BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

CN. Hà Hữu Cao Trình

Hà Nội, 1/2021

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

BÀI TOÁN TÔ MÀU ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 1/2021

MỤC LỤC

1. Mở đầu………………………………………………………………………… 4

2. Cơ sở lý thuyết……………………………………………………………… 5

2.1. Khái niệm đồ thị……………………………………………………….... 5

2.2. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông……………………………………. 8

2.3. Đồ thị vô hướng liên thông……………………………………………….. 11

2.4. Đồ thị có hướng liên thông……………………………………………….. 12

3. Tô màu đồ thị và ứng dụng………………………………………………. 14

3.1. Bài toán tô màu đỉnh……………………………………………………… 14

3.2. Tô màu bản đồ……………………………………………………………. 18

4. Kết luận ……………………………………………………………………. 23

5. Tài liệu tham khảo………………………………………………………… 24

1. MỞ ĐẦU

Trong thực tế có nhiều bài toán được quy về bài toán đồ thị để giải quyết. Trong đó bài toán tô màu đồ thị có nhiều ứng dụng thiết thực trong kinh tế, kỹ thuật và đời sống. Chẳng hạn, bài toán tô màu bản đồ, bố trí kho chứa hóa chất, thiết kế các bảng vi mạch điện tử, sắp xếp lịch hỏi thi, bố trí các trạm truyền tin, xác lập các tuyến xe buýt thành phố, v.v ...

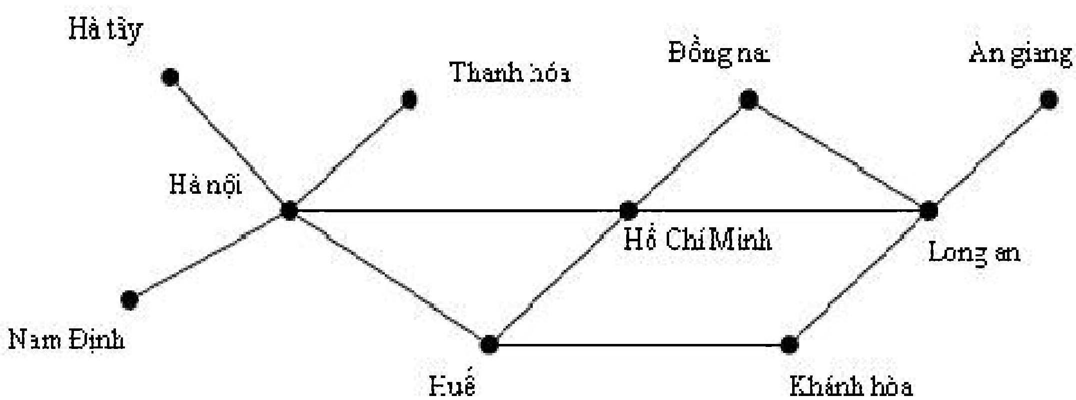
Có nhiều định lý nổi tiếng liên qua đến tô màu đồ thị như: Định lý Brooks, Minty về tô màu đỉnh; Định lý König, Vizing, Shannon về tô màu cạnh, định lý 5 màu của Heawood (1890) và Định lý 4 màu của Appel và Haken (1976).

Báo cáo này cung cấp một phần kiến thức về tô màu đồ thị, cụ thể là tô màu đỉnh của đồ thị và ứng dụng. Nội dung được chia thành 2 phần: Phần đầu giới thiệu về những kiến thức cơ bản về đồ thị và phần sau đề cập tới bài toán tô màu đỉnh của đồ thị, các định lý quan trọng, ví dụ và ứng dụng trong một bài toán cụ thể là tô màu bản đồ.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1. Khái niệm đồ thị

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc bao gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh này. Chúng ta phân biệt các loại đồ thị khác nhau bởi *kiểu* và *số lượng* cạnh nối hai đỉnh nào đó của đồ thị. Để có thể hình dung được tại sao lại cần đến các loại đồ thị khác nhau, chúng ta sẽ nêu ví dụ sử dụng chúng để mô tả một mạng máy tính. Giả sử ta có một mạng gồm các máy tính và các kênh điện thoại (gọi tắt là kênh thoại) nối các máy tính này. Chúng ta có thể biểu diễn các vị trí đặt náy tính bởi các điểm và các kênh thoại nối chúng bởi các đoạn nối, xem hình 1.



