BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MA TRẬN CHUẨN JORDAN CỦA TỰ ĐỒNG CẤU

CN. Hà Hữu Cao Trình

Hà Nội, 6/2021

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MA TRẬN CHUẨN JORDAN CỦA TỰ ĐỒNG CẤU

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 6/2021

MỤC LỤC

1. MỞ ĐẦU

Dạng chuẩn tắc Jordan là một khái niệm quan trọng trong Đại số tuyến tính. Nó được coi là dạng đồng dạng đơn giản nhất của các ma trận vuông trên các trường khác nhau và làm bộc lộ những tính chất đặc trưng của ma trận và của ánh xạ tuyến tính tương ứng.

Với mọi toán tử tuyến tính T trên không không gian vector V hữu hạn chiều ta đều tìm được một cơ sở nào đó của V để ma trận biểu diễn T đối với cơ sở B có dạng Jordan. Mọi ma trận vuông A đều đồng dạng với một ma trận dạng chính tắc Jordan của A.

Khái niệm dạng chuẩn tắc Jordan cũng được sử dụng hiệu quả trong việc giải các bài toán thi Olympic sinh viên môn Đại số.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Định nghĩa: Cho V là một không gian vector trên trường K. Một ánh xạ tuyến tính $\sigma : V \to V$ được gọi là một toán tử tuyến tính của V. Một toán tử tuyến tính σ của V còn được gọi là một phép biến đổi tuyến tính.

2.2. Ví dụ:

1. Cho ánh xạ $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $\sigma(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$. Khi đó σ là một toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^2$.

2. Cho ánh xạ $\sigma : P_2[x] \to P_2[x]$ cho bởi $\sigma(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = 3a_0 + (5a_0 - 2a_1)t + (ta_1 + a_2)t^2$

Khi đó σ là một toán tử tuyến tính trên $P_2[x]$.

3. Cho ánh xạ $\sigma : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ xác định bởi

$$\sigma(X) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X$$

Khi đó σ là một toán tử tuyến tính trên $M_2(\mathbb{R})$.

2.3. Định nghĩa: Cho σ là một toán tử tuyến tính của không gian vector V trên trường K. Một phần tử $\lambda \in K$ được gọi là giá trị riêng của σ nếu tồn tại một vector khác không $v \in V$ sao cho $\sigma(v) = \lambda v$. Khi đó vector v được gọi là vector riêng của σ ứng với giá trị riêng λ .

2.4. Ví dụ:

1. Cho σ là một toán tử tuyến tính của không gian vector V trên trường K. Khi đó phần tử 0 là giá trị riêng của σ khi và chỉ khi $Ker\sigma \neq 0$. Vì Khi đó $v \neq 0$ là vector riêng của σ ứng với giá trị riêng 0 khi và chỉ khi $v \in Ker\sigma$.

2. Mọi vector khác 0 đều là vector riêng của toán tử đồng nhất hoặc toán tử 0. Với toán tử đồng nhất, thì giá trị riêng bằng 1, còn toán tử 0 thì giá trị riêng là 0.

3. Cho f là toán tử tuyến tính trên không gian $\mathbb{R}^3$ được xác định như sau:

$f(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 - 2x_3, -3x_1 - x_2)$ có giá trị riêng là $\lambda = 4$ và một vector riêng tương ứng với giá trị riêng này là $u = (1,1,-1)$ vì f (u) = f (1, 1, -1) = (4,4,-4) = λu.

2.5. Định lý: Giả sử σ là một toán tử tuyến tính của không gian vector v trên trường K. Khi đó $\lambda \in K$ là giá trị riêng của σ nếu và chỉ nếu $\sigma - \lambda Id_V$ không là đơn ánh.

Chứng minh:

Nhận xét $\sigma(v) = \lambda v$ khi và chỉ khi $(\sigma - \lambda Id_V)v = 0$ với mọi $\lambda \in K$. Nếu λ là một giá trị riêng của σ thì tồn tại một vector v khác 0 sao cho $\sigma(v) = \lambda v$. Suy ra $v \in Ker(\sigma - \lambda Id)$, vì v khác 0 nên $Ker(\sigma - \lambda Id_V)$ khác 0 do đó $\sigma - \lambda Id_V$ không là đơn ánh. Đảo lại, giả sử $\sigma - \lambda Id_V$ không là đơn cấu. Khi đó tồn tại một vector v khác 0 sao cho $(\sigma - \lambda Id_V)v = 0$ suy ra $\sigma(v) = \lambda v$. Do đó λ là một giá trị riêng của σ và v là vector riêng tương ứng.

2.6. Định lý: Giả sử σ là một toán tử tuyến tính của không gian vector V trên trường K. Khi đó nếu c là các vector riêng của σ ứng với các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ thì $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ độc lập tuyến tính.

Chứng minh: Giả sử $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ phụ thuộc tuyến tính. Khi đó, tồn tại chỉ số s nhỏ nhất sao cho v_{s+1} là tổ hợp tuyến tính của các vector độc lập tuyến tính $v_1, v_2, ..., v_s$ hay tồn tại các số $k_1, k_2, ..., k_s \in K$ sao cho $v_{s+1} = k_1 v_1 + k_2 v_2 + ... + k_s v_s$.

Do v_i là các vector riêng của toán tử σ ứng với giá trị riêng λ_i nên $\sigma(v_i) = \lambda_i v_i$ với mọi i = 1, 2,..,s.

