TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT

BỘ MÔN TOÁN – KHOA KHCB

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ HÀM JUKOVSKI

ThS. Nguyễn Thị Lan Hương

Hà Nội, 06/2023

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Cơ sở lý thuyết hàm biến phức (LTHBP) được đặt nền móng từ giữa thế kỷ XVIII bởi các công trình của L. Euler. Với tư cách một nhánh độc lập, LTHBP được hình thành vào giữa thế kỷ XIX nhờ các công trình của O. Cauchy, C. Weierstrass và B. Riemann.

Ngày nay LTHBP là một trong những phần quan trọng nhất của toán học. Đó là khoa học vừa cổ điển vừa hiện đại, vừa gắn bó mật thiết với các nhánh hiện đại nhất của toán học lý thuyết lại vừa gắn bó với nhiều bài toán vật lý và cơ học cụ thể. Tư tưởng và kết quả của nó đã thâm nhập sâu vào nhiều phần khác nhau của toán học. Các phương pháp của LTHBP đã trở thành quen thuộc cả trong nhiều ngành ứng dụng như thủy động học,

Khái niệm hàm biến phức là một trường hợp riêng của khái niệm về hàm, trong đó hàm Jukovski là một hàm đặc biệt với nhiều đặc điểm thú vị.

Vì vậy, báo cáo học thuật này nhằm giới thiệu tổng quan về hàm Jukovski.

1. ĐỊNH NGHĨA HÀM BIẾN PHỨC

Trên mặt phẳng phức mở rộng của biến z và w (đều được ký hiệu là $\overline{\mathbb{C}}$) ta xét lần lượt các tập hợp D và D^* (có thể chứa cả điểm vô cùng).

Định nghĩa 1.3.1. Giả sử $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ là một tập hợp tùy ý cho trước. Một *hàm biến phức*

$$f : D \to \mathbb{C}$$

là một quy tắc cho ứng mỗi điểm $z \in D$ với một điểm duy nhất $w = f(z) \in \mathbb{C}$.

Để chỉ một hàm biến phức, ta còn dùng các ký hiệu sau đây:

$$z \mapsto f(z),$$
$$w = f(z), \ldots$$

CÁC VÍ DỤ

Ánh xạ $z \mapsto f(z) = az + b$ xác định một hàm *nguyên tuyến tính* trong $\mathbb{C}$.

Ánh xạ $z \mapsto f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $c \neq 0$ xác định một hàm *phân tuyến tính* trên tập hợp $D = \mathbb{C} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c}, \infty \right\}$ (giả thiết $bc - ad \neq 0$).

Ánh xạ $z \mapsto \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ xác định một hàm thường gọi là *hàm Jukovski* trên tập $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Trong trường hợp khi $w = f(z) \in D^*$, $\forall z \in D$ thì ta viết $f : D \to D^*$, và nói rằng điểm $w \in D^*$ là ảnh của điểm $z \in D$, còn z là nghịch ảnh của điểm w. Để chỉ nghịch ảnh, ta dùng ký hiệu $z = f^{-1}(w)$.

Theo định nghĩa hàm đã trình bày ở trên, mọi hàm đều là *hàm đơn trị:* nghĩa là với mỗi giá trị của z ta có tương ứng một giá trị duy nhất của $f(z)$. Khái niệm hàm đa trị sẽ được trình bày trong chương V.

Giả sử tập hợp $D \subset \mathbb{C}$ và $f : D \to \mathbb{C}$ là hàm được cho trên D. Hiển nhiên rằng phần thực, phần ảo của f là những số thực phụ thuộc vào z, $z \in D$. Đó là những hàm thực biến phức z:

$$\left.\begin{aligned} u(z) &: D \to \mathbb{R}, \\ v(z) &: D \to \mathbb{R}, \end{aligned}\right\} \quad D \subset \mathbb{C}$$

và do đó có thể viết $f(z) = u(z) + iv(z)$.