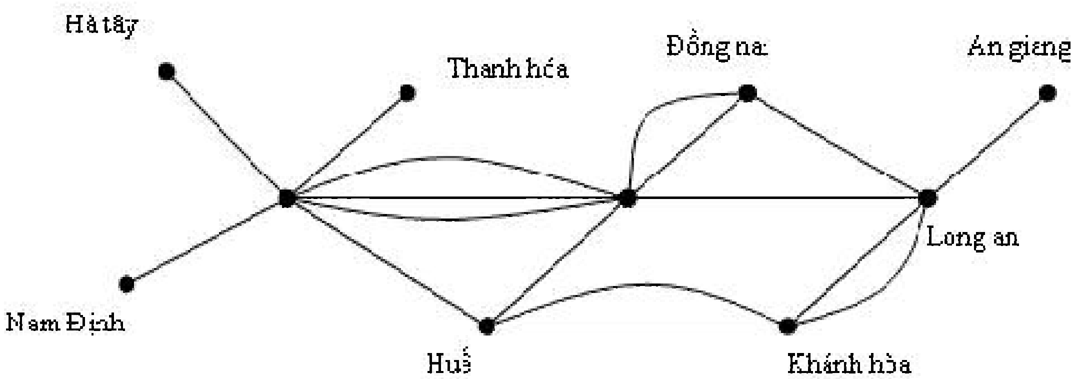
Hình 1. Sơ đồ mạng máy tính.

Nhận thấy rằng trong mạng ở hình 1, giữa hai máy bất kỳ chỉ có nhiều nhất là một kênh thoại nối chúng, kênh thoại naỳ cho phép liên lạc cả hai chiều và không có máy tính nào lại được nối với chính nó. Sơ đồ mạng máy cho trong hình 1 được gọi là *đơn đồ thị vô hướng*. Ta đi đến định nghĩa sau:

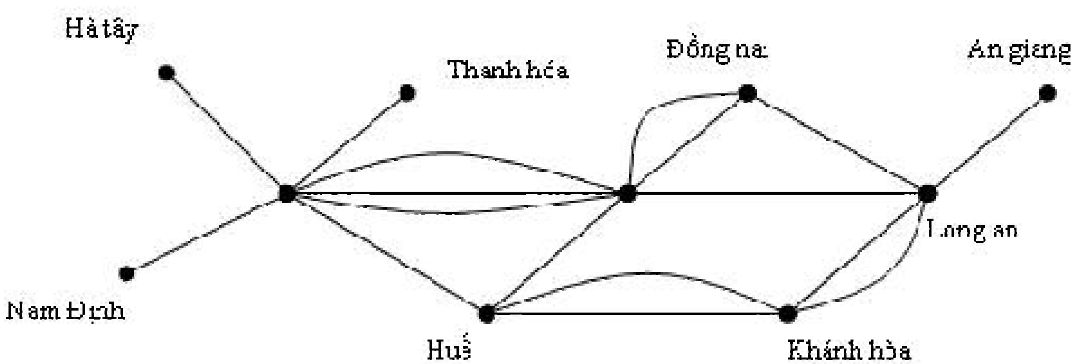
Định nghĩa 1. *Đơn đồ thị vô hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh, và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh.*

Trong trường hợp giữa hai máy tính nào đó thường xuyên phải truyền tải nhiều thông tin người ta phải nối hai máy nàu bởi nhiều kênh thoại. Mạng với đa kênh thoại giữa các máy được cho trong hình 2.

Định nghĩa 2. *Đa đồ thị vô hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh, và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh. Hai cạnh e 1 và e 2 được gọi là cạnh lặp nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.*



Hình 2 Sơ đồ mạng máy tính với đa kênh thoại.



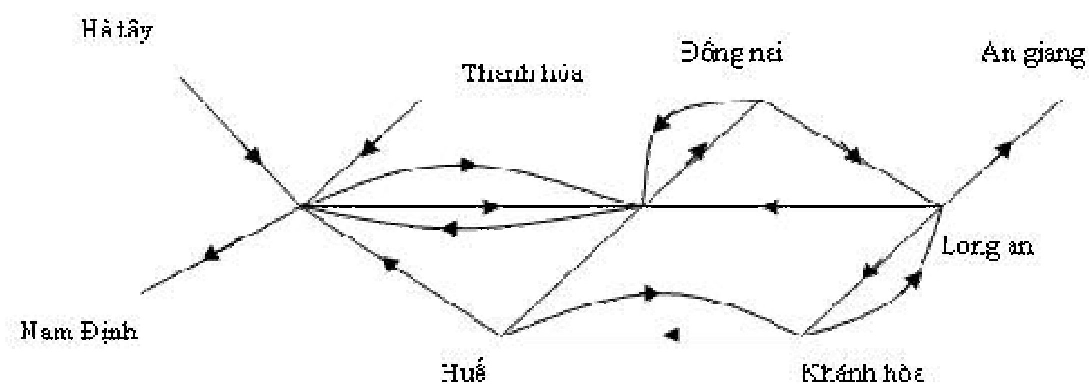
Hình 3 Sơ đồ mạng máy tính với kênh thoại thông báo.

Rõ ràng mỗi đơn đồ thị đều là đa đồ thị, nhưng không phải đa đồ thị nào cũng là đơn đồ thị, vì trong đa đồ thị có thể có hai (hoặc nhiều hơn) cạnh nối một cặp đỉnh nào đó.