Từ đó ta có $\sigma(v_{s+1}) = k_1\sigma(v_1) + k_2\sigma(v_2) + ... + k_s\sigma(v_s)$ hay $\lambda_{s+1}v_{s+1} = k_1\lambda_1 v_1 + k_2\lambda_2 v_2 + ... + k_s\lambda_s v_s$.

Suy ra $k_1(\lambda_1 - \lambda_{s+1})v_1 + k_2(\lambda_2 - \lambda_{s+1})v_2 + ... + k_s(\lambda_s - \lambda_{s+1})v_s = 0$. Vì tập $\{v_1, v_2, ..., v_s\}$ độc lập tuyến tính nên $k_i(\lambda_i - \lambda_{s+1}) = 0$ suy ra $k_i = 0, \forall i = \overline{1,s}$. Do đó $v_{s+1} = 0$, mâu thuẫn với $v_{s+1} \neq 0$. Vậy $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ độc lập tuyến tính.

2.7. Định lý: Cho σ là một toán tử tuyến tính của không gian vector V trên trường K. Giả sử $\lambda \in K$ là một giá trị riêng của σ. Khi đó tập $V_\sigma(\lambda) = \{\sigma \in V \mid \sigma(v) = \lambda v\}$ là một không gian vector con của V.

Chứng minh:

Do vector 0 thuộc $V_\sigma(\lambda)$ nên $V_\sigma(\lambda) \neq \varnothing$. Nếu $u, v \in V_\sigma(\lambda)$ thì $\sigma(u) = \lambda u; \sigma(v) = \lambda(v)$. Khi đó,

$$\begin{aligned} &\sigma(u+v) = \sigma(u) + \sigma(v) = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v) \\ &\sigma(ku) = k\sigma(u) = k(\lambda u) = \lambda(ku) \end{aligned}$$

Vậy u + v và ku đều thuộc vào $V_\sigma(\lambda)$ với mọi $u, v \in V_\sigma(\lambda)$ và với mọi k thuộc K. Do đó $V_\sigma(\lambda)$ là một không gian vector con của V.

Không gian vector con $V_\sigma(\lambda)$ được gọi là không gian vector riêng của σ ứng với giá trị riêng λ. Không gian vector riêng $V_\sigma(\lambda)$ bao gồm các vector riêng của σ ứng với giá trị riêng λ và vector 0.

Nhận xét:

Nếu dim V = n và σ có ma trận biểu diễn A theo cơ sở S thì

a) λ là giá trị riêng của σ khi và chỉ khi λ là nghiệm của đa thức đặc trưng $f_\sigma(t) = f_A(t) = |A - tI_n|$ của σ.

b) Mỗi toán tử tuyến tính của không gian vector n chiều có tối đa n giá trị riêng khác nhau.

c) Ký hiệu $[v]_S$ là tọa độ của vector v trong cơ sở S. Khi đó λ là giá trị riêng của σ khi và chỉ khi hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $A.[v]_S = \lambda[v]_S$ có nghiệm không tầm thường. Tập các nghiệm không tầm thường của hệ này là tọa độ của tất cả các vector riêng của σ ứng với giá trị riêng λ.

Ví dụ: Cho toán tử tuyến tính $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $\sigma(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$. Hãy xác định tất cả các giá trị riêng của σ và tất cả các vector riêng ứng với các giá trị riêng tìm được.

Giải: Xét ma trận A của σ trong cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$. Ta có ma trận A như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Xét đa thức đặc trưng của ma trận A.

$$f_A(t) = \begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ 1 & 2-t \end{vmatrix} = (2-t)^2 - 1 = 4 - 4t + t^2 - 1 = t^2 - 4t + 3.$$

Xét phương trình đặc trưng của ma trận A ta có được hai nghiệm t = 1 và t = 3. Khi đó $\lambda = 1$ và $\lambda = 3$ là hai giá trị riêng của A.

Xét hệ phương trình $(A - I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$ ta được $\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Khi đó vector u_1 = (-1, 1) là một vector riêng của A.

Xét hệ pt $(A - 3I_2)X = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$ ta được $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Khi đó vector u_2 = (1, 1) là một vector riêng của A.

2.8. Định nghĩa: Cho σ là một toán tử tuyến tính của không gian vector V trên trường K. Một không gian vector con W của V là một không gian bất biến đối với toán tử σ nếu $\sigma(W) \subset W$, hay $\sigma(w) \in W$ với mọi $w \in W$.

Ví dụ: Cho σ là một toán tử tuyến tính của không gian vector V trên trường K. Khi đó 0 và V là các không gian bất biến của V đối với toán tử σ và chúng được gọi là không gian con bất biến tầm thường. Nếu σ không là đẳng cấu thì hạt nhân $\mathrm{Ker}\sigma \neq 0$ là một không gian bất biến không tầm thường của V đối với σ.

Nếu σ là ánh xạ đồng nhất hoặc ánh xạ 0 thì mọi không gian con của V là không gian con bất biến đối với toán tử σ.

Nếu λ là một giá trị riêng của σ thì mọi không gian con của không gian vector riêng ứng với λ đều là không gian bất biến của σ.

2.9. Định lý: Không gian $V_\sigma(\lambda)$ là không gian con bất biến của V đối với σ.

