

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MÔ HÌNH MARKOV ẨN  
VỚI BÀI TOÁN MTT

ThS. Nguyễn Thị Hằng

Hà Nội - 01/2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MÔ HÌNH MARKOV ẨN  
VỚI BÀI TOÁN MTT

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội - 01/2022

# LỜI MỞ ĐẦU

Thống kê là khoa học về các phương pháp tổng quát xử lý các kết quả thực nghiệm và có nhiều ứng dụng to lớn trong thực tế, giúp con người rút ra thông tin từ dữ liệu quan sát, nhằm giải quyết các bài toán thực tế trong cuộc sống. Khoa học thống kê đóng vai trò không thể thiếu trong bất cứ công trình nghiên cứu khoa học nào, nhất là khoa học thực nghiệm như y khoa, nông nghiệp, hóa học, và ngay cả xã hội học. Để phát hiện ra những quy luật đằng sau những con số, người làm thống kê phải tiến hành công việc suy luận thống kê. Hiểu một cách đơn giản, suy luận thống kê là quá trình tìm ra các quy luật từ dữ liệu thực tế. Báo cáo đề cập đến việc sử dụng các suy luận thống kê vào bài toán quan sát đa mục tiêu MTT.

Báo cáo học thuật đề cập đến việc nghiên cứu lớp mô hình MTT mà trong đó các mục tiêu được quan tâm là lớp mục tiêu nào đó trong số các mục tiêu có thể có của mô hình MTT. Trường hợp lớp mục tiêu được quan tâm là lớp con thực sự của lớp tất cả các mục tiêu có thể có của mô hình, thì các thuật toán về MTT đã được công bố cho đến thời điểm hiện tại không thể áp dụng được và hiện chưa có phương pháp giải nào được công bố. Báo cáo đã đưa ra phương pháp tiếp cận đó là sử dụng mô hình Markov ẩn để giải quyết.

Báo cáo được chia thành ba chương:

- **Chương 1. Tổng quan về bài toán MTT**

Nội dung chương này bao gồm các kiến thức cơ bản liên quan tới báo cáo : Mục 1.1 là mục "Giới thiệu mở đầu"; mục 1.2 là mục phát biểu và xây dựng mô hình toán học cho bài toán MTT được nghiên cứu trong báo cáo này.

- **Chương 2. Mô hình Markov ẩn với bài toán MTT**

Tiếp theo Chương 2 sẽ trình bày các kiến thức liên quan đến mô hình Markov ẩn HMM; các kết quả nghiên cứu mở rộng các kết quả trong HMM cho mục tiêu nghiên cứu MTT.

- **Chương 3. Ứng dụng mô hình Markov ẩn vào bài toán MTT**

Chương 3 trình bày các kết quả nghiên cứu mở rộng trong HMM cho MTT và là ứng dụng các kết quả nghiên cứu đó vào việc giải bài toán MTT; Ứng dụng các kết quả nghiên cứu đó vào việc giải bài toán MTT .

*Hà Nội, ngày 08 tháng 01 năm 2022*

Người viết báo cáo

**ThS. Nguyễn Thị Hằng**

# Chương 1

## Tổng quan về bài toán MTT

### 1.1. Giới thiệu mở đầu

Trong thực tiễn có nhiều lớp mô hình MTT. Ở chương này báo cáo dành để nghiên cứu một lớp MTT có nhiều ứng dụng và thường gặp trong thực tiễn. Điều đặc biệt ở đây là các phương pháp truyền thống và thông dụng đã được công bố để xử lý các mô hình MTT không áp dụng được cho lớp mô hình MTT này. Chúng ta nêu một số ví dụ trong thực tiễn:

*Ví dụ 1.1.1.* Trong chiến dịch "Điện Biên Phủ trên không" tại Hà Nội tháng 12 năm 1972, do lượng tên lửa SAM-2 hạn chế không đủ đáp ứng yêu cầu chiến đấu. Bộ Tổng tham mưu và Quân chủng Phòng không - Không quân quyết định tập trung tên lửa SAM-2 và không quân để đánh B-52, các mục tiêu khác (các loại máy bay khác của Mỹ) chỉ đối phó bằng hỏa lực phòng không thông thường. Hệ thống ra đa trong trường hợp này có một hệ thống chức năng phải xử lý mô hình MTT mà trong đó đối tượng quan tâm chỉ là các mục tiêu máy bay B-52; Lớp mục tiêu cần quan tâm này là một lớp con trong lớp tất cả các mục tiêu có thể có đối với hệ thống ra đa phòng không.

*Ví dụ 1.1.2.* Với hệ thống phòng thủ trong chiến tranh hạt nhân có một hệ thống chức năng trong đó mô hình MTT có nhiệm vụ phải quan tâm xác định các mục tiêu có thể mang đầu đạn hạt nhân (tên lửa mang đầu đạn hạt nhân, máy bay chiến lược mang bom hạt nhân, ...) trong số các mục tiêu có thể có trong không gian phòng thủ.

Như vậy chúng ta gặp một lớp mô hình MTT mà trong đó đối tượng quan tâm

theo dõi và xác định không phải là tất cả các mục tiêu mà chỉ là một lớp con trong số đó. Trong trường hợp lớp mục tiêu được quan tâm là lớp con thực sự của lớp tất cả các mục tiêu có thể có, thì các phương pháp, các thuật toán xử lý với MTT đã được công bố không còn phù hợp nữa. Báo cáo đã đề xuất phương pháp tiếp cận bằng cách sử dụng mô hình Markov ẩn để giải quyết lớp mô hình MTT này. Các kết quả theo hướng nghiên cứu đó được trình bày trong báo cáo này.

## 1.2. Mô hình toán học bài toán MTT

### 1.2.1. Mô hình toán học bài toán MTT

Giả sử ta quan sát các đối tượng (hay còn gọi là mục tiêu) di động nào đó trong một miền không gian và trong một khoảng thời gian nào đó. Ký hiệu  $\mathcal{R}$  là miền không gian mà ta cần quan tâm, ở đây  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ , với  $\mathbb{R}^{n_x}$  là không gian trạng thái của mục tiêu,  $n_x$  là số chiều của véc tơ trạng thái của mục tiêu.  $\mathcal{R}$  được gọi là miền quan sát.

Ký hiệu  $[1, T]$ ,  $T > 1$ ,  $T \in \mathbb{R}^+$ , là khoảng thời gian mà ta cần quan tâm.  $[1, T]$  được gọi là khoảng thời gian của quá trình quan sát. Do các thời điểm quan sát:  $t_1, t_2, \dots, t_n$ ;  $1 = t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ , là rời rạc, nên không mất tính tổng quát, khi nói đến thời điểm thứ  $i$  ( $t_i$ ), chúng ta có thể quy ước:  $T \in \mathbb{Z}^+$ ,  $t_i \in \mathbb{Z}^+$  và đồng nhất  $t_i = i$ ,  $i = 1, 2, \dots, T$ ; trong đó,  $t_1 = 1$  là lần quan sát đầu tiên và  $t_n = T$  là lần quan sát cuối cùng của quá trình quan sát.