Trong mạng máy tính có thể có những kênh thoại nối một náy nào đó với chính nó (chẳng hạn vời mục đính thông báo). Mạng như vậy được cho trong hình 3. Khi đó đa đồ thị không thể mô tả được mạng như vậy, bởi vì có những *khuyên* (cạnh nối một đỉnh với chính nó). Trong trường hợp nàychúng ta cần sử dụng đến khái niệm *giả đồ thị vô hướng,* được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 3. *Giả đồ thị vô hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử (không nhất thiết phải khác nhau) của V gọi là cạnh. Cạnh e được gọi là khuyên nếu nó có dạng e = (u, u).*

Các kênh thoại trong mạng máy tính có thể chỉ cho phép truyền tin theo một chiều. Chẳng hạn, trong hình 4 máy chủ ở Hà Nội chỉ có thể nhận tin từ các máy ở địa phương, có một số máy chỉ có thể gửi tin đi, còn các kênh thoại cho phép truyền tin theo cả hai chiều được thay thế bởi hai cạnh có hướng ngược chiều nhau.



Hình 4. Mạng máy tính với kênh thoại một chiều.

Định nghĩa 4. *Đơn đồ thị có hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung.*

Nếu trong mạng có thể có đa kênh thoại một chiều, ta sẽ phải sử dụng đến khái niệm *đa đồ thị có hướng*:

Định nghĩa 5. *Đa đồ thị có hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung. Hai cung* e_1*,* e_2 *tương ứng với cùng một cặp đỉnh được gọi là cung lặp.*

Trong các phần tiếp theo chủ yếu chúng ta sẽ làm việc với đơn đồ thị vô hướng và đơn đồ thị có hướng. Vì vậy, để cho ngắn gọn, ta sẽ bỏ qua tính từ **đơn** khi nhắc đến chúng.

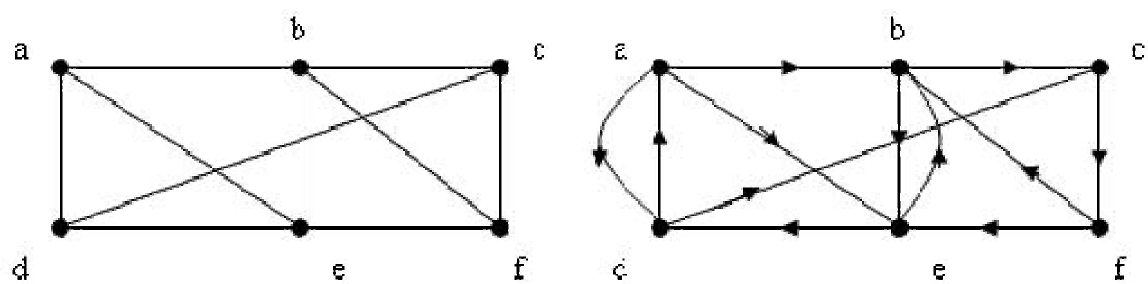
2.2. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông

Định nghĩa 6. *Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v, trong đó n là số nguyên dương, trên đồ thị vô hướng G = (V, E) là dãy* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *trong đó*

$$u = x_0,\ v = x_n,\ (x_i, x_{i+1}) \in E,\ i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v gọi là đỉnh cuối của đường đi. Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là u = v) được gọi là chu trình . Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có cạnh nào bị lặp lại.

Ví dụ 1. Trên đồ thị vô hướng cho trong hình 5: a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4. Còn d, e, c, a không là đường đi, do (c,e) không phải là cạnh của đồ thị. Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 5. Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài là 5 không phải là đường đi đơn, do cạnh (a, b) có mặt trong nó 2 lần.



Hình 5 Đường đi trên đồ thị

Khái niệm đường đi và chu trình trên đồ thị có hướng được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong trường hợp đồ thị vô hướng, chỉ khác là ta có chú ý đến hướng trên các cung.

Định nghĩa 7. *Đường đi độ dài n từ đỉnh u đến đỉnh v, trong đó, n là số nguyên dương, trên đồ thị có hướng G = (V, A) là dãy* $x_0, x_1, \dots, x_n$ *trong đó*

$$u = x_0 \,,\ v = x_n \,,\ (x_i, x_{i+1}) \in E,\ i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v gọi là đỉnh cuối của đường đi. Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là u = v) được gọi là chu trình . Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có cạnh nào bị lặp lại.