Chứng minh: Ta có $V_\sigma(\lambda)$ là một không gian vector con của V. Với mọi $v \in V_\sigma(\lambda)$. Ta có $\sigma(\lambda v) = \lambda\sigma(v) = \lambda(\lambda v)$ do đó $\lambda v \in V_\sigma(\lambda)$. Như vậy với mọi vector $v \in V_\sigma(\lambda)$, ta luôn có $\sigma(v) = \lambda v \in V_\sigma(\lambda)$. Do đó $V_\sigma(\lambda)$ là không gian con bất biến của V .

Cho V là không gian vector n chiều trên trường K và σ là một toán tử tuyến tính của V. Giả sử $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một cơ sở của V. Với mọi $v \in V$, ta sẽ tìm mối quan hệ giữa $[v]_S$ và $[\sigma(v)]_S$. Do S là một cơ sở của V nên vector v được viết duy nhất dưới dang $v = k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n$. Khi đó tọa độ của v đối với cơ sở S là $[v]_S = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix}$

Mặt khác do σ là một toán tử tuyến tính trên K nên

$$\sigma(v) = \sigma(k_1v_1 + k_2v_2 + ... + k_nv_n) = k_1\sigma(v_1) + k_2\sigma(v_2) + ... + k_n\sigma(v_n).$$

Do đó ta có

$$[\sigma(v)]_S = k_1[\sigma(v_1)]_S + k_2[\sigma(v_2)]_S + ... + k_n[\sigma(v_n)]_S.$$

Giả sử $[\sigma(v_i)]_S = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ là tọa độ của vector $\sigma(v_i)$ đối với cơ sở S với mọi i = 1, 2, …, n.

Khi đó ta viết $[\sigma(v)]_S = A[v]_S$ trong đó ma trận

$$A = \begin{bmatrix} [\sigma(v_1)]_S & [\sigma(v_2)]_S & ... & [\sigma(v_n)]_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Tính chất:

a) Không gian con $U \subset V$ là không gian con bất biến của σ khi và chỉ khi ảnh của một hệ sinh của U nằm trong U.

b) Nếu $U \subset V$ là không gian con bất biến, thì ánh xạ hạn chế $\sigma|_U$ là một toán tử tuyến tính của U.

2.10. Định nghĩa: Cho V là một không gian vector n chiều trên trường K và σ là một toán tử tuyến tính của V . Toán tử tuyến tính σ được gọi là chéo hóa được nếu ma trận biểu diễn của σ theo một cơ sở S nào đó là ma trận đường chéo.

2.11. Định lý: Cho V là một không gian vector n chiều trên trường K và σ là một toán tử tuyến tính của V. Khi đó σ chéo hóa được nếu và chỉ nếu σ có n vector riêng độc lập tuyến tính. Hơn nữa các phần tử trên đường chéo chính của ma trận biểu diễn là các giá trị riêng của σ.

Chứng minh:

Giả sử A chéo hóa được và A là ma trận biểu diễn của σ theo cơ sở $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Khi đó

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ và } \sigma(v_i) = \lambda_i v_i .$$

Vì S là cơ sở của V nên v_i khác vector 0 với mọi i = 1, 2, …, n. Do đó, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ là các giá trị riêng của σ và $v_1, v_2, .., v_n$ là các vector riêng tương ứng. Đảo lại nếu σ có n vector riêng $v_1, v_2, .., v_n$ độc lập tuyến tính thì $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là cơ sở của V. Vì v_i là vector riêng của σ nên tồn tại $\lambda_i \in K$ sao cho $\sigma(v_i) = \lambda_i v_i$ với mọi i = 1, 2, …, n. Khi đó

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$$ chính là ma trận của σ theo cơ sở S. Ma trận biểu diễn A của σ là ma trận đường chéo nên σ chéo hóa được.

Hai ma trận của cùng một toán tử tuyến tính theo hai cơ sở khác nhau là đồng dạng và do đó chúng có cùng đa thức đặc trưng. Nếu ta đồng nhất $v \in V$ với $[v]_S$ thì toán tử tuyến tính σ được xác định bởi $\sigma(v) = Av$ trong đó A là ma trận biểu diễn của σ.

Giả sử $\lambda \in K$ là một giá trị riêng của A. Khi đó tồn tại vector v khác 0 sao cho $A(v) = \lambda v = \sigma(v)$. Điều này đồng nghĩa với λ cũng là giá trị riêng của toán tử tuyến tính σ và ngược lại. Do đó A và σ có cùng tập các vector riêng và tập các giá trị riêng. Vậy muốn xác định các giá trị riêng và các vector riêng của một toán tử tuyến tính σ ta chỉ việc xác định các giá trị riêng và các vector riêng của ma trận biểu diễn A của σ theo một cơ sở nào đó.

2.12. Hệ quả: Cho V là một không gian vector n chiều trên trường K, σ là một toán tử tuyến tính của V và A là ma trận biểu diễn của σ theo cơ sở S. Khi đó, σ là chéo hóa được nếu và chỉ nếu A chéo hóa được.

Ví dụ:

1. Cho phép biến đổi tuyến tính $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $\varphi(x, y) = (5x + 4y, 8x + 9y)$

a) Tìm các giá trị riêng và vector riêng của phép biến đổi φ

b) Hỏi phép biến đổi φ có chéo hóa được không?