Các mục tiêu xuất hiện, biến mất một cách ngẫu nhiên. Các mục tiêu xuất hiện ở vị trí ngẫu nhiên có phân bố đều trong  $\mathcal{R}$ . Các mục tiêu xuất hiện chuyển động và biến mất một cách độc lập với nhau. Các mục tiêu giả FA được xem như là một loại mục tiêu và cũng tuân theo các giả thiết (về mục tiêu) như các mục tiêu khác.

Ký hiệu  $X_t^k$ ,  $t \in [t_i^k, t_f^k]$ ,  $k = 1, 2, \dots$  là trạng của mục tiêu thứ  $k$  tại thời điểm  $t$  ( $t_i^k$  và  $t_f^k$  là thời điểm xuất hiện và biến mất tương ứng).

Ký hiệu  $\mathcal{M}$  là lớp mục tiêu mà mô hình MTT quan tâm.

Số mục tiêu cần quan tâm có trong  $\mathcal{R}$  tại thời điểm  $t$  ký hiệu là  $M_t$ , khi đó ta có:

$$M_t = M_t(\omega) = \text{Card}\{X_t^k | k \in \mathcal{M}\}.$$

Số mục tiêu không thuộc lớp mục tiêu quan tâm có trong  $\mathcal{R}$  tại thời điểm  $t$  ký hiệu là  $G_t$ , khi đó:

$$G_t = G_t(\omega) = \text{Card}\{X_t^s | s \notin \mathcal{M}\}.$$

Một cách hợp lý và tự nhiên, chúng ta giả thiết:

+  $M_t = M_t(\omega)$  là biến ngẫu nhiên Poisson với tham số  $\lambda_m$ ,  $\lambda_m > 0$ .

+ Các  $X_t^k$ ,  $k \in \mathcal{M}$ , xuất hiện với xác suất  $p_m$ ,  $0 < p_m < 1$ .

+  $G_t = G_t(\omega)$ , là biến ngẫu nhiên Poisson với tham số  $\lambda_g$ ,  $\lambda_g > 0$ .

+ Các  $X_t^s$ ,  $s \notin \mathcal{M}$ , xuất hiện với xác suất  $p_g$ ,  $0 < p_g < 1$  (trong các mô hình thực tế thường  $p_g \neq p_m$  và thậm chí  $p_g \gg p_m$ ).

Lưu ý: Giá trị  $p_m$  và  $\lambda_m$  (tương ứng  $p_g$  và  $\lambda_g$ ) có mối liên hệ toán học do định lý giới hạn địa phương (phân bố  $B[n, p]$  dần tới phân bố  $P(\lambda)$  khi  $n \rightarrow \infty$ ).

Ký hiệu:

$$Y(t) = \{Y_t^j | j = 1, 2, \dots, n_t\}$$

là tập các giá trị quan sát được tại thời điểm  $t$ ,  $t = t_1, t_2, \dots, t_n$ ;  $n_t$  là số lượng các kết quả quan sát được tại thời điểm  $t$ , chính xác về mặt toán học:

$$n_t = \text{Card}(Y(t))$$

là một biến ngẫu nhiên và

$$n_t = n_t(\omega) = M_t(\omega) + G_t(\omega)$$

Vì  $M_t(\omega)$  và  $G_t(\omega)$  độc lập,  $M_t(\omega) \simeq P(\lambda_m)$ ,  $G_t(\omega) \simeq P(\lambda_g)$ , nên

$$n_t = n_t(\omega) \simeq P(\lambda_m + \lambda_g).$$

Mỗi giá trị quan sát có thể là giá trị quan sát thu được từ mục tiêu nào đó hoặc có thể là giá trị quan sát do mục tiêu giả gây ra.

Yêu cầu của bài toán MTT là: Hãy xác định số lượng mục tiêu có trong lớp  $\mathcal{M}$  tại mỗi thời điểm  $t$  trong miền thời gian quan sát trong  $\mathcal{R}$ , nghĩa là xác định  $M_t(\omega)$ .

### 1.2.2. Mô hình xấp xỉ

Trong mô hình toán học của bài toán MTT, về mặt toán học biến ngẫu nhiên  $n_t$  có phân phối Poisson với tham số  $(\lambda_m + \lambda_g)$ . Do đó, tập giá trị của  $n_t$  là  $N = \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Khi đó ta có:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P[n_t = k] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda_m + \lambda_g)^k}{k!} \cdot e^{-(\lambda_m + \lambda_g)} = 0.$$

Do vậy, với  $\varepsilon > 0$  tùy ý bé, tồn tại  $N^* = N(\varepsilon) \in N^+$  sao cho

$$P[n_t \leq N(\varepsilon)] \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall t \in [1, T]$$

Hoàn toàn tương tự, vì  $M_t$  có phân phối Poisson với tham số  $\lambda_m$ ,  $\lambda_m > 0$  nên:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P[M_t = k] = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda_m)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda_m} = 0$$

Nên với  $\varepsilon > 0$  tùy ý bé, tồn tại  $M^* = M(\varepsilon) \in N^+$  sao cho:

$$P[M_t \leq M(\varepsilon)] \geq 1 - \varepsilon, \quad \forall t \in [1, T]$$

Ta đưa ra giả thiết sau đây:

**Giả thiết 1.2..1.**  $\exists M^*, N^* \in \mathbb{N}^+$  sao cho:

- $M_t(\omega) \leq M^* \pmod{P}, \quad \forall t \in [1, T]$
- $n_t(\omega) \leq N^* \pmod{P}, \quad \forall t \in [1, T]$

Lưu ý: Tùy theo độ chính xác yêu cầu mà  $M^*$  và  $N^*$  được chọn tương ứng. Song  $M^*$  và  $N^*$  càng chọn với giá trị lớn thì độ phức tạp tính toán trong lời giải càng cao.

Bài toán MTT được phát biểu trong mục 1.2.1 với điều kiện tuân theo Giả thiết 1.2.1 được gọi là mô hình xấp xỉ hay mô hình gần đúng. Mô hình này sẽ là đối tượng quan tâm nghiên cứu trong báo cáo này.



## Chương 2

# Mô hình Markov ẩn với bài toán MTT

### 2.1. Mô hình Markov ẩn HMM (Hidden Markov Model)

Xét một quy luật ngẫu nhiên nào đó thay đổi trạng thái theo thời gian. Số trạng thái của quy luật ngẫu nhiên này là hữu hạn và không quan sát được, nhưng biết rằng mỗi trạng thái đó gắn liền với một hiện tượng ngẫu nhiên khác quan sát được. Về mặt toán học, chúng ta có thể toán học hóa công việc đó như sau:

- Xét một quá trình ngẫu nhiên  $S$ -giá trị  $X_t$ ;  $S$  ở đây được giả thiết là  $\text{Card}(S) = M < +\infty$ . Không mất tính tổng quát, chúng ta ký hiệu:

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_M\}$$

$S$  sẽ được gọi là không gian trạng thái của quá trình  $X_t$  ( $X_t$  là quá trình nhận giá trị trên  $S$ ; và sau này liên quan đến giả thiết Markov thì chúng ta sẽ xét  $X_t$  là quá trình Markov).