Vì mặt phẳng $\mathbb{C}$ được đồng nhất với mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ nên mỗi $z \in D$ được đồng nhất với $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Như vậy:

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Ngược lại, nếu trên tập D cho hai hàm nhận giá trị thực độc lập với nhau: $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$ thì cũng có nghĩa là đã cho một hàm phức

$$w = u + iv = u(x, y) + iv(x, y) = f(x, y) = f(z).$$

Do đó, việc cho hàm f trên D tương đương với việc cho hai hàm thực hai biến thực:

$$u = u(z) = u(x, y) : D \to \mathbb{R},$$
$$v = v(z) = v(x, y) : D \to \mathbb{R}.$$

Từ nhận xét trên đây, toàn bộ lý thuyết hàm biến phức có thể giải thích như là lý thuyết các cặp hàm của hai biến thực x và y.

Định nghĩa 1.3.2. Một hàm

$$f : D \to D^*$$

được gọi là đơn trị một-một hay *đơn diệp* nếu các ảnh của những điểm khác nhau của D là khác nhau. Cụ thể hơn: $f(z)$ là đơn diệp nếu hai điểm bất kỳ $z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$, thì ảnh $f(z_1) \neq f(z_2)$. Điều đó tương đương với điều kiện nghịch ảnh của mỗi điểm thuộc D^* chỉ gồm đúng một điểm.

Từ định nghĩa 1.3.2 ta thấy rằng ánh xạ $w = f(z)$ là ánh xạ đơn diệp nếu không những điểm z_1 có một ảnh duy nhất w_1 mà điểm $w_1 \in D^*$ bất kỳ cũng chỉ là ảnh của một điểm $z_1 \in D$.

Trong ánh xạ đơn diệp $w = f(z)$, nghịch ảnh $z = f^{-1}(w)$ có thể xem như là một hàm đơn trị biến w. Hàm này được gọi là *hàm ngược* đối với hàm $w = f(z)$. Hiển nhiên đối với hàm đơn trị (nhưng không đơn diệp) ta cũng có thể nói về hàm ngược $z = f^{-1}(w)$, nhưng khi đó hàm ngược này không đơn trị. Rõ ràng là ánh xạ $w = f(z)$ là ánh xạ đơn diệp khi và chỉ khi cả hai hàm f và f^{-1} đều đơn trị.

Định nghĩa 1.3.3. Giả sử các hàm

$$f : D \to D^*; \quad g : D^* \to D^{**}$$

được cho theo sơ đồ

$$D \xrightarrow{f} D^* \xrightarrow{g} D^{**} \quad (f(D) \subseteq D^*).$$

Khi đó ta có thể xác định được một hàm

$$h : D \to D^{**}$$

bằng cách cho ứng mỗi điểm $z \in D$ với điểm

$$h(z) = g[f(z)] \in D^{**}.$$

Hàm h này được gọi là *hàm hợp* của các hàm f và g đã cho và được ký hiệu là

$$h = g \circ f : D \to D^{**}.$$

Chẳng hạn, nếu ánh xạ $w = f(z)$ đơn diệp và $f^{-1}(w) = \varphi(w)$ là hàm ngược của nó thì

$$\varphi[f(z)] = z.$$

2. CÁC VÍ DỤ VỀ ÁNH XẠ ĐƠN DIỆP

Bây giờ ta sẽ làm sáng tỏ những khái niệm đưa ra ở trên bằng một số ví dụ.

a. Ánh xạ phân tuyến tính. Ánh xạ

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1.20}$$

$$ad - bc \neq 0, \tag{1.21}$$

trong đó a, b, c, d là những số phức xác định thỏa mãn điều kiện $ad - bc \neq 0$, được gọi là ánh xạ phân tuyến tính.

Ánh xạ (1.20) đơn diệp khi và chỉ khi các hệ số a, b, c, d thỏa mãn hệ thức (1.21). Thật vậy, giả sử $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$. Khi đó

$$w_1 = \frac{az_1+b}{cz_1+d}, \quad w_2 = \frac{az_2+b}{cz_2+d}$$

và do đó

$$w_2 - w_1 = \frac{(bc - ad)(z_1 - z_2)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \cdot$$

Từ đó suy ra điều cần khẳng định.