Giải

Ma trận của φ đối với cặp cơ sở chính tắc của $\mathbb{R}^2$ là $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$

Đa thức đặc trưng của phép biến đổi φ là $f_\varphi(t) = \begin{vmatrix} 5-t & 4 \\ 8 & 9-t \end{vmatrix} = t^2 - 14t + 13$

Xét phương trình đặc trưng $f_\varphi(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 14t + 13 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = 13$. Vậy phép biến đổi φ có hai giá trị riêng là $\lambda = 1, \lambda = 13$

Ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$. Xét hệ pt thuần nhất $\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 8x + 8y = 0 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm u =(s, -s) với $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$. Do đó tập các vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$ là u =(s, -s) với $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$.

Chọn s = 1, ta được 1 vector riêng $u_1 = (1, -1)$ ứng với giá trị riêng $\lambda = 1$

Tương tự đối với giá trị riêng $\lambda = 13$. Xét hệ pt thuần nhất $\begin{cases} -8x + 4y = 0 \\ 8x - 4y = 0 \end{cases}$.

Hệ có nghiệm u =(s, 2s) với $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$. Do đó tập các vector riêng ứng với giá trị riêng $\lambda = 13$ là u =(s, -s) với $s \in \mathbb{R}, s \neq 0$.

Chọn s = 1 ta được 1 vector riêng u_2 = (1, 2) ứng với giá trị riêng $\lambda = 13$.

Do φ có hai vector riêng độc lập tuyến tính nên φ chéo hóa được và ứng với cơ sở $S = \{u_1, u_2\}$ thì ma trận của φ có dạng chéo như sau:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix}$$

2. Cho T là toán tử tuyến tính trên $\mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 + 2x_2)$$

a) Hãy xác định các giá trị riêng và vector riêng của T.

b) Hỏi T có chéo hóa được không? Nếu được tìm cơ sở để ma trận của T trong cơ sở đó có dạng chéo.

3. Cho toán tử tuyến tính $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ xác định bởi $\sigma(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$.

a) Tìm các giá trị riêng và vector riêng của σ.

b) Chứng tỏ rằng σ chéo hóa được. Hãy tìm một cơ sở S để ma trận của σ theo S theo ma trận đường chéo

Định lý 1.13. Cho σ là một toán tử tuyến tính trên không gian vector hữu hạn chiều V. Gọi $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ là tất cá các trị riêng khác nhau của T và $E(\lambda_i)$ là không gian riêng ứng với giá trị riêng λ_i và $n_i = \dim E(\lambda_i)$. Khi đó các điều sau đây tương đương:

i) T chéo hóa được;

ii) Đa thức đặc trưng của T có dạng $f_T(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}(t-\lambda_2)^{n_2}...(t-\lambda_k)^{n_k}$

iii) $n_1 + n_2 + .. + n_k = \dim V$.

Nhận xét:

Giả sử λ là một giá trị riêng của T, $\dim E(\lambda) = k$ và đa thức đặc trưng của T có dạng $f_T(t) = (t-\lambda)^m g(x)$, với $g(\lambda) \neq 0$, nếu m > k thì T không chéo hóa được.

3. MA TRẬN CHUẨN JORDAN VÀ ỨNG DỤNG

3.1. Định nghĩa:

Một ma trận $J \in M_n(K)$ gọi là ma trận chuẩn tắc Jordan nếu nó có dạng:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \varepsilon_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \varepsilon_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Trong đó:

$\lambda_j \in K, \forall j = \overline{1,n}$

$\varepsilon_i \in \{0,1\}, \forall j = \overline{1,n-1}$

$\forall j \in \{1,\dots,n-1\}$ nếu $\varepsilon_j = 1$ thì $\lambda_j = \lambda_{j+1}$

Ví dụ:

- Các ma trận chéo (nói riêng: ma trận không, ma trận đơn vị) đều là các ma trận chuẩn tắc Jordan.

- Ma trận $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ là một ma trận chuẩn tắc Jordan.

3.2. Định nghĩa: Ma trận Jordan dạng đặc biệt $J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$ được gọi là một khối Jordan thuộc giá trị λ_k.

Nhận xét: Mỗi ma trận Jordan J gồm nhều khối Jordan tạo nên:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$, trong đó $J_1, J_2, ..., J_k$ là các khối Jordan.

Trong ví dụ trên thì ma trận A gồm các khối Jordan sau:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_3 = [2], J_4 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Ta cần tìm điều kiện để một ma trận A đồng dạng với một ma trận Jordan. Có hai cách tìm dạng chuẩn tắc của một khối Jordan, dựa vào khái nhiệm đa thức tối tiểu hoặc dựa vào khái niệm $\lambda -$ ma trận. Ta cần các khái niệm sau đây.

3.3. Định nghĩa: Ta gọi λ - ma trận vuông cấp n trên trường K là ma trận có dạng.

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \dots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \dots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & \dots & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$, trong đó $a_{ij} \in K[\lambda], \forall i, j = \overline{1, ..., n}$.

Một $\lambda -$ ma trận $A(\lambda)$ gọi là có dạng chính tắc nếu nó có dạng sau:

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_{n-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e_n(\lambda) \end{bmatrix}$$ trong đó

$e_j(\lambda) \in K[\lambda]$ là những đa thức, có hệ số cao nhất là 1 nếu khác đa thức 0, $\forall j = \overline{1,...,n}$

$e_j(\lambda)$ chia hết cho $e_{j-1}(\lambda), \forall j = \overline{2,...,n}$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 + 2\lambda + 3 & \lambda - 8 \\ 3\lambda + 1 & 2\lambda^2 + 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Ma trận đơn vị, ma trận không là những $\lambda -$ma trận chính tắc

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda-1)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ là một $\lambda -$ma trận chính tắc

Nhận xét:

- Nếu λ - ma trận vuông cấp n $A(\lambda)$ có bậc lớn nhất đối với các $a_{ij}(\lambda)$ là m thì ta có thể viết $A(\lambda)$ dưới dạng

$A(\lambda) = B_0\lambda^m + B_1\lambda^{m-1} + ... + B_{m-1}\lambda + B_m$ với $B_0, B_1, .., B_m \in M_n(K)$

- Hai ma trận A, B thuộc $M_n(K)$ là đồng dạng nhau khi và chỉ khi hai $\lambda -$ma trận $A - \lambda I_n$ và $B - \lambda I_n$ là tương đương.