- Ký hiệu  $q_t$  là trạng thái của quá trình  $X_t$  tại thời điểm  $t$ ,  $t \in [1, T]$ . Khi đó,  $q_t$  nhận giá trị trong  $S$ . Các trạng thái  $q_t = S_j$ ,  $1 \leq j \leq M$ ,  $S_j \in S$ , là không quan sát được nhưng nó có liên kết mật thiết (phép tương ứng “1-1” hay có

thể gọi là phép nhúng) với một biến ngẫu nhiên quan sát được  $V$ -giá trị với  $Card(V) = N < +\infty$ . Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng:

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$$

Các phần tử  $v_k, v_k \in V, 1 \leq k \leq N$ , là quan sát được và  $V$  được gọi là không gian các giá trị quan sát. Ký hiệu  $O_t$  là giá trị quan sát được của hệ thống ở trạng thái  $S_j$  tại thời điểm  $t, t \in [1, T]$ , thì phân phối của biến ngẫu nhiên quan sát được  $V$ -giá trị tương ứng với trạng thái  $q_t = S_j$  cho bởi phân phối

$$B = \{b_j(k)\}$$

với 
$$b_j(k) = P[O_t = v_k | q_t = S_j], \quad 1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq j \leq M,$$

trong đó,

$$b_j(k) \geq 0; \quad 1 \leq k \leq N, \quad 1 \leq j \leq M;$$

$$\sum_{k=1}^N b_j(k) = 1, \quad 1 \leq j \leq M.$$

- Các nghiên cứu về Mô hình Markov ẩn (HMM), cho đến thời điểm hiện tại, được công bố đều giả thiết rằng HMM phải thỏa mãn ba giả thuyết sau đây:

a/ *Giả thuyết về tính Markov*

Quá trình ẩn  $X_t$  có tính Markov, có nghĩa là:

$$\begin{aligned} P[q_{t+1} = S_j | q_1 = S_{i_1}, q_2 = S_{i_2}, \dots, q_{t-1} = S_{i_{t-1}}, q_t = S_i] = \\ = P[q_{t+1} = S_j | q_t = S_i] = a_{ij}(t) \end{aligned}$$

và  $a_{ij}(t)$  được gọi là xác suất chuyển từ trạng thái  $S_i$  sang trạng thái  $S_j$  ở thời điểm (bước thứ)  $t$ .

b/ *Giả thuyết về tính dừng (thuần nhất)*

$$P[q_{t+1} = S_j | q_t = S_i] = P[q_{l+1} = S_j | q_l = S_i] = a_{ij}, \quad \forall t, l.$$

Hay nói một cách khác

$$a_{ij}(t) \equiv a_{ij}, \quad \forall t.$$

$a_{ij}$  được gọi là xác suất chuyển trạng thái sau một bước,  $A := [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq M}$  được gọi là ma trận chuyển trạng thái sau một bước. Lẽ đương nhiên, trong

đó:

$$a_{ij} \geq 0, \quad 1 \leq i, j \leq M$$
$$\sum_{j=1}^M a_{ij} = 1, \quad 1 \leq i \leq M$$

c/ *Giả thuyết về tính độc lập quan sát*

Giả thiết này yêu cầu về mặt thống kê quan sát hiện tại độc lập với các quan sát trước đó. Về mặt toán học điều đó có nghĩa là: Giả sử với HMM có dãy quan sát  $O = O_1 O_2 \dots O_T$  (ứng với dãy trạng thái  $Q = q_1 q_2 \dots q_T$ ) thì:

$$P [O|Q, HMM] = \prod_{t=1}^T P [O_t|q_t, HMM]$$

- Với HMM người ta cần phải xác định phân bố trạng thái ban đầu của mô hình. Ký hiệu:  $\Pi = \{\pi_i, 1 \leq i \leq M\}$  với  $\pi_i = P [q_1 = S_i]$  và gọi  $\Pi$  là phân phối trạng thái ban đầu.

Trong đó:

$$\pi_i > 0, \quad 1 \leq i \leq M$$
$$\sum_{i=1}^M \pi_i = 1$$

Với những điều bổ trợ đã đưa vào như trên, bây giờ chúng ta mô tả thành phần cấu trúc, quá trình hoạt động và những vấn đề (bài toán) cơ bản của HMM.

### Các thành phần của HMM

1/ *Tham số chỉ số lượng trạng thái của mô hình*

Xét xích Markov ản  $X_t$  hữu hạn trạng thái như đã mô tả ở trên có  $M$  trạng thái. Khi đó,  $M$  được gọi là tham số chỉ số lượng trạng thái của mô hình Markov ản. Mặc dù các trạng thái là ản song một cách tổng quát giữa các các trạng thái trong quá trình mô hình hoạt động theo thời gian có tồn tại một quy luật mà mô hình chuyển từ trạng thái này sang trạng thái khác. Về mặt toán học, quy luật đó là quy luật thay đổi theo thời gian của quá trình ản  $X_t$ . Đặc biệt nếu yêu cầu một trạng thái bất kỳ có thể đạt được từ bất kỳ trạng thái khác thì đó là mô hình có tính ergodic. Cũng như trên, chúng ta ký hiệu tập các trạng thái riêng biệt là

$$S = \{S_1, S_2, \dots, S_M\}$$

và  $q_t$  là trạng thái của mô hình ở thời điểm  $t$ ,  $t \in [1, T]$ . Khi đó,  $q_t$  nhận giá trị trong  $S$ , và  $S$  được gọi là không gian trạng thái.

2/ *Tham số chỉ số lượng các giá trị quan sát*

Ký hiệu  $N$  là số các biểu tượng (giá trị) quan sát có thể có liên quan đến các trạng thái của mô hình. Chúng ta ký hiệu tập các giá trị quan sát riêng biệt là:

$$V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}.$$

Quan sát thu được tại thời điểm  $t$  ký hiệu là  $O_t$ . Như vậy,  $O_t$  nhận giá trị trong  $V$  và tập  $V$  được gọi là không gian các giá trị quan sát.

3/ *Phân phối xác suất chuyển trạng thái*

$$A := [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq M}$$

trong đó,

$$a_{ij} = P[q_{t+1} = S_j | q_t = S_i], \quad 1 \leq i, j \leq M.$$

Với HMM mà một trạng thái bất kỳ có thể đạt được từ một trạng thái bất kỳ khác chỉ sau một bước thì  $a_{ij} > 0$ ,  $\forall i, j$ . Trong trường hợp ngược lại chúng ta có  $a_{ij} = 0$  với một hay một số cặp  $(i, j)$ . Lẽ đương nhiên yêu cầu  $A$  phải là ma trận ngẫu nhiên, nghĩa là:

$$\sum_{j=1}^M a_{ij} = 1$$

Trong báo cáo, để tường minh hơn, liên quan đến trạng thái, cùng với ký hiệu

$$a_{ij} = P[q_{t+1} = S_j | q_t = S_i]$$

đôi khi còn ký hiệu

$$a_{q_t q_{t+1}} = P[q_{t+1} = S_j | q_t = S_i]$$

có nghĩa là cùng với  $a_{ij}$  ta cũng còn dùng  $a_{q_t q_{t+1}}$  và chúng có cùng ý nghĩa như biểu thức nêu trên.