Vì vậy, hệ thức (1.21) là điều kiện cần và đủ để tồn tại ánh xạ ngược của (1.20), trong đó:

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a} \cdot$$

Đặc biệt, khi $c = 0$, $d = 1$, từ (1.21) ta có

$$a \neq 0. \tag{1.22}$$

Điều kiện (1.22) đảm bảo tính đơn diệp của ánh xạ tuyến tính $w = az + b$ với ánh xạ ngược là

$$z = \frac{w}{a} - \frac{b}{a} \cdot$$

Khi xét ánh xạ (1.20), ta loại trừ trường hợp $d = c = 0$. Trong các trường hợp còn lại, điều kiện $ad - bc = 0$ tương đương với điều kiện

$$w = \text{const}$$

và do đó nó không có miền đơn diệp.

b. Ánh xạ $w = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Để tìm miền đơn diệp của ánh xạ này, ta xét các giá trị:

$$z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1} \quad \text{và} \quad z_2 = |z_1|e^{i\varphi_2}.$$

Khi đó

$$w_1 - w_2 = |z_1|^n(e^{in\varphi_1} - e^{in\varphi_2}).$$

Rõ ràng là ánh xạ $w = z^n$ đơn diệp trong mỗi góc với độ mở $\dfrac{2\pi}{n}$ với đỉnh tại gốc tọa độ.

c. Ánh xạ Jukovski. Ánh xạ

$$w = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \tag{1.23}$$

được gọi là ánh xạ Jukovski. Nó đơn diệp trong miền D nào đó khi và chỉ khi miền D không chứa những cặp điểm khác nhau z_1, z_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$z_1 z_2 = 1. \tag{1.24}$$

Thật vậy, giả sử

$$\frac{1}{2}\Big(z_1 + \frac{1}{z_1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(z_2 + \frac{1}{z_2}\Big)$$

khi đó

$$(z_1 - z_2)\Big(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\Big) = 0.$$

Từ đó: hoặc $z_1 = z_2$ hoặc $z_1 z_2 = 1$.

Về mặt hình học, đẳng thức (1.24) chứng tỏ rằng điểm $z_2 = \dfrac{1}{z_1}$ thu được bằng phép đối xứng kép qua đường tròn đơn vị và trục thực:

$$w = \frac{1}{\overline{z}}; \quad w = \overline{w}_1.$$

Như vậy, *ánh xạ* (1.23) *đơn diệp trong miền D khi và chỉ khi D không chứa những cặp điểm khác nhau mà điểm này thu được từ điểm kia nhờ phép đối xứng kép: qua đường tròn đơn vị và trục thực.*

Ánh xạ (1.23) đơn diệp trong các miền sau đây:

$\{|z| > 1\}$ - phần ngoài hình tròn đơn vị,

$\{|z| < 1\}$ - hình tròn đơn vị.

3. HÀM JUKOVSKI

Hàm

$$w = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \tag{2.60}$$

được gọi là hàm Julovski. Hàm này chỉnh hình tại mọi điểm $z \neq 0, \infty$; trong đó

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{z^2}\Big)$$

và có cực điểm đơn tại các điểm $z = 0; \infty$. Do đó hàm Jukovski đơn diệp tại mỗi điểm $z \neq \pm 1$ vì $w(z) \neq 0$ khi $z \neq \pm 1$ và không đơn diệp tại điểm $z = \pm 1$.

Ta lưu ý rằng hàm Jukovski đơn diệp trong miền D nào đó khi và chỉ khi miền D không chứa những cặp điểm khác nhau z_1, z_2 liên hệ với nhau bởi đẳng thức $z_1 z_2 = 1$.

Ta nhận xét rằng vì $w(z) \equiv w\Big(\dfrac{1}{z}\Big)$ nên ảnh của miền D và miền $\overline{D} = \Big\{t = \dfrac{1}{z} : z \in D\Big\}$ là trùng nhau. Để khảo sát ánh xạ (2.60) ta xét các họ đường cong là: họ các đường tròn $\{|z| = r\}$ và họ các tia $\{\arg z = \varphi\}$.

Đầu tiên ta tìm ảnh của họ đường tròn.