3.4. Định nghĩa: Cho đa thức $f(\lambda) = a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + ... + a_{m-1}\lambda + a_m \in K[\lambda]$ và ma trận $A = [a_{ij}] \in M_n(K)$.

Khi đó ma trận vuông cấp n, $a_0A^m + a_1A^{m-1} + ... + a_{m-1}A + a_mI_n$ được gọi là giá trị của đa thức $f(\lambda)$ tại ma trận A, ký hiệu là $f(A)$ hay $f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + ... + a_{m-1}A + a_mI_n$

Nếu $f(A) = 0 = [0]_{nxn}$ thì A được gọi là nghiệm của đa thức $f(\lambda)$.

3.5. Định lý: Mọi $\lambda -$ma trận đều có thể đưa về dạng chính tắc một cách duy nhất nhờ một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp.

Chứng minh:

1) Sự chính tắc hóa được.

Cho $\lambda -$ ma trận $A(\lambda)$.

Nếu $A(\lambda)=0$ thì nó đã có dạng chính tắc. Giả sử rằng $A(\lambda)\neq 0$ (suy ra mọi $\lambda -$ ma trận tương đương với $A(\lambda)$ đều khác 0).

Chứng minh theo quy nap theo cấp của k của $A(\lambda)$.

Khi k = 1 thì $A(\lambda)=[a_{11}(\lambda)]$ có dạng chính tắc (nếu cần thì nhân một số thích hợp để $a_{11}(\lambda)$ có hệ số cao nhất là 1.

Giả sử mệnh đề đúng cho mọi $\lambda -$ ma trận có cấp k = n – 1 và xét trường hợp $A(\lambda)$ có cấp k = n. Khi đó, trong tất cả các $\lambda -$ ma trận tương đương với $A(\lambda)$ có thể tìm được một ma trận

$B(\lambda)=\begin{bmatrix} b_{11}(\lambda) & b_{12}(\lambda) & ... & b_{1n}(\lambda) \\ b_{21}(\lambda) & b_{22}(\lambda) & ... & b_{2n}(\lambda) \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1}(\lambda) & b_{n2}(\lambda) & ... & b_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$ sao cho $b_{11}(\lambda)\neq 0$ và có bậc nhỏ nhất. Ngoài ra ta có thể giả sử $b_{11}(\lambda)\neq 0$ và có hệ số cao nhất bằng 1.

Trong ma trận $B(\lambda)$ này ta chứng minh $b_{11}(\lambda)$ chia hết mọi phần tử cùng dòng 1 và cùng cột 1. Thật vậy, giả sử $\exists k\in\{2,..,n\}$ sao cho $b_{1k}(\lambda)$ không chia hết cho $b_{11}(\lambda)$.

Trong $K[\lambda]$ ta có $b_{1k}(\lambda)=b_{11}(\lambda)q_k(\lambda)+r_k(\lambda)$ với $q_k(\lambda), r_k(\lambda)\in K[\lambda]$ và $\deg r_k(\lambda)<\deg b_{11}(\lambda)$. Khi đó biến đổi $B(\lambda)$ bằng cách:

- Nhân cột 1 với $-q(\lambda)$ rồi cộng vào cột k.
- Đổi chỗ cột 1 và cột k cho nhau:

Khi đó, $A(\lambda)\sim B(\lambda)=\begin{bmatrix} r(\lambda) & ... & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & ... \end{bmatrix}$. Mặt khác do $\deg r_k(\lambda)<\deg b_{11}(\lambda)$ nên mâu thuẫn với cách chọn $B(\lambda)$. Vậy $b_{11}(\lambda)$ chia hết mọi phần tử cùng dòng 1. Chứng minh tương tự cho trường hợp cột. Nhờ sự chia hết này ta có thể biến đổi.

$$B(\lambda) \sim \begin{bmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

Ma trận $C(\lambda) = \begin{bmatrix} c_{22}(\lambda) & \dots & c_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n2}(\lambda) & \dots & c_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$ có cấp n-1 nên theo giả thiết quy nạp có thể đưa về dạng chính tắc. Do đó:

$$A(\lambda) \sim B(\lambda) = \begin{bmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{bmatrix}$$

Ta cần chứng minh $b_{11}(\lambda)$ chia hết $e_2(\lambda)$ là đủ. Thật vậy, giả sử ngược lại $e_2(\lambda)$ không chia hết cho $b_{11}(\lambda)$. Khi đó khi chia $e_2(\lambda)$ cho $b_{11}(\lambda)$ ta được dư $r(\lambda)$ khác 0 và bậc cao nhất của $r(\lambda)$ nhỏ hơn bậc của $b_{11}(\lambda)$. Do đó

$$A(\lambda) \sim B(\lambda) = \begin{bmatrix} b_{11}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{11}(\lambda)q(\lambda) + r(\lambda) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e_n(\lambda) \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} r(\lambda) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$ mâu thuẫn với cách chọn $B(\lambda)$. Vậy $e_2(\lambda)$ chia hết $b_{11}(\lambda)$. (ĐPCM).