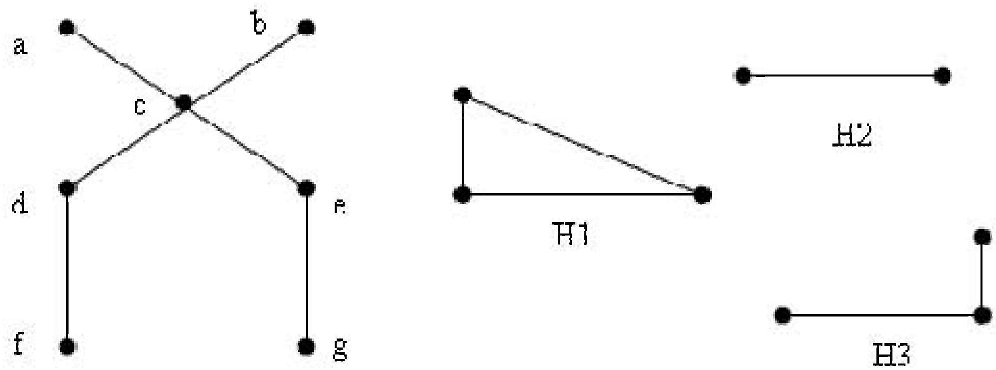
Ví dụ 2. Trên đồ thị có hướng cho trong hình 1.6: a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4. Còn d, e, c, a không là đường đi, do (c,e) không phải là cạnh của đồ thị. Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 4. Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài là 5 không phải là đường đi đơn, do cạnh (a, b) có mặt trong nó 2 lần.

Xét một mạng máy tính. Một câu hỏi đặt ra là hai máy tính bất kỳ trong mạng này có thể trao đổi thông tin được với nhau hoặc là trực tiếp qua kênh nối chúng hoặc thông qua một hoặc vài máy tính trung gian trong mạng? Nếu sử dụng đồ thị để biểu diễn mạng máy tính này (trong đó các đỉnh của đồ thị tương ứng với các máy tính, còn các cạnh tương ứng với các kênh nối) câu hỏi đó được phát biểu trong ngôn ngữ đồ thị như sau: Tồn tại hay không đường đi giữa mọi cặp đỉnh của đồ thị.

Định nghĩa 8. *Đồ thị vô hướng G = (V, E) được gọi là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.*

Như vậy hai máy tính bất kỳ trong mạng có thể trao đổi thông tin được với nhau khi và chỉ khi đồ thị tương ứng với mạng này là đồ thị liên thông.

Ví dụ 3. Trong hình 6: Đồ thị G là liên thông, còn đồ thị H là không liên thông.



Hình 6. Đồ thị G và H.

Định nghĩa 9. *Ta gọi đồ thị con của đồ thị G = (V, E) là đồ thị H = (W, F), trong đó W ⊆ V và F ⊆ E.*

Trong trường hợp đồ thị là không liên thông, nó sẽ rã ra thành một số đồ thị con liên thông đôi một không có đỉnh chung. Những đồ thị con liên thông như vậy ta sẽ gọi là các *thành phần liên thông* của đồ thị.

Ví dụ 4. Đồ thị H trong hình 2 gồm 3 thành phần liên thông H_1, H_2, H_3.

Trong mạng máy tính có thể có những máy (Những kênh nối) mà sự hỏng hóc của nó sẽ ảnh hưởng đến việc trao đổi thông tin trong mạng. Các khái niệm tương ứng với tình huống này được đưa ra trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 10. *Đỉnh v được gọi là đỉnh rẽ nhánh nếu việc loại bỏ v cùng với các cạnh liên thuộc với nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị. Cạnh e được gọi là cầu nếu việc loại bỏ nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.*

Ví dụ 5. Trong đồ thị G ở hình 2, đỉnh d và e là đỉnh rẽ nhánh, còn các cạnh (d, g) và (e, f) là cầu.

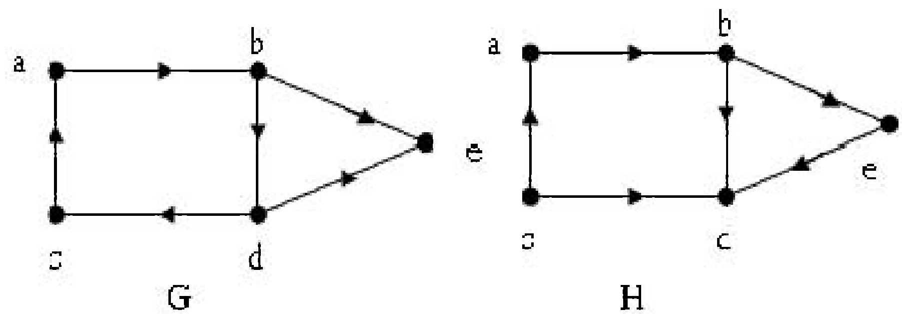
Đối với đồ thị có hướng có hai khái niệm liên thông phụ thuộc vào việc ta có xét đến hướng trên các cung hay không.

Định nghĩa 11. *Đồ thị có hướng G = (V, A) được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.*

__Định nghĩa 12.__ Đồ thị có hướng G = (V, A) được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là vô hướng liên thông.

Rõ ràng nếu đồ thị là liên thông mạnh thì nó cũng là liên thông yếu, nhưng điều ngược lại là không luôn đúng, như chỉ ra trong ví dụn dưới đây.

Ví dụ 6. Trong hình 7 đồ thị G là liên thông mạnh, còn H là liên thông yếu nhưng không là liên thông mạnh.