4/ *Phân phối xác suất của các quan sát khi hệ thống ở trạng thái:  $S_j$ ,  $1 \leq j \leq M$  là  $B := \{b_j(k), 1 \leq k \leq N\}$ , trong đó:  $b_j(k) = P[O_t = v_k | q_t = S_j]$ ,  $1 \leq k \leq N$ ,  $1 \leq j \leq M$ .*

5/ Phân phối của trạng thái ban đầu  $\Pi = \{\pi_i, 1 \leq i \leq M\}$  trong đó,  $\pi_i = P[q_1 = S_i], 1 \leq i \leq M$ .

Để tiện trong trình bày, ký hiệu bộ ba phân phối  $A, B, \Pi$  là  $\Lambda$ :

$$\Lambda = (A, B, \Pi)$$

Như vậy, khi xác định được  $M, N$  và  $\Lambda$  có nghĩa là ta đã xác định được một mô hình Markov ẩn và HMM này cũng dùng ký hiệu là  $\Lambda$ .

### Vận hành của HMM theo thời gian

Giả sử quan tâm trong miền thời gian  $[1, T], T > 1, T \in N^+$ .

Giả sử đã cho một mô hình Markov ẩn (HMM)  $\Lambda$ . Khi đó,

- 1/  $\Lambda$  xác định trạng thái ban đầu  $q_1 = S_i$  theo phân phối  $\Pi$ .
- 2/ Đặt  $t = 1$ .
- 3/  $\Lambda$  xác định quan sát  $O_t = v_k$  theo phân phối  $B$  (cụ thể là dòng thứ  $i: \{b_i(k), 1 \leq k \leq N\}$ )
- 4/ Chuyển trạng thái từ  $q_t$  sang  $q_{t+1} = S_j$  theo phân phối xác suất  $A$ .
- 5/ Đặt  $t = t + 1$  và quay lại Bước 3

Quá trình sẽ dừng lại khi  $t = T$ .

Như vậy, HMM cho ra một dãy quan sát:  $O = O_1 O_2 \cdots O_T$  với  $T$  là số quan sát.

### Các vấn đề cơ bản khi nghiên cứu HMM

Mô hình HMM mà báo cáo vừa trình bày là mô hình HMM với thời gian rời rạc, hữu hạn trạng thái và không gian các giá trị quan sát hữu hạn và có tên gọi là Mô hình Markov ẩn rời rạc.

Các công trình nghiên cứu về HMM được công bố cho đến thời điểm hiện tại có thể chia thành 3 hướng sau:

- + Hướng mở rộng sang những lớp mô hình Markov ẩn mới như: HMM ergodic, HMM dạng Bakis; HMM trái-phải; HMM có mật độ quan sát liên tục, HMM tự hồi quy,....

- + Hướng nghiên cứu một vài dạng biến thể trên những cấu trúc HMM. Hướng này chủ yếu với mục tiêu áp dụng cho những mô hình toán học cần giải quyết cụ thể.
- + Hướng nghiên cứu giải quyết ba bài toán cơ bản đối với HMM.

Báo cáo xin trình bày cụ thể hơn về hướng thứ ba này.

Khi cho một mô hình HMM là  $\Lambda$  và cho một dãy quan sát sinh ra bởi HMM đó là:

$$O = O_1 O_2 \cdots O_T.$$

Có ba bài toán cơ bản được đặt ra là:

- + *Bài toán 1:* Cho dãy quan sát  $O = O_1 O_2 \cdots O_T$  và mô hình Markov ẩn  $\Lambda$ . Hãy tính  $P(O|\Lambda)$ .
- + *Bài toán 2:* Cho dãy quan sát  $O = O_1 O_2 \cdots O_T$  và mô hình Markov ẩn  $\Lambda$ . Hãy xác định dãy trạng thái tương ứng  $Q = q_1 q_2 \dots q_T$  tối ưu nhất.
- + *Bài toán 3:* Cho dãy quan sát  $O = O_1 O_2 \cdots O_T$ . Làm thế nào để điều chỉnh các tham số của mô hình  $\Lambda = (A, B, \Pi)$  sao cho với mô hình được điều chỉnh thì  $P(O|\Lambda)$  đạt cực đại.

Trong phạm vi nghiên cứu của báo cáo, chúng ta quan tâm đến Bài toán 1 và Bài toán 2.

*Bài toán 1* là bài toán đánh giá, tính xác suất. Với các công trình đã được công bố để giải bài toán này thì người ta thường dùng “thuật toán tiến-lùi” (Forward-Backward Algorithm).

*Bài toán 2* là bài toán mà trong đó ta tìm ra phần ẩn của mô hình. Với các công trình đã được công bố để giải bài toán này thì người ta sử dụng thuật toán Viterbi (Viterbi Algorithm).

Với mục đích là xây dựng công cụ để giải bài toán MTT được phát biểu ở mục 3.2.2 thì các thuật toán tiến-lùi (Forward-Backward Algorithm) và thuật toán Viterbi (Viterbi Algorithm) đã được công bố là không thể áp dụng được bởi lẽ: đối với bài toán MTT thì dãy số liệu quan sát tiến dần theo thời gian và đến đâu thì phải xử lý ngay tới đó. Tại thời điểm xử lý hiện tại chỉ có dãy số liệu quá khứ tiến dần theo thời gian cho đến thời điểm hiện tại chứ không thể có số liệu quan sát trước của tương lai. Do đó biến lùi là không tồn tại và vô nghĩa.

Mặt khác đối với HMM các giả thiết a/ (giả thiết về tính Markov) và c/ (giả thiết về tính độc lập thống kê của các quan sát) là bắt buộc không thể bỏ qua. Nhưng giả thiết b/ (giả thiết về tính thuần nhất) có thể mở rộng ra cho trường hợp không thuần nhất. Sự mở rộng này chỉ ảnh hưởng đến việc giải bài toán cơ bản số 3 (Bài toán 3). Sự ảnh hưởng này liên quan trực tiếp đến cơ chế điều chỉnh HMM và thủ tục học máy (machine learning) trong ứng dụng HMM vào bài toán nhận dạng. Đối với mục đích giải bài toán MTT chúng ta chỉ cần dùng đến Bài toán 1 và Bài toán 2 mà thôi. Bởi những lý do đó báo cáo sẽ trình bày một số kết quả đóng góp mới trong lý thuyết HMM.

## 2.2. Thuật toán tiến và thuật toán Viterbi cải tiến

Trong mục này báo cáo xây dựng thuật toán tiến (Forward Algorithm) và thuật toán Viterbi cải tiến (Modified Viterbi Algorithm). Thuật toán Viterbi cải tiến thực chất là thuật toán Viterbi nhưng chỉ sử dụng biến tiến và thuật toán tiến. Cả hai thuật toán này được xây dựng trên HMM không thuần nhất. Lẽ đương nhiên HMM thuần nhất là trường hợp riêng của HMM không thuần nhất.

