BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA NHÓM TỰ ĐẲNG CẤU TRONG C^n

NGUYỄN THỊ LAN HƯƠNG - HUMG

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lịch sử phát triển của việc nghiên cứu nhóm tự đẳng cấu của các đa tạp phức có thể chia thành hai giai đoạn.

Kết quả chủ yếu trong giai đoạn này là đã chỉ ra những tính chất tô pô quan trọng của nhóm các tự đẳng cấu của đa tạp phức.

Giai đoạn đầu: từ cuối thế kỷ 19 cho đến cuối thập niên 70 của thế kỷ trước bởi các công trình của H. Poincare, H. Cartan, S. Kobayashi,…

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lịch sử phát triển của việc nghiên cứu nhóm tự đẳng cấu của các đa tạp phức có thể chia thành hai giai đoạn.

Giai đoạn thứ hai hình thành và phát triển từ thập niên 80 của thế kỷ trước, mở đầu bởi các công trình của E. Bedford và S. Pinchuk.

Sau này, phương pháp của E. Bedford và S. Pinchuk được mở rộng và phát triển bởi các nhà toán học như: S. Krantz, A. Kodama, F. Berteloot, K. T. Kim, H. Gaussier,… Phương pháp được sử dụng chủ yếu là phương pháp scaling của Pinchuk. Thành công chính của giai đoạn này là tác giả đã phân loại được các miền bị chặn kiểu hữu hạn trong C^n

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Cho Ω là một miền trong C^n . Tập tất cả các tự đẳng cấu (song chỉnh hình từ Ω vào Ω) của Ω, kí hiệu bởi Aut(Ω) lập thành một nhóm với phép toán hợp thành. Hơn nữa, Aut(Ω) cũng là một nhóm tôpô với tôpô hội tụ đều trên các tập con compact (tức là tôpô compact-mở).

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các nghiên cứu trong mấy thập kỉ qua chỉ ra rằng, hình học của miền được xác định bởi cấu trúc của nhóm tự đẳng cấu, tức là biết được nhóm Aut(Ω) ta có thể suy ra được.

Vì vậy, việc tính hoặc mô tả nhóm tự đẳng cấu là cần thiết.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Với hầu hết các miền, việc tính các nhóm tự đẳng cấu không đơn giản và mới chỉ thực hiện được trong một số trường hợp cụ thể.

* Trong mặt phẳng phức, nhóm tự đẳng cấu của đĩa đơn vị được tính toán dễ dàng.

* Đối với các miền trong không gian phức với chiều ≥ 2, đa đĩa Δ^n và hình cầu đơn vị B^n cũng được mô tả chi tiết.

* Hướng nghiên cứu của tôi là mô tả nhóm tự đẳng cấu của một số lớp miền trong C^n.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Báo cáo Học thuật trình bày 02 vấn đề

1. Một số khái niệm cơ bản

2. Một số kết quả nghiên cứu kinh điển

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.1 *Hàm f được gọi là C-khả vi tại điểm $z_0 \in \Omega$ nếu tồn tại giới hạn*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Trong trường hợp này, ta nói rằng f có đạo hàm theo biến phức tại điểm z_0 và ký hiệu là

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.2

i) Hàm f được gọi là hàm chỉnh hình tại điểm z_0 *nếu nó là C-khả vi tại một lân cận nào đó của điểm* z_0.

ii) Hàm f được gọi là chỉnh hình trong miền Ω *nếu nó chỉnh hình tại mọi điểm của miền ấy.*

iii) Tập hợp các hàm chỉnh hình trong miền Ω *ký hiệu là* $H(\Omega)$.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.3

i) Hàm f: $\Omega_1 \to \Omega_2$ *được gọi* là hàm song *chỉnh* hình *nếu* nó là *một* song ánh *chỉnh* hình *từ* Ω_1 vào Ω_2.

ii) *Nếu* $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ thì *f được gọi* là *tự đẳng cấu của* Ω và *ký hiệu* là Aut(Ω).

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.4 *Hàm u: $\Omega \to R$ (hoặc C) được gọi là điều hòa nếu nó là C^2* và

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.5 *Hàm u: $\Omega \to R$ (hoặc C) được gọi là điều hòa dưới nếu nó là C^2 và*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} \geq 0.$$

Ví dụ 3 . Hàm $u(x, y) = x^2 + y^2$ là điều hòa dưới trên R^2.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.6 *Gọi Ω là một miền trong C^n. Trong một lân cận đủ bé U của điểm biên p $\in \partial\Omega$, ta có thể viết*

$$\Omega \cap U = \{z \in U : \rho(z) < 0\},$$

trong đó ρ là hàm thỏa mãn $\nabla\rho \neq 0$ trên $\partial\Omega \cap U$. Khi đó:

i) Hàm ρ được gọi là hàm xác định biên của miền Ω trong lân cận của p.

ii) Ta nói rằng miền Ω có biên trơn lớp C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ tại p nếu hàm xác định biên ρ trơn lớp C^k tại p.