Hình 8 Đồ thị liên thông mạnh G và đồ thị liên thông yếu H.

Một câu hỏi đặt ra là khi nào có thể định hướng các cạnh của một đồ thị vô hướng liên thông để có thể thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh? Ta sẽ gọi đồ thị như vậy là đồ thị định hướng được. Định lý dưới đây cho ta tiêu chuẩn nhận biết một đồ thị có là định hướng được hay không.

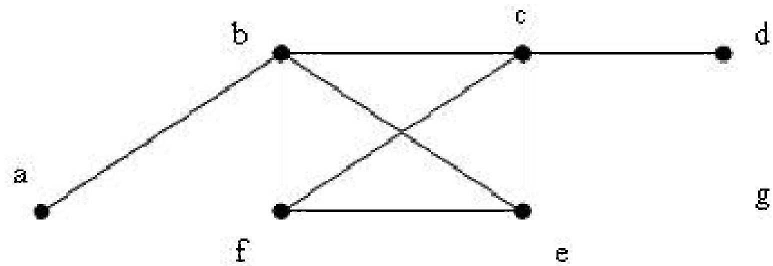
__Định lý 1.__ Đồ thị vô hướng liên thông là định hướng được khi và chỉ khi mỗi cạnh của nó nằm trên ít nhất một chu trình.

2.3. Đồ thị vô hướng liên thông

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày một số thuật ngữ cơ bản của lý thuyết đồ thị. Trước tiên, ta xét các thuật ngữ mô tả các đỉnh và cạnh của đồ thị vô hướng.

__Định nghĩa 13.__ Hai đỉnh u và v của đồ thị vô hướng G được gọi là kề nhau nếu (u,v) là cạnh của đồ thị G. Nếu e = (u, v) là cạnh của đồ thị ta nói cạnh này là liên thuộc với hai đỉnh u và v, hoặc cũng nói là nối đỉnh u và đỉnh v, đồng thời các đỉnh u và v sẽ được gọi là các đỉnh đầu của cạnh (u, v).

Định nghĩa 14. *Ta gọi bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó và sẽ ký hiệu là deg(v).*



Hình 8. Đồ thị vô hướng.

Ví dụ 7. Xét đồ thị cho trong hình 8, ta có

deg(a) = 1, deg(b) = 4, deg(c) = 4, deg(f) = 3,

deg(d) = 1, deg(e) = 3, deg(g) = 0

Đỉnh bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh bậc 1 được gọi là đỉnh treo. Trong ví dụ trên đỉnh g là đỉnh cô lập, a và d là các đỉnh treo. Bậc của đỉnh có tính chất sau:

Định lý 2. *Giả sử G = (V, E) là đồ thị vô hướng với m cạnh. Khi đó tổng bậc của tất cả các đỉnh bằng hai lần số cung.*

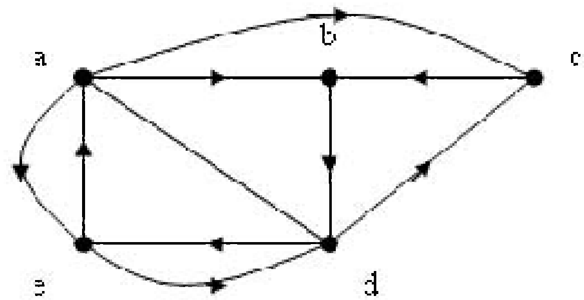
Hệ quả 3. *Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ (nghĩa là có bậc là số lẻ) là một số chẵn.*

2.4. Đồ thị có hướng liên thông

Định nghĩa 15. *Nếu e = (u, v) là cung của đồ thị có hướng G thì ta nói hai đỉnh u và v là kề nhau, và nói cung (u, v) nối đỉnh u với đỉnh v hoặc cũng nói cung này là đi ra khỏi đỉnh u và vào đỉnh v. Đỉnh u(v) sẽ được gị là đỉnh đầu (cuối) của cung (u,v).*

Tương tự như khái niệm bậc, đối với đồ thị có hướng ta có khái niệm bán bậc ra và bán bậc vào của một đỉnh.

Định nghĩa 16. *Ta gọi bán bậc ra (bán bậc vào) của đỉnh v trong đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi ra khỏi nó (đi vào nó) và ký hiệu là* $deg_{+}(v)$ $(deg_{-}(v))$.



Hình 9. Đồ thị có hướng.