Xét HMM với các thành phần cấu trúc như đã nêu trong mục 3.3, nhưng phân phối xác suất chuyển trạng thái phụ thuộc vào thời gian (không thuần nhất theo thời gian). Nghĩa là,

$$P[q_{t+1} = S_j | q_t = S_i] = a_{ij}(t)$$

Do HMM rời rạc nên các mốc chuyển trạng thái là các mốc thời gian rời rạc nghĩa là:  $t_1 = 1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n = T$ , bởi vậy để tiện lợi trong trình bày cùng với  $a_{ij}(t_k)$  chúng ta có thể dùng gọn hơn là  $a_{ij}(k)$ .

Trong mục tiếp sau (mục 3.5) giá trị  $a_{ij}(k)$  sẽ được chỉ ra công thức giải tích cụ thể đối với HMM dùng cho bài toán MTT.

Ký hiệu:

$$A(k) = [a_{ij}(k)]_{1 \leq i, j \leq M}, k = \overline{1, n-1}$$

$$\mathcal{A} = \{A(1), A(2), \dots, A(n-1)\}$$

Mô hình Markov ẩn  $\Lambda = (\mathcal{A}, B, \Pi)$  được gọi là mô hình Markov ẩn không thuần nhất.

Với HMM không thuần nhất chúng ta có các kết quả sau đây:

### 2.2.1. Bài toán cơ bản thứ nhất và thuật toán tiến

Xét mô hình Markov ẩn không thuần nhất  $\Lambda = (\mathcal{A}, B, \Pi)$ .

Vì  $\Lambda$  là mô hình HMM rời rạc, nên các thời điểm  $t$  được xét trong  $[1, T]$  là các thời điểm rời rạc  $1 = t_1 < t_2 < \dots < t_k < \dots < t_n = T$ . Bởi vậy, với  $t = t_k$  thì cùng với quan sát  $O_{t_k}$  đôi khi ra ký hiệu gọn là  $O_k$ ; cùng với trạng thái  $q_{t_k}$  đôi khi ta ký hiệu gọn là  $q_k$ .

Tại thời điểm  $t = t_k$  bất kỳ,  $t_k \in [1, T]$ , với  $\Lambda$  ta có dãy quan sát

$$O = O_1 O_2 \dots O_t \quad (2.1)$$

Bài toán cơ bản thứ nhất là đi tính xác suất của dãy quan sát  $O$  khi HMM không thuần nhất  $\Lambda$  đã cho. Nghĩa là tính  $P(O|\Lambda)$ .

Công thức giải và thuật toán giải bài toán 1 được cho thông qua bổ đề và thuật toán sau đây:

#### Bổ đề 2.2..1.

$$P(O|\Lambda) = \sum_{\forall (q_1 q_2 \dots q_k)} \left\{ \prod_{s=1}^k a_{q_{s-1} q_s}(s-1) b_{q_s}(O_s) \right\} \quad (2.2)$$

trong đó ký hiệu hình thức:

$$a_{q_0 q_1}(0) = \pi_{q_1}.$$

*Chứng minh.* Xét một dãy trạng thái bất kỳ cố định nào đó:

$$Q = q_1 q_2 \dots q_k \quad (2.3)$$

ở đây,  $q_1$  là trạng thái ban đầu.

Khi đó, xác suất của dãy quan sát (2.1) khi cho dãy trạng thái (2.3) sẽ là:

$$P(O|Q, \Lambda) = \prod_{s=1}^k P(O_s|q_s, \Lambda). \quad (2.4)$$



Trong (2.4) đã sử dụng giả thiết độc lập thống kê của dãy quan sát (2.1), từ đó ta có:

$$P(O|Q, \Lambda) = \prod_{s=1}^k P(O_s|q_s, \Lambda) = \prod_{s=1}^k b_{q_s}(O_s). \quad (2.5)$$

Mặt khác:  $P(Q|\Lambda) = \pi_{q_1} a_{q_1 q_2}(1) a_{q_2 q_3}(2) \dots a_{q_{k-1} q_k}(k-1)$ , với ký hiệu:  $a_{q_0 q_1}(0) := \pi_{q_1}$ , ta có:

$$P(Q|\Lambda) = \prod_{s=1}^k a_{q_{s-1} q_s}(s-1) \quad (2.6)$$

Từ công thức (2.5) và (2.6) ta có:

$$\begin{aligned} P(O|\Lambda) &= \sum_{\forall Q} P(O|Q, \Lambda) \cdot P(Q|\Lambda) \\ &= \sum_{\forall Q} \left\{ \prod_{s=1}^k a_{q_{s-1} q_s}(s-1) \cdot b_{q_s}(O_s) \right\} \\ &= \sum_{\forall (q_1 q_2 \dots q_k)} \left\{ \prod_{s=1}^k a_{q_{s-1} q_s}(s-1) \cdot b_{q_s}(O_s) \right\} \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Công thức (2.2) có thể diễn giải tường minh như sau: Ở thời điểm ban đầu  $t_1 (s = 1)$ , mô hình ở trạng thái  $q_1 = q_{t_1}$  với xác suất  $\Pi_{q_1} (= a_{q_0 q_1}(0))$  và tại thời điểm này với trạng thái  $q_1$  đó chúng ta quan sát được giá trị quan sát  $O_1 = O_{t_1}$  với xác suất  $b_{q_1}(O_1)$ . Sự thay đổi từ  $t_s$  tới  $t_{s+1}$  (vấn tất từ  $s$  sang  $s + 1$ : ( $s = 2$ )) mô hình chuyển từ trạng thái  $q_1 = q_{t_1}$  sang trạng thái  $q_2 = q_{t_2}$  với xác suất  $a_{q_1 q_2}(1)$  và ở trạng thái  $q_2$  này chúng ta quan sát được giá trị quan sát  $O_2 = O_{t_2}$  với xác suất  $b_{q_2}(O_2)$ . Quá trình cứ tiếp tục cho tới cuối khi từ  $t_{k-1}$  chuyển sang thời điểm  $t_k = t$  ( $s = k - 1$ ) mô hình chuyển từ trạng thái  $q_{k-1} = q_{t_{k-1}}$  sang trạng thái  $q_k = q_{t_k}$  với xác suất  $a_{q_{k-1} q_k}(k-1)$  và ở trạng thái  $q_k$  này chúng ta quan sát được giá trị quan sát  $O_k = O_{t_k}$  với xác suất  $b_{q_k}(O_k)$ .

Để tính công thức (2.2) chúng ta thấy rằng nếu tính trực tiếp thì độ phức tạp của thuật toán có cấp của  $2tM^t$  phép toán. Trong HMM thuần nhất người ta đưa ra thuật toán tiến-lùi (Forward-Backward Algorithm) để tính công thức (2.2) với  $t = T$ . Đối với HMM với mục tiêu áp dụng để giải bài toán MTT thì thuật toán đó không dùng được. Ở đây báo cáo đưa ra thuật toán gọi là thuật toán tiến (Forward Algorithm) để tính công thức (2.2) với  $\forall t \in [1, T]$  như sau.

• Thuật toán tiến

Ký hiệu  $\alpha_\tau(i) = P(O_1 O_2 \cdots O_\tau; q_\tau = S_i | \Lambda)$ ; nghĩa là  $\alpha_\tau(i)$  là xác suất của phần đầu của dãy quan sát cho đến thời điểm  $t_\tau$  và tại thời điểm  $t_\tau$  đó, trạng thái  $q_\tau = q_{t_\tau} = S_i$ ,  $S_i \in S$ . Khi đó  $\alpha_\tau(i)$  được gọi là biến tiến.