Chứng minh tính duy nhất:

Với mỗi k = 1, …, n ký hiệu $D_{k,A}(\lambda)$ là ước chung lớn nhất có hệ số cao nhất bằng 1 của tất cả các định thức con cấp k của $A(\lambda)$. Ta sẽ sử dụng bổ đề được phát biểu sau đây.

Bổ đề: Phép biến đổi sơ cấp thực hiện trên $A(\lambda)$ không làm thay đổi $D_{k,A}(\lambda)$, với mọi k = 1, …, n.

Giả sử $A(\lambda)$ được đưa về dạng chính tắc:

$$E(\lambda)=\begin{bmatrix} e_1(\lambda) & 0 & ... & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e_n(\lambda) \end{bmatrix}.$$

Do đó $A(\lambda) \sim E(\lambda)$. Theo trên ta có $D_{k,A}(\lambda) = D_{k,E}(\lambda), \forall k=\overline{1,n}$.

Do đó,

$$\begin{aligned} &D_{1,A}(\lambda) = D_{1,E}(\lambda) = e_1(\lambda) \\ &D_{2,A}(\lambda) = D_{2,E}(\lambda) = e_1(\lambda)e_2(\lambda) \\ &... \\ &D_{n,A}(\lambda) = D_{n,E}(\lambda) = e_1(\lambda)e_2(\lambda)...e_n(\lambda) \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} &e_1(\lambda) = D_{1,A}(\lambda) \\ &e_2(\lambda) = \frac{D_{2,A}(\lambda)}{D_{1,A}(\lambda)} \\ &... \\ &e_i(\lambda) = \frac{D_{i,A}(\lambda)}{D_{i-1,A}(\lambda)} \\ &... \\ &e_n(\lambda) = \frac{D_{n,A}(\lambda)}{D_{n-1,A}(\lambda)} \end{aligned}$$

Điều này thể hiện tính duy nhất của dạng chính tắc của $A(\lambda)$. Các đa thức $e_i(\lambda)$ được gọi là các nhân tử bất biến của $\lambda -$ ma trận $A(\lambda)$.

Ví dụ: Đưa $\lambda -$ ma trận sau về dạng chính tắc bằng các phép biến đổi sơ cấp

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda+3 \end{bmatrix}$$

Giải

Ta có

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda+3\end{bmatrix}\xrightarrow{d_1\to d_1+d_2}\begin{bmatrix}\lambda & \lambda+3\\ 0 & \lambda+3\end{bmatrix}\xrightarrow{c_1\to c_2-c_1}\begin{bmatrix}3 & \lambda+3\\ \lambda+3 & \lambda+3\end{bmatrix}\xrightarrow{d_1\to d_1/3}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\lambda}{3}+1\\ \lambda+3 & \lambda+3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_2\to -d_1(\lambda+3)+d_2}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\lambda}{3}+1\\ 0 & \dfrac{-\lambda}{3}(\lambda+3)\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2\to c_1(\frac{\lambda}{3}+1)-c_2}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\lambda}{3}+1\\ 0 & \dfrac{\lambda}{3}(\lambda+3)\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2\to 3c_2}\begin{bmatrix}1 & \dfrac{\lambda}{3}+1\\ 0 & \lambda(\lambda+3)\end{bmatrix}$$

Nhận xét:

Trong dạng chính tắc của một $\lambda-$ma trận nếu có:

$e_j(\lambda)=1$ thì chúng phải đứng ở vị trí đầu của các đường chéo chính.

$e_j(\lambda)=0$ thì chúng phải đứng ở các vị trí cuối của đường chéo chính.

Một cách tổng quát, dạng chính tắc của một $\lambda-$ma trận là như sau:

$$\begin{bmatrix}1 & .... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & ... & 0 & e_k(\lambda) & .... & 0 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & e_j(\lambda) & 0 & ... & 0\\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0\end{bmatrix}$$

Xét khối Jordan

$$J_k=\begin{bmatrix}\lambda_k & 1 & ... & 0 & 0\\ 0 & \lambda_k & ... & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & ... & \lambda_k & 1\\ 0 & 0 & ... & 0 & \lambda_k\end{bmatrix}.$$

Khi đó $\lambda-$ma trận

$$J_k - \lambda I_n = \begin{bmatrix} \lambda_k - \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k - \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k - \lambda \end{bmatrix}$$

có UCLN của các định thức con là

$$D_{m,J_k}(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^m$$
$$D_{m,J_k}(\lambda) = 1$$

vì $J_k - \lambda I$ có 1 trong các định thức con cấp m-1 là định thức

$$D_{m1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_k - \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & .. & .. \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_k - \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Mặt khác $D_{i,A}(\lambda)$ chia hết $D_{i+1,A}(\lambda)$ nên

$$D_{m-1,J_k}(\lambda) = D_{m-2,J_k}(\lambda) = \dots = D_{1,J_k}(\lambda) = 1$$

Do đó $J_k - \lambda I$ được đưa về dạng chính tắc sau:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \left(\lambda - \lambda_k\right)^m \end{bmatrix}$$

Ví dụ:

Tìm ma trận Jordan J đồng dạng với ma trận A sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -5 & 4 \\ 8 & -4 & 3 & -4 \\ 15 & -10 & 11 & -11 \end{bmatrix}$$