Ví dụ 9. Xét đồ thị cho trong hình 9. Ta có

$$deg_{-}(a)=1,\ deg_{-}(b)=2,\ deg_{-}(c)=2,\ deg_{-}(d)=2,\ deg_{-}(e) = 2.$$

$$deg_{+}(a)=3,\ deg_{+}(b)=1,\ deg_{+}(c)=1,\ deg_{+}(d)=2,\ deg_{+}(e)=2.$$

Định lý 4. *Giả sử G = (V, E) là đồ thị có hướng. Khi đó tổng bán bậc ra của tất cả các đỉnh bằng tổng bán bậc vào của tất cả các đỉnh.*

Rất nhiều tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng trên các cung của nó. Vì vậy, trong nhiều trường hợp sẽ thuận tiện hơn nếu ta bỏ qua hướng trên các cung của đồ thị. Đồ thị vô hướng thu được bằng cách bỏ qua hướng trên các cung được gọi là *đồ thị vô hướng tương ứng* với đồ thị có hướng đã cho.

3. TÔ MÀU ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

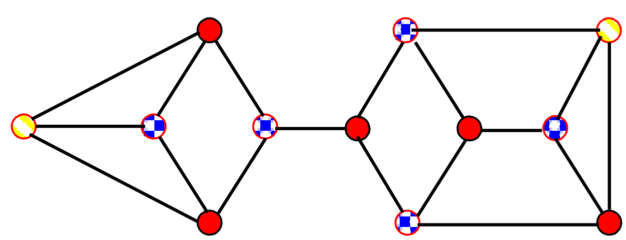
3.1. Bài toán tô màu đỉnh

Bài toán được đặt ra là: số màu tối thiểu cần thiết để tô cho các đỉnh của một đồ thị sao cho hai đỉnh kề nhau thì có màu khác nhau là bao nhiêu? Một cách tô màu thỏa mãn được gọi là một cách *tô đúng.*

Định nghĩa 1. *Ta nói một đồ thị là k - sắc tính nếu nó có thể tô đúng bằng k màu. Số màu tối thiểu cần thiết để tô đúng được các đỉnh của G, gọi là số sắc tính hay sắc số của đồ thị G và viết* $\chi(G) = k$.

Rõ ràng, sắc số của đồ thị đầy đủ n đỉnh bằng n: $\chi(K_n) = n$. Vì vậy có các đồ thị với sắc số lớn tùy ý. Theo chiều ngược lại, $\chi(G) = 1$ khi và chỉ khi G là đồ thị không, tức là đồ thị G có đỉnh nhưng không có cạnh, và $\chi(G) = 2$ khi và chỉ khi G là một đồ thị hai phần khác không. Chú ý rằng một cây bất kỳ, cũng như mọi chu trình độ dài chẵn bất kỳ là 2 - sắc tính.

Ta có thể dễ dàng lấy ví dụ về đồ thị là 3 – sắc tính. Chẳng hạn, các chu trình độ dài lẻ hay các đồ thị bánh xe với một số lẻ đỉnh và đồ thị Petersen là 3 - sắc tính. Các đồ thị bánh xe với một số chẵn đỉnh là 4 - sắc tính. Trong [1] đưa ra một lớp đồ thị phẳng 3 - sắc tính đáng chú ý, đó là các đồ thị với $n \geq 6$ đỉnh và mọi đỉnh có bậc 3 (Hình 10).

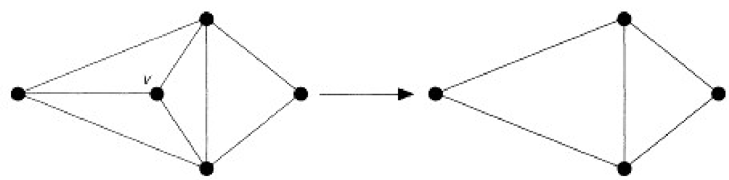


Hình 10. Đồ thị phẳng đẳng cấp bậc 3 là 3 - sắc tính

Nếu đồ thị có n đỉnh thì sắc số của nó không vượt quá n, và nếu đồ thị chứa K_r (đồ thị đầy đủ r đỉnh) như một đồ thị con thì sắc số của nó không ít hơn r. Nhìn chung, các kết quả này không giúp ta biết chính xác sắc số của một đồ thị. Tuy nhiên, nếu biết bậc của các đỉnh trong đồ thị thì ta có thể biết nhiều hơn.

Định lý 1. *Nếu đơn đồ thị* G *có bậc lớn nhất của đỉnh bằng* Δ *thì* G *là* $(\Delta+1)$ *- sắc tính.*

Chứng minh. Dùng phương pháp quy nạp toán học theo số đỉnh của G. Giả sử G là một đơn đồ thị n đỉnh. Nếu ta xoá một đỉnh bất kỳ v, cùng với các cạnh liên thuộc nó, thì đồ thị còn lại là một đơn đồ thị $(n-1)$ đỉnh và bậc lớn nhất của đỉnh cùng lắm bằng Δ. Theo giả thuyết quy nạp, đồ thị này là $(\Delta+1)$ - sắc tính. Giữ nguyên màu của các đỉnh trong đồ thị này, ta sẽ tô cho đỉnh v một màu, khác với những màu đã tô cho các đỉnh kề v (số này nhiều nhất bằng Δ). Vậy G là $(\Delta+1)$ - sắc tính.



Hình 11.