Xác suất  $P(O|\Lambda)$  được tính theo biến tiến  $\alpha_\tau(i)$  theo thủ tục quy nạp như sau:

1/ Bước khởi đầu:

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(O_1), 1 \leq i \leq M.$$

2/ Bước quy nạp:

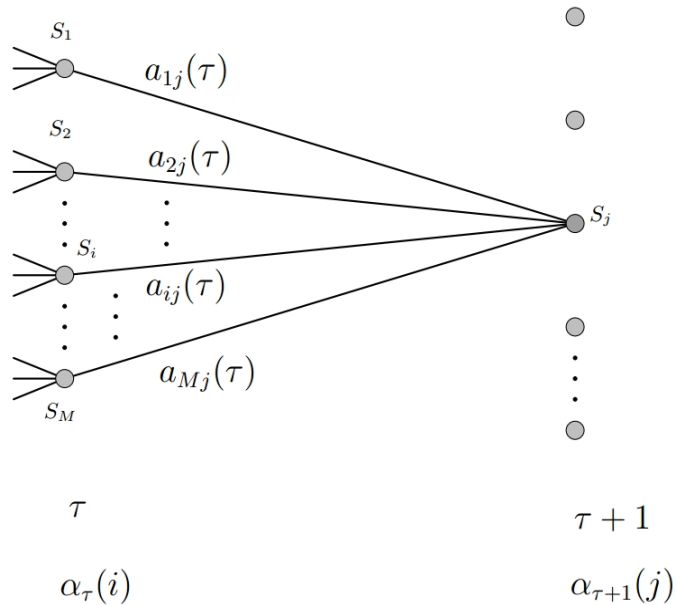
$$\alpha_{\tau+1}(j) = \left[ \sum_{i=1}^M \alpha_\tau(i) a_{ij}(\tau) \right] \cdot b_j(O_{\tau+1});$$

$$1 \leq \tau \leq t - 1 = t_k - 1, 1 \leq j \leq M$$

3/ Kết thúc:

$$P(O|\Lambda) = \sum_{i=1}^M \alpha_t(i) = \sum_{i=1}^M \alpha_{t_k}(i)$$

Cốt lõi và trung tâm của thuật toán là bước quy nạp. Sự tính toán ở bước quy nạp được tính toán mô tả qua Hình vẽ 2.1:



Hình 2.1: Lưới tính biến tiến

Hình 2.1 chỉ ra cách mà trạng thái  $S_j$  đạt được tại thời điểm  $\tau + 1$  từ  $M$  trạng thái có thể  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq M$ , ở thời điểm  $\tau$ . Vì  $\alpha_\tau(i)$  là xác suất của biến cố mà dãy quan sát đầu là  $O_1O_2 \cdots O_\tau$  và trạng thái của HMM ở thời điểm  $\tau$  là  $S_i$ . Tích số  $\alpha_\tau(i) \cdot a_{ij}(\tau)$  là xác suất của biến cố mà  $O_1O_2 \cdots O_\tau$  là dãy đầu của các quan sát và trạng thái  $S_j$  đạt được tại thời điểm  $(\tau + 1)$  theo con đường đi qua trạng thái  $S_i$  ở thời điểm  $\tau$ . Tổng của tất cả các tích này theo tất cả  $M$  trạng thái  $S_i$ ,  $1 \leq i \leq M$ , có thể có ở thời điểm  $\tau$  chúng ta thu được xác suất của  $S_j$  ở thời điểm  $\tau + 1$  với tất cả các quan sát bộ phận đi kèm trước đó. Từ đó ta tính được xác suất  $\alpha_{\tau+1}(j)$  với hệ ở trạng thái  $S_j$  và giá trị quan sát là  $O_{\tau+1}$  ở thời điểm  $\tau + 1$ .

Từ sự phân tích và minh họa trên, chúng ta đã chỉ ra tính đúng đắn của thuật toán.

### 2.2.2. Bài toán cơ bản thứ hai và thuật toán Viterbi cải tiến

Bài toán cơ bản thứ 2 đối với HMM mục đích là phát hiện ra phần ẩn của mô hình nghĩa là đi tìm dãy trạng thái hợp lý nhất, dãy trạng thái tối ưu tương ứng với dãy quan sát đã cho.

Vấn đề quan trọng đầu tiên là tiêu chuẩn thế nào là hợp lý nhất? Thế nào là tối ưu?

Có hai dạng yêu cầu như sau:

- *Dạng 1 :*

Cho dãy quan sát:  $O = O_1O_2 \cdots O_t$  sinh ra bởi HMM không thuần nhất  $\Lambda$ . Hãy tìm trạng thái  $q_t = q_t^*$  tối ưu theo nghĩa cực đại xác suất

- *Dạng 2:*

Cho dãy quan sát:  $O = O_1O_2 \cdots O_t$  sinh ra bởi HMM không thuần nhất  $\Lambda$ . Hãy tìm dãy trạng thái  $Q^* = q_1^*q_2^* \cdots q_t^*$  của  $\Lambda$  tối ưu theo nghĩa cực đại xác suất

a/ Phương pháp tìm lời giải cho dạng 1.

Đây là bài toán tìm trạng thái tối ưu riêng biệt  $q_t = q_t^*$  tại thời điểm hiện tại  $t$ .

Chúng ta xây dựng biến:

$$\gamma_t(i) = P(q_t = S_i | O, \Lambda). \quad (2.7)$$

Để dàng biểu diễn  $\gamma_t(i)$  qua biến tiến  $\alpha_t(i)$  theo công thức sau:

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)}{P(O|\Lambda)} \quad (2.8)$$

và  $\gamma_t(i)$  là một phân phối xác suất

$$\gamma_t(i) \geq 0; \quad \sum_{i=1}^M \gamma_t(i) = 1.$$

Từ công thức (2.7) chúng ta thu được lời giải:

$$q_t^* = \arg \max_{1 \leq i \leq M} \gamma_t(i). \quad (2.9)$$

### • Thuật toán Viterbi cải tiến 1

Theo thuật toán tiến của mục 3.4.1. chúng ta dễ dàng dùng thuật toán tiến để thu được  $\gamma_t(i)$  thông qua công thức (2.8) và từ đó thu được  $q_t^*$  qua công thức (2.9).

#### b/ Phương pháp tìm lời giải cho dạng 2.

Để tìm ra dãy trạng thái tốt nhất  $Q^* = q_1^* q_2^* \cdots q_t^*$  khi cho trước dãy quan sát  $O = O_1 O_2 \dots O_t$  của  $\Lambda$ , báo cáo đề xuất thuật toán sau đây và gọi là thuật toán Viterbi cải tiến 2 đối với HMM không thuần nhất. Sở dĩ gọi là “thuật toán Viterbi cải tiến” vì về mặt kỹ thuật khá tương đồng với thuật toán Viterbi đã được công bố đối với HMM thuần nhất, song nó chỉ sử dụng thuật toán tiến và biến tiến.