Giải

Ta đưa ma trận $A-\lambda I$ về dạng chính tắc

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & (\lambda+3)^3\end{bmatrix}$$

Do đó ma trận Jordan đồng dạng với A là ma trận J:

$$J=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

Ví dụ: Viết ma trận Jordan ma ma trận đặc trưng có dạng chính tắc là

$$J-\lambda I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda-1) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda^2-1)(\lambda+2) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\lambda^2-1)(\lambda+2)^2\end{bmatrix}$$

Ma trận cần tìm là:

$$J=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

3.6. Định lý: Cho $A\in M_n(K)$ khi đó A đồng dạng với ma trận Jordan khi và chỉ khi đa thức đặc trưng của A phân tích được thành tích của n đa thức bậc nhất trên trường K (điều này tương đương với đa thức đặc trưng của A có n nghiệm, không nhất thiết phân biệt, thuộc K).

Chứng minh:

Đa thức đặc trưng của A là: $|A-\lambda I|$

Điều kiện đủ:

Giả sử $|A-\lambda I| = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}...(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$ với $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s \in K$ và $k_1+k_2+...+k_s = n$.

Khi đó trong $\lambda-$ma trận $A-\lambda I$ có

$$D_{n,A}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{k_1}(\lambda-\lambda_2)^{k_2}...(\lambda-\lambda_s)^{k_s}$$
$$D_{n,A}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}...(\lambda-\lambda_s)^{m_s}, m_i < k_i, \forall i = \overline{1,s}$$
....

Đặt $e_n(\lambda) = \dfrac{D_{n,A}(\lambda)}{D_{n-1,A}(\lambda)}, e_{n-1}(\lambda) = \dfrac{D_{n-1,A}(\lambda)}{D_{n-2,A}(\lambda)}, ..., e_1(\lambda) = D_{1,A}(\lambda)$

Thì ma trận $A-\lambda I$ tương đương với $B = \begin{bmatrix} e_1(\lambda) & 0 & ... & 0 \\ 0 & e_2(\lambda) & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & e_n(\lambda) \end{bmatrix}$

Gọi J là ma trận Jordan mà dạng chính tắc của $J-\lambda I$ là B thì A đồng dạng với J.

Điều kiện cần:

Giả sử A đồng dạng với một ma trận Jordan J. Khi đó $J-\lambda I$ và $A-\lambda I$ là hai $\lambda-$ma trận tương đương nên có cùng dạng chính tắc, do đó: $D_{n,A}(\lambda) = D_{n,J}(\lambda)$

Vì $D_{n,J}(\lambda)$ phân tích được thành tích các đa thức bậc nhất nên $D_{n,A}(\lambda)$ phân tích được. (Đã chứng minh xong).

3.7. Bổ đề: Giả sử phép biến đổi tuyến tính T của không gian vector V trên trường K có ma trận của T đối với cơ sở $e_1, e_2, ..., e_n$ là một ma trận khối Jordan J thuộc giá trị λ_1. Khi đó

$$(T-\lambda_1 Id_V)^k(e_j) = \begin{cases} 0 & ,k \geq j \\ e_{j-k} & ,0 \leq k < j \end{cases}$$

3.8. Định lý: Cho T là phép biến đổi tuyến tính của không gian vector n chiều V trên K mà ma trận của T đối với cơ sở $e_1, e_2, ..., e_n$ là một ma trận khối Jordan J thuộc giá trị λ_1. Khi đó

Các không gian con $M_0 = \{0\}, M_1 = \langle e_1 \rangle, M_2 = \langle e_1, e_2 \rangle, ..., M_n = \langle e_1, e_2, ..., e_n \rangle$ là các không gian con của V bất biến qua T. Hơn thế, đảo lại mọi không gian con của V bất biến qua T đều có dạng M_i.

3.9. Định nghĩa:

Đa thức p(x) có hệ số trong trường K được gọi là linh hóa toán tử tuyến tính T nếu p(T) = 0. Nếu p(x) là đa thức có bậc thấp nhất linh hóa T thì ta nói p là đa thức tối tiểu của T.

3.10. Mệnh đề: Nếu đa thức g(x) linh hóa toán tử tuyến tính T thì g(x) chia hết cho đa thức tối tiểu p(x) của T.

3.11. Định lý: Nếu T là toán tử tuyến tính trên không gian vector V có số chiều hữu hạn thì đa thức đặc trưng và đa thức tối tiểu của T có cùng nghiệm. Nói cách khác, nghiệm của đa thức tối tiểu là các trị riêng của T.

3.12. Định lý: Cho toán tử tuyến tính T trên không gian vector V hữu hạn chiều. Giả sử $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ là tất cả các trị riêng khác nhau của T và p(x) là đa thức tối tiểu của T. Khi đó, nếu T chéo hóa được thì $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_n)$.

3.13. Định lý (Halmilton – Cayley): Cho T là một toán tử tuyến tính trong không gian vector hữu hạn chiều V và f là một đa thức đặc trưng của T. Khi đó f(T) = 0. Suy ra, đa thức tối tiểu là ước của đa thức đặc trưng.

3.14. Định nghĩa:

Cho V là một không gian vector trên trường số phức $\mathbb{C}$, T là một toán tử tuyến tính trên V, α là một số phức và v là một vector khác 0 thuộc vào V.

Ta nói v là T-tuần hoàn nếu tồn tại số nguyên $r \geq 1$ sao cho $T^r v = 0$.

