thức Legendre 1D và 2D

3.1 Các đa thức Legendre 1D

Các đa thức Legendre (1752-1833) là các đa thức trực giao trong khoảng $[-1,+1]$. Nếu P_n là đa thức Legendre bậc n và P_m là đa thức Legendre bậc m, ta có:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)dx = 0 \qquad \textit{nếu}\ \ n \neq m \tag{10}$$

$$\int_{-1}^{+1} \left(P_n(x)\right)^2 dx = \frac{2}{(2n+1)} \tag{11}$$

Dễ dàng nhận thấy rằng, nếu Q_p là một đa thức bậc $p\ <\ n$ thì :

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)Q_p(x)dx = 0$$

Và hai đa thức đầu tiên $P_0(x)$ và $P_1(x)$.

$$P_0(x) = 1 \tag{12}$$

$$P_1(x) = x \tag{13}$$

Các đa thức Legendre cũng có thể thu được nhờ công thức của Rodriguès (1794-1851).

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \tag{14}$$

Mối quan hệ dưới dạng đệ quy với 3 đa thức liên tiếp

Từ công thức của Bonnet, ta có :

$$(n + 1)P_{n+1}(x) - (2n + 1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \tag{15}$$

Từ biểu thức (11), cùng với hai đa thức đầu tiên (12) và (13) cho phép ta có được họ đa thức đầy đủ

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

…

Mối quan hệ dưới dạng đệ quy và đa thức dẫn xuất

Một số phép đệ quy liên quan đến các dẫn xuất được mô tả dưới dạng các biểu thức sau :

$$P'_n(x) = xP'_{n-1}(x) + nP_{n-1}(x) \tag{16}$$

$$nP_n(x) = xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) \qquad n \neq 0 \tag{17}$$

Hoặc dưới dạng kết hợp :

$$(2n + 1)P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) \qquad n \neq 0 \tag{18}$$

Từ đó, các biểu thức của các đa thức dẫn xuất được mô tả dưới dạng như sau :

$$P'_{2n}(x) = \sum_{k=1}^{n} (4k-1) P_{2k-1}(x) \qquad n \geq 1 \tag{19}$$

$$P'_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (4k+1) P_{2k}(x) \tag{20}$$

3.2 Các đa thức Legendre 2D

Các đa thức Legendre 2D bậc n là các đa thức trực giao trong miền $[-1,+1] \times [-1,+1]$, được xác định bởi :

$$P_{ij}(x,y) = P_i(x)P_j(y)\,; \qquad i + j = n$$

Trong đó $P_i(x)$ và $P_j(y)$ là các đa thức Legendre 1D.

Một hàm $u(x,y)$ liên tục trên miền $[-1,+1] \times [-1,+1]$, được chiếu lên cơ sở đa thức có bậc $\leq n$. Hay nói cách khác, chúng ta tìm cách mô hình hóa $u(x,y)$ bằng một đa thức có bậc $\leq n$, ký hiệu $u_n(x,y)$.

$$u_n(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} u_{ij} P_{ij}(x,y) \tag{21}$$

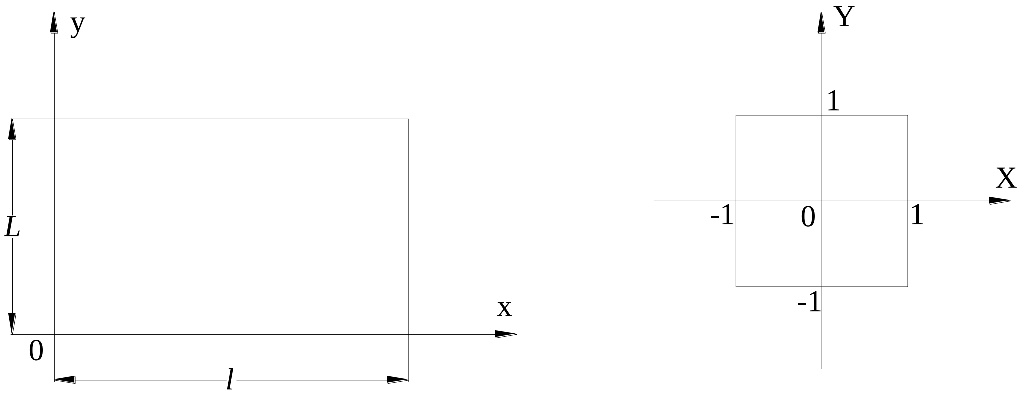
Trong đó các hệ số chiếu được đưa ra bởi công thức sau :

$$u_{ij} = \frac{\iint_{-1}^{+1} u(x,y) P_{ij}(x,y) dxdy}{\iint_{-1}^{+1} P_{ij}^2(x,y) dxdy} \tag{22}$$