Định nghĩa đại lượng :

$$\delta_\tau(i) = \max_{q_1 q_2 \dots q_{\tau-1}} P(q_1 q_2 \dots q_{\tau-1} q_\tau, q_\tau = S_i; O_1 O_2 \cdots O_\tau | \Lambda) \quad (2.10)$$

nghĩa là  $\delta_\tau(i)$  là xác suất lớn nhất dọc theo dãy trạng thái đơn cho đến thời điểm  $\tau$  và kết thúc ở  $\tau$  tại trạng thái  $S_i$ . Từ (3.13) chúng ta có công thức quy nạp cho  $\delta_\tau(j)$  theo công thức sau:

$$\delta_\tau(j) = \left\{ \max_{1 \leq i \leq M} \delta_{\tau-1}(i) \cdot a_{ij}(\tau - 1) \right\} \cdot b_j(O_\tau). \quad (2.11)$$

Để tính ra được dãy trạng thái cần tìm trong quá trình quy nạp theo công thức (2.11) ta phải giữ lại đối số (trạng thái) đạt cực đại trong (2.11) đối với mỗi  $\tau$  và  $j$ . Bởi vậy cùng với  $\delta_\tau(i)$ , thực hiện quy nạp cùng với đại lượng  $\psi_t(j)$  như sau:

### • Thuật toán Viterbi cải tiến 2

1/ Bước khởi tạo:

$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(O_1), \quad 1 \leq i \leq M.$$

$$\psi_1(i) = 0.$$

2/ Bước quy nạp:

$$\delta_\tau(j) = \left\{ \max_{1 \leq i \leq M} \delta_{\tau-1}(i) \cdot a_{ij}(\tau-1) \right\} \cdot b_j(O_\tau), \quad 2 \leq \tau \leq t, 1 \leq j \leq M.$$

$$\psi_\tau(j) = \arg \max_{1 \leq i \leq M} \{ \delta_{\tau-1}(i) \cdot a_{ij}(\tau-1) \}, \quad 2 \leq \tau \leq t, 1 \leq j \leq M.$$

3/ Kết thúc:

$$P^* = \max_{1 \leq i \leq M} \{ \delta_t(i) \}.$$

$$q_t^* = \arg \max_{1 \leq i \leq M} \{ \delta_t(i) \}.$$

4/ Truy ngược

$$q_\tau^* = \psi_{\tau+1}(q_{\tau+1}^*), \quad \tau = t-1, t-2, \dots, 1.$$

Kết thúc thuật toán chúng ta xác định được dãy trạng thái tối ưu

$$Q^* = q_1^* q_2^* \cdots q_t^*$$

## Chương 3

# Ứng dụng mô hình Markov ẩn vào bài toán MTT

### 3.1. Bổ trợ phương pháp tính các xác suất cơ bản trong xây dựng HMM tương ứng với mô hình MTT

Giả sử  $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$  là không gian xác suất;  $B \in \mathcal{F}, P(B) > 0$ .

Ký hiệu  $\mathcal{F}^B = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ , khi đó  $\mathcal{F}^B$  là  $\sigma$ -trường và  $\mathcal{F}^B \subset \mathcal{F}$ . Xét

$$P^B(\cdot) = P(\cdot|B) = \{P(B)\}^{-1} P(\cdot \cap B), \cdot \in \mathcal{F} \quad (3.1)$$

Với  $P(\Omega \setminus B) > 0$ , thì  $P(\cdot \cap B), \cdot \in \mathcal{F}$  không phải là độ đo xác suất. Nếu được chuẩn hóa bởi hệ số chuẩn hóa  $D = P(B)$ , theo công thức (3.1), thì  $P^B(\cdot)$  sẽ trở thành độ đo xác suất trên không gian xác suất  $(B, \mathcal{F}^B, P^B(\cdot))$ .

Chúng ta quan tâm hệ số chuẩn hóa  $D$  trong trường hợp rời rạc.

a/ Trường hợp tổng quát:  $D = P(B) = \int_B dP$

b/ Trường hợp rời rạc

**Định nghĩa 3.1.1.** *Biến cố ngẫu nhiên  $C, C \in \mathcal{F}, P(C) > 0$  được gọi là biến cố*

nguyên tử, nếu:

$$C = C_1 \cup C_2, C_i \in \mathcal{F}, C_1 \cap C_2 = \emptyset, i = 1, 2,$$

$$\text{thì } \min \{P(C_1), P(C_2)\} = 0.$$

Giả sử  $B$  có phân hoạch không quá đếm được các biến cố nguyên tử, nghĩa là:

$$B = \bigcup_{i=1}^M B_i, B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j,$$

trong đó  $B_i, i = 1, 2, \dots, M$ , là các biến cố nguyên tử,  $M \leq +\infty$ .

Khi đó hệ số chuẩn hóa  $D$  sẽ được tính theo công thức:

$$D = P(B) = \sum_{n=1}^M P(B_i).$$

Ví dụ 3.1.1. Xét  $Z$  là biến ngẫu nhiên nhận giá trị trên  $\mathbb{N}$ .

$$P(Z = n) = p_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{\forall n} p_n = 1$$

Với  $B = [Z \leq M]$ ;  $B_i = [Z = i]$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , là các biến cố nguyên tử. Khi đó ta có hệ số chuẩn hóa:

$$D = P(B) = \sum_{k=1}^M p_k$$

và

$$P^B(\cdot) = D^{-1}P(\cdot \cap B). \quad (3.2)$$

Cách tính xác suất có điều kiện theo công thức (3.2) sẽ được áp dụng để tính các xác suất cơ bản khi xây dựng HMM trong phần tiếp theo.

## 3.2. Ứng dụng HMM giải bài toán MTT

Trong mục này chúng ta xét bài toán MTT đã được phát biểu trong mục 3.2.2. Chúng ta xây dựng HMM như sau:

1/ Tham số  $M$  và không gian trạng thái.

Chúng ta lấy:  $M = M^* + 1$ .

Không gian trạng thái:

$$S = \{S_0, S_1, \dots, S_{M^*}\},$$

trong đó,  $S_i$  là biến cố: “Có đúng  $i$  mục tiêu thuộc lớp  $\mathcal{M}$  trong miền  $\mathcal{R}$  tại thời điểm quan tâm tương ứng”,  $i = 0, 1, \dots, M^*$ .

2/ Tham số  $N$  và không gian các giá trị quan sát.

Chúng ta lấy  $N = N^* + 1$ .

Không gian các giá trị quan sát:

$$V = \{v_0, v_1, \dots, v_{N^*}\},$$

trong đó,  $v_k$  là biến cố: “Có đúng  $k$  giá trị quan sát tại thời điểm quan tâm tương ứng”,  $k = 0, 1, \dots, N^*$ .