Số nguyên dương nhỏ nhất r có tính chất đó được gọi là chu kỳ của v đối với T. Lúc đó, $T^k v \neq 0$, với mọi số nguyên k thỏa $0 \leq k < r$.

Không gian vector V có số chiều hữu hạn được gọi là tuần hoàn (hay T- tuần hoàn) nếu tồn tại một số phức α và một vector $v \in V$ sao cho v là $(T-\alpha Id)-$tuần hoàn có chu kỳ r = dimV.

Nhận xét:

Tập hợp $\{(T-\alpha Id)^{r-1}v, ..., (T-\alpha Id)v, v\}$ (*) là một cơ sở của V.

Ma trận biểu diễn của T đối với cơ sở này có dạng:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Ma trận này chứa α trên đường chéo chính, số 1 ở phía trên đường chéo và 0 tại những vị trí còn lại. Ma trận dạng này được gọi là một khối Jordan, ký hiệu là $J(\alpha)$.

Khi đó, α là trị riêng, có vector riêng là $(T-\alpha Id)^{r-1}v$. Cơ sở (*) được gọi là cơ sở Jordan của T.

3.15. Định nghĩa: Cho các ma trận vuông $A_1, A_2, ..., A_k$ có cấp tương ứng là $n_1, n_2, ..., n_k$. Khi đó, ta gọi tổng trực tiếp của k ma trận này là một ma trận vuông cấp $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$ có dạng

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & A_2 & ... & 0 \\ ... & ... & \ddots & ... \\ 0 & ... & ... & A_n \end{bmatrix}$$

Ma trận A có tính chất các ma trận $A_1, A_2, ..., A_k$ nằm trên đường chéo chính, các vị trí còn lại của A đều bằng 0.

Nhận xét:

Giả sử V là tổng trực tiếp của những không gian con T- bất biến $V = V_1 \oplus V_2 \oplus .... \oplus V_m$, trong đó mỗi V_i đều tuần hoàn. Nếu ta chọn cơ sở Jordan cho mỗi V_i thì dãy của những cơ sở này sẽ tạo nên cơ sở của V, cũng được gọi là cơ sở Jordan của T. Ma trận J biểu diễn T đối với cơ sở Jordan này sẽ là tổng thực tiếp của m khối Jordan. Nếu V_i là $(T - \alpha_i Id) -$ tuần hoàn, i = 1, 2, …, m thì

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix}$$, trong đó $J_1, J_2, ..., J_k$ là các khối Jordan.

Ma trận này được gọi là dạng chính tắc Jordan của T.

Nhận xét:

Với mọi toán tử tuyến tính T trên không không gian vector V hữu hạn chiều ta đều tìm được một cơ sở nào đó của V để ma trận biểu diễn T đối với cơ sở B có dạng Jordan.

Mọi ma trận vuông A đều đồng dạng với một ma trận dạng chính tắc Jordan của A.

3.16. Định lý: Toán tử tuyến tính T trên không gian hữu hạn chiều V chéo hóa được khi và chỉ khi đa thức tối tiểu của T có dạng

$P_T(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)...(x - \lambda_k)$ với $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ là các giá trị riêng phân biệt của T.

3.17. Định lý: Giả sử toán tử tuyến tính T có các giá trị riêng phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$. Khi đó, đa thức tối tiểu của T có dạng $P_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}.(x - \lambda_2)^{m_2}...(x - \lambda_r)^{m_r}$ khi và chỉ khi trong dạng chính tắc Jordan của T, các khối Jordan $J(\lambda_i)$ ứng với trị riêng λ_i có bậc cao nhất là m_i

Ví dụ: Cho toán tử tuyến tính T trên V có ma trận biểu diễn đối với một cơ sở (được sắp) B nào đó của V là

$$[T]_B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Xác định ma trận Jordan J đồng dạng với ma trận $[T_B]$?

Giải. Xét đa thức đặc trưng của T là:

$$f_T(x) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$$

Đa thức tối tiểu là $p_T(x) = x^2$, T có một giá trị riêng bằng 0. Do đa thức tối tiểu có bậc 2 nên có tối đa 2 khối Jordan mỗi khối có bậc 2.

Khi đó dạng Jordan của T là

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. KẾT LUẬN

Báo cáo này có mục đích tìm hiểu và trình bày các khái niệm cơ bản về ánh xạ tuyến tính, ma trận của ánh xạ tuyến tính và dạng chuẩn tắc Jordan của ma trận của ánh xạ tuyến tính. Đồng thời ta liên hệ các ứng dụng của dạng chuẩn tắc Jordan trong các bài toán cụ thể của Đại số tuyến tính dựa trên các kết quả đã có.

Hy vọng nội dung của báo cáo sẽ giúp các thầy, cô giáo cùng với các bạn sinh viên đang giảng dạy và học tập có thêm nguồn tài liệu hữu ích, bổ sung thêm phương pháp để tiếp cận vấn đề, nhằm nâng cao chất lượng bài giảng, giúp các em sinh viên hiểu sâu sắc được vấn đề hướng tới đạt thành tích cao trong các kì thi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Hữu Việt Hưng, *Đại số tuyến tính*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2000.

[2] Trần Trọng Huệ, *Đại số tuyến tính và hình học giải tích,* NXB Giáo Dục, 2007.

[3] Nguyễn Đình Trí, *Toán học cao cấp,* NXB Giáo dục, 2006.