4. Xấp xỉ trường vận tốc của dòng chảy

Chúng tôi có giá trị vận tốc đo được tại điểm m bất kỳ, trong hệ tọa độ (x,y) thuộc miền phẳng $\Omega = [0,l] \times [0,L]$. Bằng một phép biến đổi tỷ lệ, chúng tôi chuyển miền phẳng $\Omega = [0,l] \times [0,L]$ sang miền đa thức $S = [-1,+1] \times [-1,+1]$ với mỗi điểm M có tọa độ (X,Y) được tính như sau :

$$X = \frac{2}{l}x - 1; \qquad Y = \frac{2}{L}y - 1 \tag{23}$$



Hình 2: Miền thực và miền đa thức.

Lúc này, trường vận tốc $(u(x,y), v(x,y))$ trong miền Ω sẽ được chuyển sang miền đa thức S dưới dạng $(U(X,Y), V(X,Y))$, nơi mà mỗi điểm $M(X,Y)$ là một ánh xạ của điểm $m(x,y)$ với $U(X,Y) = u(x,y)$ và $V(X,Y) = v(x,y)$.

Một trong những lợi thế của việc sử dụng cơ sở đa thức trong phép chiếu (trực giao) là kết quả thu được hoàn toàn độc lập với đặc tính vật lý của dòng chảy.

Hình 3 : Mô hình giải thuật được sử dụng để mô hình hóa các trường véc-tơ.

Như vậy, tại mỗi một thời điểm ta sẽ thu được một hàm xấp xỉ bậc n :

$$U_n(X,Y,t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} U_{ij}(t) P_{ij}(X,Y) \tag{24}$$

$$V_n(X,Y,t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-i} V_{ij}(t) P_{ij}(X,Y) \tag{25}$$

trong đó, họ các hệ số chiếu $P_{ij}(X,Y)$ là cơ sở đa thức trực giao Legendre bậc n, và $U_{ij}(t), V_{ij}(t)$ là các hệ số chiếu.

Các hệ số chiếu thu được nhờ phép tích phân như sau :

$$U_{ij}(t) = \frac{\iint_S U(X,Y,t) P_{ij}(X,Y) dX dY}{\iint_S P_{ij}(X,Y) P_{ij}(X,Y) dX dY}$$

$$V_{ij}(t) = \frac{\iint_S V(X,Y,t) P_{ij}(X,Y) dX dY}{\iint_S P_{ij}(X,Y) P_{ij}(X,Y) dX dY}$$

Ví dụ, với một cơ sở đa thức có bậc $n = 2$, ta có :

$$U_2(X,Y,t) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2-i} U_{ij}(t) P_{ij}(X,Y)$$

$$V_2(X,Y,t) = \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2-i} V_{ij}(t) P_{ij}(X,Y)$$

Lúc này, các hàm mô hình hóa được xác định như sau :

$$U_2(t) = U_{00}(t).P_{00} + U_{01}(t).P_{01} + U_{02}(t).P_{02} + U_{10}(t).P_{10} + U_{11}(t).P_{11} + U_{20}(t).P_{20}$$

$$V_2(t) = V_{00}(t).P_{00} + V_{01}(t).P_{01} + V_{02}(t).P_{02} + V_{10}(t).P_{10} + V_{11}(t).P_{11} + V_{20}(t).P_{20}$$