Ta đặt $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$ và thu được

$$u + iv = \frac{1}{2}\Big(re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta}\Big),$$

hay là

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)\cos\theta \\ v &= \frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{2.61}$$

Ta xét đường tròn

$$\gamma(\rho) = \big\{z = \rho e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\big\}, \tag{2.62}$$

($\rho > 0$ là số cố định). Từ (2.61) suy ra rằng qua ánh xạ Jukovski, ảnh của đường tròn (2.62) là elip

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big)\cos\theta, \\ v &= \frac{1}{2}\Big(\rho - \frac{1}{\rho}\Big)\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

với các bán trục là

$$a(\rho) = \frac{1}{2}\Big(\rho + \frac{1}{\rho}\Big), \quad b(\rho) = \frac{1}{2}\Big|\rho - \frac{1}{\rho}\Big|$$

và với các tiêu điểm là $w = \pm 1$ (vì $a^2(\rho) - b^2(\rho) = 1$). Bằng cách khử tham số θ từ phương trình (2.63) ta thu được dạng chính tắc của phương trình

elip

$$\frac{u^2}{a^2(\rho)} + \frac{v^2}{b^2(\rho)} = 1, \quad \rho \neq 1. \tag{2.64}$$

1. Trường hợp $0 < \rho < 1$. Vì khi $\rho < 1$ đại lượng $r - \dfrac{1}{r} < 0$ cho nên từ (2.63) suy ra rằng khi vòng quanh đường tròn $\gamma(\rho)$ theo hướng dương thì elip tương ứng trong mặt phẳng w sẽ chạy theo hướng âm. Thật vậy khi $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ ta có $u > 0$ và giảm từ $a(\rho)$ đến 0, còn $v < 0$ và giảm từ 0 đến $-b(\rho)$. Khi $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ thì u tiếp tục giảm từ 0 đến $-a(\rho)$ còn v tăng từ $-b$ đến 0. Khi $\pi < t < \dfrac{3\pi}{2}$, u tăng từ $-a$ đến 0, còn v tăng từ 0 đến b; cuối cùng khi $\dfrac{3\pi}{2} < t < 2\pi$ ta có u tăng từ 0 đến a, còn v giảm từ b đến 0.

2. Trường hợp $r > 1$. Trong trường hợp này hướng của đường tròn (2.62) và elip - ảnh của nó trong mặt phẳng w là trùng nhau và chạy theo hướng dương.

3. Trường hợp $r = 1$. Trong trường hợp này đường tròn $\{|z| = 1\}$ cũng biến thành elip với các bán trục $a(\rho) = 1$, $b(\rho) = 0$ nghĩa là biến thành nhát cắt $[-1, +1] \subset \mathbb{R}$.

Bây giờ ta xét các tia

$$z = re^{i\alpha}, \quad 0 < r < \infty \tag{2.65}$$

(α là số cố định). Qua ánh xạ Jukovski ảnh của tia (2.65) là đường cong

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big)\cos\alpha, \\ v &= \frac{1}{2}\Big(r - \frac{1}{r}\Big)\sin\alpha. \end{aligned}\right\} 0 < r < +\infty \tag{2.66}$$

Bằng cách khử tham số r từ (2.66) ta thu được

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{2.67}$$

Đường cong (2.67) là đường hypecbôn với tiêu điểm tại $w = \pm 1$, dễ dàng chứng minh rằng các cặp đường kính đối xứng với nhau qua các trục tọa độ

(lập nên từ các bán kính

$$z = \pm r(\cos\alpha \pm i\sin\alpha), \quad 0 \leqslant r < 1)$$

được ánh xạ thành các hypecbôn không kể đỉnh, với tiêu điểm ± 1 và các bán trục $|\cos\alpha|$, $|\sin\alpha|$.

Khi $\alpha = 0$ ta có

$$u = \frac{1}{2}\Big(r + \frac{1}{r}\Big), \quad v = 0 \quad (0 \leqslant r < 1).$$

Do đó ảnh của đường kính nằm ngang của hình tròn đơn vị là khoảng vô hạn của trục đi từ điểm -1 đến điểm $+1$ qua ∞.

Khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ta có

$$u = 0, \quad v = -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{r} - r\Big), \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Từ đó dễ dàng suy ra ảnh của đường kính thẳng đứng là toàn bộ trục ảo trừ gốc tọa độ.

Hiển nhiên rằng qua ánh xạ Jukovski hai họ đường cong (2.64) và (2.67) trực giao với nhau do tính bảo giác của ánh xạ (2.60).