Bằng xử lý tinh tế hơn, có thể làm mạnh thêm Định lý và đi tới kết quả sau:

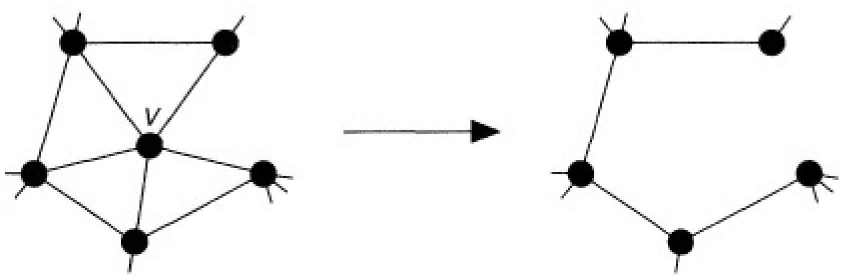
Định lý 2 (Brooks, 1941) *Nếu* G *là một đơn đồ thị liên thông mà không phải là một đồ thị đầy đủ và nếu bậc lớn nhất của đỉnh là* $\Delta \geq 3$ *thì* G *là* Δ *– sắc tính.*

Cả hai định lý trên đều rất hữu ích, đặc biệt khi bậc của các đỉnh xấp xỉ như nhau. Chẳng hạn theo Định lý 1, mỗi đồ thị lập phương là 4 - sắc tính, và theo Định lý 2, mỗi đồ thị lập phương liên thông, khác đồ thị đầy đủ K_4, là 3 - sắc tính. Mặt khác, nếu đồ thị có vài đỉnh với bậc lớn thì các định lý này cho ta rất ít thông tin. Điều này được minh hoạ rõ bởi đồ thị hai phần đầy đủ $K_{1,s}$. Định lý Brooks cho thấy đồ thị này là s - sắc tính, nhưng thực tế chỉ cần dùng 2 màu là có thể tô đúng các đỉnh của đồ thị loại này, nghĩa là $K_{1,s}$ là 2 - sắc tính với mọi s.

Định lý 3. *Mọi đơn đồ thị phẳng là* 6 *- sắc tính.*

Chứng minh. Hiển nhiên định lý đúng đối với các đơn đồ thị phẳng không quá 6 đỉnh. Giả sử G là một đơn đồ thị phẳng n đỉnh, và mọi đơn đồ thị phẳng (n - 1) đỉnh là 6 - sắc tính. Do đồ thị G phẳng nên G chứa một đỉnh v có bậc nhiều nhất là 5. Nếu xoá v và các cạnh liên thuộc v thì đồ thị còn lại có n - 1 đỉnh, và vì vậy nó là 6 -sắc tính. Giữ nguyên màu của các đỉnh trong đồ thị này, ta tô cho đỉnh v bằng màu, khác với những màu đã tô cho các đỉnh kề v.

Kết quả là G được tô bằng 6 màu, tức G là 6 - sắc tính.



Hình 12.

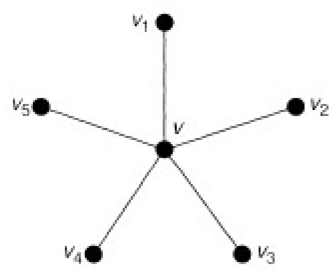
Có thể làm mạnh thêm Định lý 3 này bằng định lý sau:

Định lý 4. *Một đơn đồ thị phẳng bao giờ cũng là* 5 - *sắc tính.*

Chứng minh. Ta chứng minh định lý bằng phương pháp quy nạp theo số đỉnh. Hiển nhiên định lý đúng đối với đơn đồ thị phẳng ít hơn 6 đỉnh. Giả sử G là một đơn đồ thị phẳng n đỉnh, và mọi đơn đồ thị phẳng n - 1 đỉnh là 5 - sắc tính. Do đồ thị G phẳng nên G chứa một đỉnh v với bậc không quá 5. Sau khi xoá đỉnh v và các cạnh liên thuộc v, ta được một đơn đồ thị n - 1 đỉnh và đồ thị này là 5 - sắc tính. Mục đích của ta bây giờ là tô đỉnh v bằng một trong 5 màu này, và như vậy sẽ hoàn thành việc tô các đỉnh của G bằng 5 màu.

Nếu bậc của đỉnh v nhỏ hơn 5 thì v có thể được tô bằng màu bất kỳ, chưa dùng để tô cho các (tối đa là 4) đỉnh kề v, và như vậy hoàn thành chứng minh định lý trong trường hợp này. Giả sử bậc của v bằng 5 và 5 đỉnh kề v là v_1, ... , v_5 được sắp xếp quanh v theo chiều kim đồng hồ như vẽ ở Hình 12. Nếu các đỉnh $v_1, \ldots, v_5$ đôi một kề nhau thì G chứa đồ thị không phẳng K_5 như một đồ thị con, vô lý! Vậy phải có ít nhất 2 trong số các đỉnh v_i (chẳng hạn, v_1 và v_3) không kề nhau.