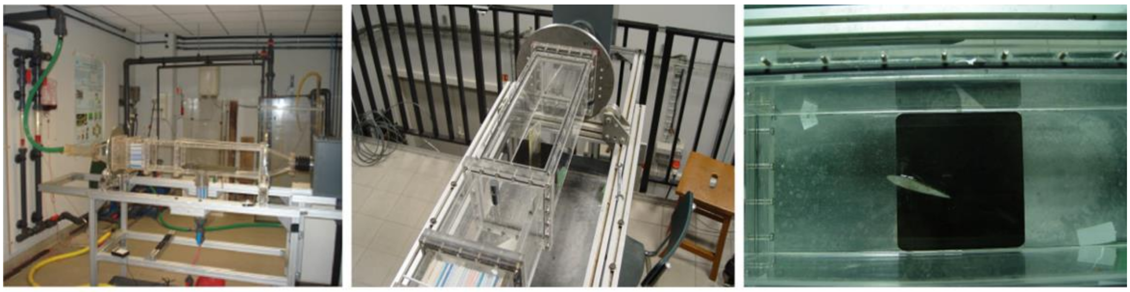
với các giá trị của cơ sở đa thức : $P_{00} = \frac{1}{2}$; $P_{01} = \frac{\sqrt{3}}{2}Y$; $P_{02} = \frac{\sqrt{5}}{4}(3Y^2 - 1)$;

$$P_{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}X; \quad P_{11} = \frac{3}{2}XY; \quad P_{20} = \frac{\sqrt{5}}{4}(3X^2 - 1)$$

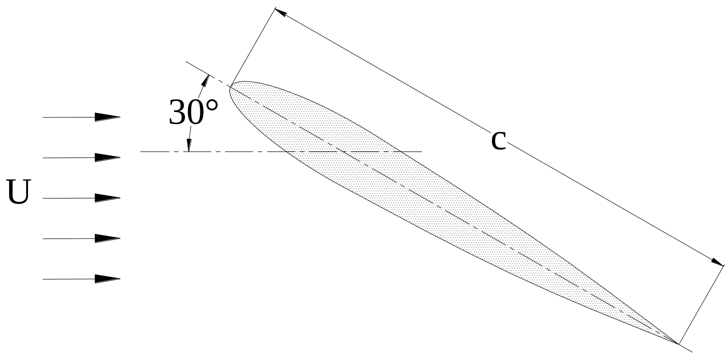
Để có sự đánh giá cho công việc mà chúng tôi thực hiện, một tập số liệu thực nghiệm được lấy từ kết quả nghiên cứu trên một profil NACA0012 (đặt nghiêng cố định trong nước với góc tấn 30^o) của R. Leroux (Leroux, 2012). (Hình 4)

Với phương pháp *2D-2C PIV*, R. Leroux (Leroux, 2012) đã thực hiện với profil NACA0012 có chiều dài dây cung 60mm, đặt trong một ống thủy động có tiết diện vuông 160x160mm. Số Reynolds Re = 1000.

Nguồn Laser sử dụng trong phép đo là Nd-YAG của hãng Quantel với công suất 2×120mJ. Khoảng thời gian giữa hai lần chụp liên tiếp Δt ($\Delta t = 78\ ms$ trong trường hợp $Re = 1000$). Hai camera tốc độ cao với độ phân giải 2048×2048 pixels. Các hạt polyamide có đường kính trung bình 15µm và khối lượng riêng $\rho = 1{,}06 g/cm^3$.



Hình 4 : Sơ đồ thí nghiệm của R. Leroux (Leroux, 2012).



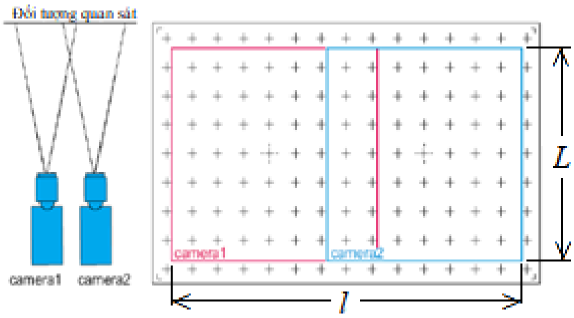
Hình 5 : Profil NACA0012 đặt trong nước với góc tấn 30°

Để đạt được số Re = 1000, vận tốc dòng chảy cần đạt :

$$Re = \frac{U.c}{\nu} = 1000$$

Với : chiều dài dây cung $c = 60mm$; khối lượng riêng của hạt polyamide $\rho = 10^{-6} kg/mm^3$; độ nhớt động của nước $\nu = 1mm^2/s \rightarrow U = 16{,}667mm/s$

Miền quan sát :