3/ Phân phối xác suất chuyển trạng thái

$$A = [a_{ij}], \quad 0 \leq i, j \leq M^*,$$

trong đó,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= P[q_{t_k} = S_j | q_{t_{k-1}} = S_i] \\ &= D_1 \cdot \sum_{l=\max\{0; (i-j)\}}^i D_0 \cdot \frac{(\lambda_m)^i}{i!} e^{-\lambda_m} \cdot C_{M^*+l-i}^{j+l-i} \cdot C_i^l \cdot (1-p_m)^l \cdot p_m^{j+l-i} \end{aligned}$$

ở đây các hằng số chuẩn hóa  $D_0$  và  $D_1$  được tính theo công thức:

$$\begin{aligned} D_0 &= \left\{ \sum_{i=0}^{M^*} \frac{(\lambda_m)^i}{i!} e^{-\lambda_m} \right\}^{-1} \\ D_1 &= \left\{ \sum_{j=0}^{M^*} \sum_{l=\max\{0; (i-j)\}}^i D_0 \cdot \frac{(\lambda_m)^i}{i!} e^{-\lambda_m} C_{M^*+l-i}^{j+l-i} \cdot C_i^l (1-p_m)^l p_m^{j+l-i} \right\}^{-1} \end{aligned}$$

ở đây chúng ta dùng  $C_n^m$  là ký hiệu tổ hợp chập  $m$  của  $n$ :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$



4/ Phân phối xác suất của dãy quan sát khi hệ thống ở trạng thái  $S_j$  tại thời điểm  $t$ .

$$B = \{b_j(v_k)\}, \quad 0 \leq k \leq N^*, 0 \leq j \leq M^*$$

trong đó,

$$b_j(v_k) = P[O_t = v_k | q_t = S_j] \\ = \begin{cases} 0 & \text{với } k < j \\ D_2 \cdot \frac{(\lambda_m + \lambda_g)^k}{k!} e^{-(\lambda_m + \lambda_g)} & \text{với } k \geq j \end{cases}$$

ở đây  $D_2$  là hằng số chuẩn hóa được tính theo công thức

$$D_2 = \left\{ \sum_{k=j}^{N^*} \frac{(\lambda_m + \lambda_g)^k}{k!} e^{-(\lambda_m + \lambda_g)} \right\}^{-1}$$

5/ Phân phối trạng thái ban đầu

$$\Pi = \{\pi_i\}, \quad 0 \leq i \leq M^*$$

trong đó

$$\pi_i = P[q_1 = S_i] = D_0 \cdot \frac{(\lambda_m)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda_m}$$

Như vậy chúng ta đã xây dựng được một HMM cho bài toán MTT được phát biểu trong mục 3.2.2. Chúng ta ký hiệu HMM này là  $\Lambda_{MTT}$ .

Áp dụng thuật toán tiến và thuật toán Viterbi cải tiến được trình bày trong mục 3.4. cho  $\Lambda_{MTT}$  với lưu ý là mô hình thuần nhất chỉ là trường hợp riêng của trường hợp không thuần nhất với

$$A(n) \equiv A, \quad \forall n.$$

Khi đó, khi biết các giá trị  $n_{t_1}, n_{t_2}, \dots, n_{t_k} (n_{t_k} = n_t)$ , theo thuật toán chúng ta xác định được số mục tiêu tương ứng là  $m_{t_1}^*, m_{t_2}^*, \dots, m_{t_k}^* (m_{t_k}^* = m_t^*)$ , với  $t_k = t$  là ký hiệu thời điểm hiện tại.

Thuật toán tiến và thuật toán Viterbi cải tiến được đề xuất trong mục 3.4. là thuật toán giải tương minh dễ dàng cài đặt trên máy tính cũng như cài đặt trong các "con chip vi xử lý" trong thiết bị nhúng chuyên dụng. Khi đó với hệ chương trình cài đặt thuật toán, chúng ta chỉ cần số liệu đầu vào  $n_{t_1}, n_{t_2}, \dots, n_t$  chúng ta sẽ có đầu ra là  $m_{t_1}^*, m_{t_2}^*, \dots, m_t^*$  và xác suất  $P^*$  tương ứng một cách tường minh.

# Kết luận

- Bài toán MTT trong mục 1.2.2. chỉ ước lượng số lượng mục tiêu tại các thời điểm quan tâm. Vấn đề mở ở đây là nếu quan tâm tới quỹ đạo của các mục tiêu đó như trong bài toán MTT tổng quát được nghiên cứu trong chương 2, thì liệu có thể sử dụng công cụ HMM được không? Tác giả cũng đã tiến hành nghiên cứu vấn đề này, song muốn dùng HMM thì các trạng thái của HMM liên quan đến bó ánh xạ từ  $i$  điểm tại thời điểm  $t_{k-1}$  sang  $j$  điểm tại thời điểm  $t_k$  (như dạng ánh xạ đệ quy được nêu ra ở Chương 2). Với hướng đi đó việc tính xác suất chuyển trạng thái  $a_{ij}(k)$  sẽ phức tạp tương đương với việc tính xác suất hậu nghiệm. Hiện tại chưa có kết quả nào được công bố theo hướng bài toán mở này.

- Một vấn đề nữa được đặt ra là: Lời giải tối ưu theo dạng 1 có nằm trong dãy của lời giải tối ưu theo dạng 2 hay không? Đây là vấn đề rất ý nghĩa song đáng tiếc là tất cả các công trình đã được công bố cho đến thời điểm hiện tại ngay cả đối với HMM thuần nhất cũng chưa có lời giải bởi lẽ lời giải tối ưu chưa chắc đã duy nhất. Đây cũng là hướng nghiên cứu tiếp theo.

Như vậy, Chương 3 của báo cáo đã tập trung nghiên cứu lớp bài toán MTT với yêu cầu ước lượng số lượng mục tiêu của lớp mục tiêu được quan tâm tại mỗi thời điểm. Với lớp bài toán này, báo cáo dùng phương pháp tiếp cận theo hướng sử dụng HMM. Các kết quả thu được của chương này là:

- 1/ Đề xuất "thuật toán tiến" và "thuật toán Viterbi cải tiến" đối với HMM không thuần nhất.
- 2/ Xây dựng HMM tương thích với bài toán MTT được nghiên cứu trong chương 3.
- 3/ Sử dụng các thuật toán được đề xuất và HMM tương thích để giải bài toán MTT đã nêu.

# Tài liệu tham khảo

## Tài liệu Tiếng Việt

- [1] NGUYỄN VĂN HỮU, NGUYỄN HỮU DƯ, *Phân tích thống kê và dự báo*, (2003)

## Tài liệu Tiếng Anh

- [2] ANDREW GELMAN, JONH B. CARLIN, HAL S. STERN, DONALD B. RUBIN, *Bayesian Data Analysis*, Chapman & Hall/CRC (2004).
- [3] CARI G. KAUFMAN, STEPHAN R. SAIN, *Bayesian Functional ANOVA Modeling Using Gaussian Process Prior Distributions* , (2010).
- [4] FABRIZIO SOLARI, BRUNERO LISEO, DONGCHU SUN , *Some remarks on Bayesian inference for one-way ANOVA models* ,(2007)
- [5] JEAN-MICHEL MARIN, CHRISTIAN P. ROBERT, *Bayesian Core: A Practical Approach to Computational Bayesian Statistics* , (2007).
- [6] PETER D.HOFF, *A First Course in Bayesian Statistical Methods*, (2009)
- [7] WILLIAM M. BOLSTAD, *Introduction to Bayesian Statistic*, (2007).