iii) Biên $\partial\Omega$ được gọi là trơn lớp C^k nếu nó trơn lớp C^k tại mọi điểm.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.7 *Tập* $S \subset R^N$ *được gọi là lồi nếu với mọi* $P, Q \in S$ *và* $0 \leq \lambda \leq 1$ *thì* $(1 - \lambda)P + \lambda Q \in S$.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.8 *Cho* $\Omega \subset R^N$ *có biên trên lớp* C^1 *và* ρ *là hàm xác định lớp* C^1*. Cho p* $\in \partial\Omega$*, bộ N số thực* $w = (w_1, \ldots\ldots, w_N)$ *được gọi là véc tơ pháp tuyến của biên* $\partial\Omega$ *tại p nếu*

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}(p).w_j = 0$$

Khi đó ta viết w $\in T_p(\partial\Omega)$.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.9 *Miền* $G \subset C^n$ *với biên trên lớp* C^2 *được gọi là giả lồi tại* $p \in \partial G$ *nếu tồn tại hàm xác định biên* ρ*, tức là* $\Omega \cap U = \{\rho < 0\}$ *với* U *là một lân cận của p sao cho*

$$L_\rho(p)(w) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial z_i \partial \overline{z}_i} w_i \overline{w}_i \geq 0$$

với mọi $w \in C^n$ *thỏa mãn*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(p)}{\partial z_j} w_j = 0$$

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.10 *Miền $G \subset C^n$ với biên trên lớp C^2 được gọi là giả lồi chặt tại $p \in \partial G$ nếu tồn tại hàm xác định biên ρ, tức là $\Omega \cap U = \{\rho < 0\}$ với U là một lân cận của p sao cho*

$$L_\rho(p)(w) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial z_i \partial \overline{z_i}} w_i \overline{w}_i > 0$$

Với mọi $w \in C^n \setminus \{0\}$ thỏa mãn

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(p)}{\partial z_j} w_j = 0$$

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.11 *Một điểm p* $\in \partial\Omega$ *được gọi là điểm tụ quỹ đạo nếu tồn tại dãy* $\{f_j\}$ $\subset Aut(\Omega)$ *và tồn tại q* $\in \Omega$ *sao cho* $f_j(q) \to p$ *khi* $j \to \infty$.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.12 *Cho $\Omega \subset C^n$ là một miền trơn C^∞ và điểm p $\in \partial\Omega$. Khi đó, kiểu D'Angelo $\tau(\partial\Omega, p)$ của $\partial\Omega$ tại p được định nghĩa như sau*

$$\tau(\partial\Omega, p) = sup_\gamma \frac{\upsilon(\rho o \gamma)}{\upsilon(\gamma)}$$

ở đó ρ là một hàm được xác định cho Ω trong một lân cận của p, supremum được lấy trên tất cả các đường cong chỉnh hình khác hằng γ: $(C, 0) \rightarrow (C^n, p)$.

Ta nói rằng p là điểm hữu hạn nếu $\tau(\partial\Omega, p) < \infty$ và là điểm vô hạn nếu ngược lại.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.13 *Cho Ω, D là các đa tạp phức.*

i) Dãy các ánh xạ chỉnh hình $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset Hol(\Omega, D)$ *gọi là phân kỳ compact nếu với mỗi tập con compact* $K \subset \Omega$ *và mỗi tập con compact* $L \subset D$*, tồn tại* j_0 *sao cho* $f_j(K) \cap L = \phi$ *với mọi* $j \geq j_0$.

ii) Một họ F là không phân kỳ compact nếu F không chứa dãy con phân kỳ compact.

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.14 *Miền D được gọi là miền taut nếu với mọi dãy* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset Hol(\Omega, D)$ *chứa một dãy con hội tụ hoặc chứa một dãy con phân kỳ compact.*

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.15 *Một hàm φ được gọi là hàm peak đa điều hòa dưới địa phương tại một điểm p thuộc $\partial\Omega$ nếu tồn tại một lân cận U của p trong C^n sao cho φ là đa điều hòa dưới trên $U \cap \Omega$, liên tục trên $U \cap \bar{\Omega}$ và thỏa mãn*

$$\begin{cases} \varphi(p) = 0, \\ \varphi(z) < 0 \end{cases} \quad \text{với mọi } z \in (U \cap \bar{\Omega}) \setminus \{p\} .$$

2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1.16 *(Hội tụ Caratheodory) Giả sử* $\{\Omega_v\}$ *là một dãy các miền trong đa tạp phức sao cho* $p \in \bigcap_{v=1}^{\infty} \Omega_v$ *. Nếu p là một điểm trong của* $\bigcap_{v=1}^{\infty} \Omega_v$ *thì hạt nhân Caratheodory* $\hat{\Omega}$ *tại p của dãy* $\{\Omega_v\}$ *là miền lớn nhất chứa p thỏa mãn tính chất: mỗi tập con compact của* $\hat{\Omega}$ *nằm trong tất cả các miền trừ ra một số hữu hạn các miền* Ω_v*. Nếu p không là điểm trong của* $\bigcap_{v=1}^{\infty} \Omega_v$ *thì nhân Caratheodory* $\hat{\Omega}$ *là* $\{p\}$*. Dãy* $\{\Omega_v\}$ *được gọi là hội tụ đến nhân của nó tại p nếu mọi dãy con của dãy* $\{\Omega_v\}$ *đều có cùng nhân tại p.*

3. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Kết quả cổ điển của H. Cartan: *nếu Ω là một miền bị chặn trong C^n và nhóm tự đẳng cấu $Aut(\Omega)$ không compact thì tồn tại các điểm $x \in \Omega$, $p_\infty \in \partial\Omega$ và dãy các tự đẳng cấu $\varphi_j \in Aut(\Omega)$ sao cho $\lim \varphi_j(x) = p_\infty$.*

3. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 1.2.1 (Wong-Rosay) *Miền bất kỳ $\Omega \subset C^n$ có biên trơn lớp C^2, giả lồi chặt và có nhóm tự đẳng cấu không compact đều song chỉnh hình với hình cầu đơn vị trong C^n.*

3. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 1.2.2 (Bedford-Pinchuk) *Giả sử $\Omega \subset C^n$ là một miền bị chặn với biên nhẵn, giả lồi và có kiểu hữu hạn. Giả sử rằng hạng của dạng Levi ít nhất bằng n – 2 tại mỗi điểm biên của miền Ω. Khi đó, nếu Aut(Ω) là không compact thì Ω song chỉnh hình với miền:*

$$E_m = \{(z_1, \ldots, z_n) \in C^n : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + \ldots + |z_n|^2 < 1\}$$

với số nguyên m ≥1 nào đó.

3. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 1.2.3 (F. Berteloot) *Giả sử Ω là một miền trong C^n và cho điểm biên $p_\infty \in \partial\Omega$. Giả sử rằng tồn tại dãy $\{\varphi_p\} \subset Aut(\Omega)$ và một điểm $a \in \Omega$ sao cho $\lim \varphi_p(a) = p_\infty$. Nếu $\partial\Omega$ nhẵn, giả lồi và có kiểu hữu hạn trong lân cận nào đó của điểm p_∞ thì Ω song chỉnh hình với miền*

$$D = \{(w, z) \in C^2 : Rew + H(z, \bar{z}) < 0\},$$

trong đó H là một đa thức thuần nhất đa điều hòa dưới trên C với bậc 2m ($\tau(\partial\Omega, p_\infty) = 2m$).

3. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 1.2.4 [33] *Giả sử Ω là một miền trong C^n và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên. Giả sử rằng*

(a) $\partial\Omega$ là nhẵn, giả lồi trong một lân cận nào đó của điểm $p_\infty \in \partial\Omega$ và có kiểu 2m tại p_∞,

(b) Hạng của dạng Levi ít nhất bằng $n-2$ tại p_∞,

(c) Tồn tại dãy $\{\varphi_n\}$ thuộc Aut(Ω) sao cho $\lim\varphi_p(a) = p_\infty$ với điểm nào đó $a \in \Omega$,

Khi đó, Ω song chỉnh hình với miền có dạng sau

$$M_H = \{(w_1, ..., w_n) \in C^n : \mathrm{Re}\, w_n + H(w_1, \bar{w}_1) + |w_2|^2 + ... + |w_{n-1}|^2 < 0\}$$

trong đó H là một đa thức thuần nhất điều hòa dưới trên C.

3. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 1.2.5 (H. Gaussier) *Giả sử Ω là một miền trong C^n và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên. Giả sử rằng p_∞ là điểm tụ quỹ đạo của miền Ω. Khi đó, nếu biên $\partial\Omega$ là nhẵn, lồi trong một lân cận của p_∞ và có kiểu 2m tại p_∞ thì Ω song chỉnh hình với miền sau đây*

$$D = \{(z_1, z') \in C^n : \operatorname{Re} z_1 + P(z') < 0\}$$

Trong đó P là một đa thức lồi không suy biến với bậc $\leq 2m$.

3. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 1.2.6 [35] *Giả sử Ω là một miền trong C^n và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên tụ quỹ đạo của Ω. Khi đó, nếu $\partial\Omega$ nhẵn, lồi tuyến tính địa phương trong một lân cận của p_∞ và có kiểu hữu hạn 2m tại điểm p_∞ thì Ω song chỉnh hình với miền sau*

$$D = \{z \in C^n : \operatorname{Re} z_1 + P(z') < 0\}$$

Trong đó P là một đa thức không suy biến đa điều hòa dưới bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2m.

4. KẾT LUẬN

1) Báo cáo học thuật đã giới thiệu khái quát một số khái niệm cơ bản nhất về nhóm tự đẳng cấu trong C^n.

2) Báo cáo học thuật cũng đã giới thiệu được một số kết quả nghiên cứu kinh điển cũng như khởi nguồn của các kết quả nghiên cứu đó.

TRÂN TRỌNG CẢM ƠN!