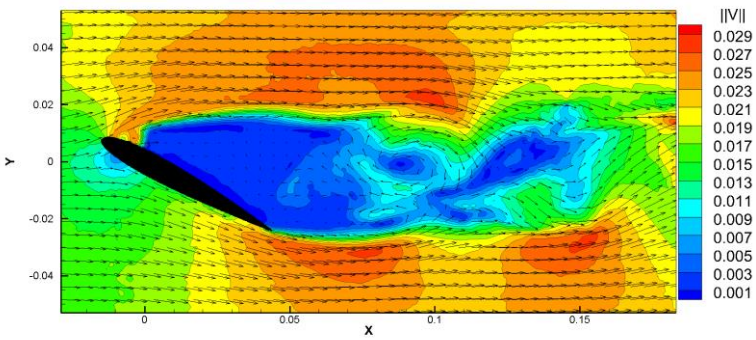
$l = 211{,}955mm\,;\ L = \ 105{,}978mm.$

Hình 6 : Sơ đồ bố trí các camera trong nghiên cứu của R. Leroux.

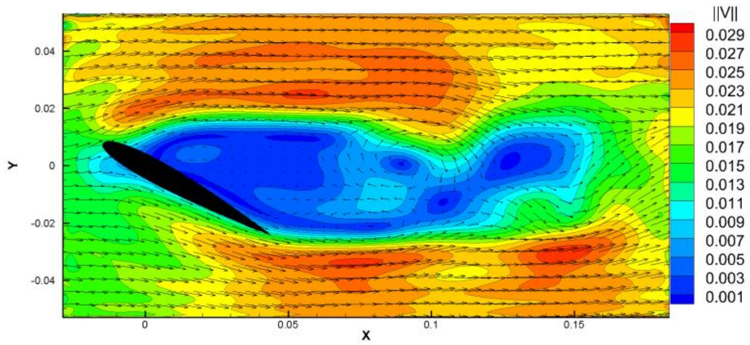
Ở giai đoạn này, trường véc-tơ được R. Leroux định hình trong một miền 233×117 điểm, với khoảng cách mỗi điểm $\Delta x = \Delta y = 0{,}9136mm$

Số ảnh chụp là 101 ảnh, khoảng thời gian giữa hai ảnh liên tiếp : $\Delta t = 0.07813\ s.$

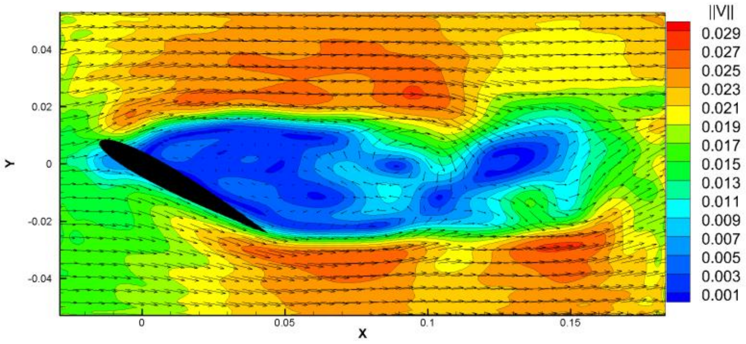
Kết quả mà chúng tôi thực hiện mô hình hóa cho file ảnh 10 được mô tả dưới đây (Hình 7). Bậc đa thức được áp dụng là 20 và 25.



Trường véc-tơ thực nghiệm gốc



Trường vận tốc tái tạo với bậc đa thức 20.



Trường vận tốc tái tạo với bậc đa thức 25.

Hình 7 : Trường vận tốc được mô hình hóa bởi hàm đa thức.

Dễ dàng nhận thấy, với bậc đa thức là 25 kết quả của trường vận tốc được mô hình hóa khá chi tiết và tương đồng với trường vận tốc thực nghiệm gốc.

KẾT LUẬN

- Sử dụng hàm đa thức trực giao trong phép xấp xỉ các hàm vận tốc là một giải pháp đơn giản và hiệu quả.
- Kết quả phép chiếu hoàn toàn độc lập với các đặc tính vật lý của dòng chảy.
- Với các hàm vận tốc được mô hình hóa, việc tính toán tiếp theo để xác định các trường áp suất, dựa vào các phương trình cơ bản (như Navier-Stokes) là hết sức đơn giản.
- Phương pháp có thể dễ dàng nâng cấp để áp dụng cho các bài toán 3D.