Ta có định lý sau đây:

Định lý 2.4.12. *Hàm Jukovski* $w = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$:

1. *Ánh xạ đường tròn* $\{|z| = \rho\}$ *thành elip* (2.64) $0 < \rho < 1$.

2. *Ánh xạ bảo giác hình tròn đơn vị* $\{|z| < 1\}$ *lên toàn bộ mặt phẳng đóng trừ nhát cắt theo đoạn* $[-1, +1] \subset \mathbb{R}$.

Định lý 2.4.13. *Hàm Jukovski (2.60) ánh xạ bảo giác phần ngoài của hình tròn đơn vị lên toàn bộ mặt phẳng w với nhát cắt theo đoạn $[-1, +1]$ của trục thực.*

Nhận xét 2.4.6. Tại các điểm $z = \pm 1$, ánh xạ Jukovski không bảo giác. Thật vậy từ (2.60) ta có

$$\begin{aligned} \frac{w-1}{w+1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1} &= \frac{z^2+1-2z}{z^2+1+2z} \\ &= \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Bây giờ ta đặt

$$\zeta = \frac{z-1}{z+1}; \quad \omega = \zeta^2; \quad w = \frac{1+\omega}{1-\omega}\cdot \tag{2.69}$$

Từ đó ta suy ra rằng ánh xạ Jukovski là hợp của ba ánh xạ (2.69). Ánh xạ thứ nhất và thứ ba bảo giác khắp nơi trên $\overline{\mathbb{C}}$, ánh xạ thứ hai không bảo giác tại điểm $\zeta = 0$ (tương ứng với điểm $z = 1$) và tại điểm $\zeta = \infty$ (tương ứng với điểm $z = -1$).

Bây giờ ta xét ánh xạ ngược với ánh xạ Jukovski. Giải phương trình (2.60) đối với z, ta tìm được

$$z = w + \sqrt{w^2 - 1}$$

như vậy hàm

$$w = z + \sqrt{z^2 - 1} \tag{2.70}$$

là hàm ngược đối với hàm Jukovski. Hàm này là hàm đa trị: mỗi điểm z sẽ tương ứng với hai giá trị w_1 và w_2 liên hệ với nhau bởi hệ thức

$$w_1 w_2 = 1.$$

KẾT LUẬN

Báo cáo học thuật đã giới thiệu khái quát một số vấn đề cơ bản nhất về hàm Jukovski.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ahn, T., Gaussier, H., Kim, K.-T.: Positivity and completeness of invariant metrics. J. Geom. Anal. **26**(2),1173-1185(2016)
2. Bedford, E., Pinchuk, S.: Convex domains with noncompact groups of automorphisms. Math. Sb. **185**(5),3-26(1994) translation in Russian Acad. Sci. Sb. Math. 82(1995), no. 1,1-20
3. Bell, S., Ligocka, E.: A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mapings. Invent. Math. **57**(3), 283-289 (1980)
4. Berteloot, F.: Characterization of models in $\mathbb{C}^2$ by their automorphism groups. Int. J. Math. 5(5), 619-634 (1994)
5. Catlin, D.: Global regularity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem. Proc. Sympos. Pure Math. **41**, 39-49 (1984)
6. Catlin, D.:Boundary invariants of pseudoconvex domains. Ann. Math. **120**(3), 529-586 (1984)
7. D'Angelo, J.P.: A remark on finite type conditions, to appear. J. Geom. Anal. **25**(3), 1701-19719
8. Fu, S., Isaev, A., Krantz, S.: Reinhardt domains with non-compact automorphism groups. Math. Res. Lett. **3**(1), 109-122 (1996)
9. Fu, S., Isaev, A., Krantz, S.: Examples of domains with non-compact automorphism groups. Math. Res. Lett**. 3**(5), 609-617 (1996)
10. Gaussier, H.: Characterization of convex domains with noncompact automorphism group. Michigan Math. J. **44**(2), 375-388 (1997)
11. Gaussier, H.: Tautness and complete hyperbolicity of domains in $\mathbb{C}^n$. Proc. Am. Math. Soc. **127**(1) 105-106 (1999)
12. Herbort, G.: On the Bergman distance on model domains in $\mathbb{C}^n$. Ann. Pol. Math. **116**(1), 1-36 (2016)