Bây giờ ta có hai cạnh vv_1 và vv_3 về đỉnh v, và nhận được một đồ thị phẳng có n - 2 đỉnh. Theo giả thiết qui nạp, ta có thể tô đúng nó bằng 5 màu. Sau khi tô đồ thị này, ta khôi phục trở lại hai cạnh ban đầu và tô cho v_1 và v_3. bằng màu đã tô cho v, còn v thì tô bằng màu thứ 5 còn lại (ngoài những màu đã tô cho các đỉnh kề v). Kết quả là bao giờ ta cũng có thể tô cho các đỉnh của G bằng 5 màu, nghĩa là G là 5 - sắc tính.



Hình 12.

Một câu hỏi đặt ra là liệu có thể làm mạnh hơn nữa định lý này được không? Điều này dẫn đến một trong những bài toán nổi tiếng nhất trong toán học, tồn tại hơn một thế kỷ, đó là *bài toán bốn màu.*

cách diễn đạt khác, bài toán này đã được đặt ra lần đầu tiên vào năm 1852, và cuối cùng được K. Appel và W. Haken giải quyết năm 1976.

Định lý 5. (Appel và Haken, 1976) *Mọi đơn đồ thị phẳng là* 4 - *sắc tính*.

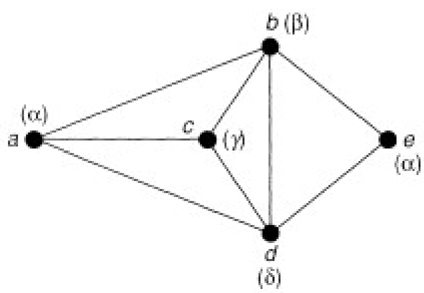
Ví dụ. Ta nêu một ứng dụng đơn giản của việc tô màu đỉnh.

Giả sử một nhà hóa học muốn cất giữ 5 loại hóa chất a, b, c, d và e trong kho. Một số hóa chất có tương tác mạnh khi tiếp xúc, vì thế chúng cần được để cách xa nhau trong kho. Dấu * trong bảng sau cho biết những cặp hóa chất không được để gần nhau. Cần bao nhiêu nơi trong kho để cất giữ hóa chất?

	a	b	c	d	e
a	–	*	*	*	–
b	*	–	*	*	*
c	*	*	–	*	–
d	*	*	*	–	*
e	–	*	–	*	–

Để trả lời câu hỏi này, ta vẽ một đồ thị 5 đỉnh, mỗi đỉnh đại diện cho một loại hóa chất, hai đỉnh là kề nhau khi các hóa chất tương ứng cần để xa nhau. Tô màu cho các đỉnh bằng các chữ cái Hy Lạp $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

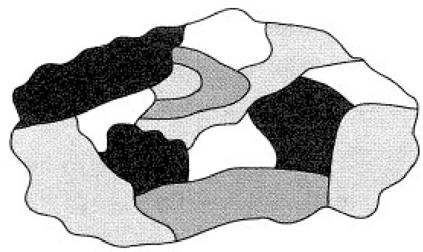
Khi đó số màu sẽ tương ứng với số nơi cần để hóa chất. Với ví dụ này do cần ít nhất 4 màu để tô, nên cần 4 nơi khác nhau để hóa chất trong kho. Chẳng hạn, hóa chất a và e có thể để ở nơi có màu α, các hóa chất b, c và d để ở nơi có màu tương ứng là β, γ và δ.



Hình 13

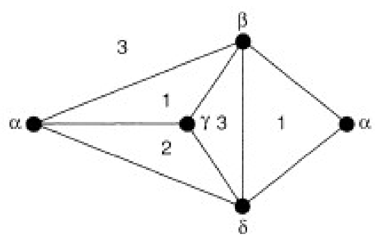
3.2. Tô màu bản đồ

Cho trước một bản đồ địa lý gồm một số nước, câu hỏi đặt ra là: cần dùng ít nhất bao nhiêu màu để có thể tô cho mỗi nước một màu, sao cho hai nước có đường biên giới chung phải có màu khác nhau. Dạng gần gũi nhất với định lý bốn màu là mệnh đề nói rằng có thể tô mọi bản đồ địa lý chỉ bằng bốn màu. Chẳng hạn, Hình 14 vẽ một bản đồ được tô bằng bốn màu.



Hình 14

Ta nói một bản đồ là k - *sắc tính diện* nếu có thể tô các nước (diện) bằng k màu sao cho hai nước có đường biên giới (cạnh) chung được tô bằng hai màu khác nhau. Để tránh nhầm lẫn, ta dùng k - *sắc tính đỉnh* để chỉ k - sắc tính theo nghĩa tô các đỉnh. Chẳng hạn, bản đồ ở Hình 15 là 3 - sắc tính diện và 4 - sắc tính đỉnh.

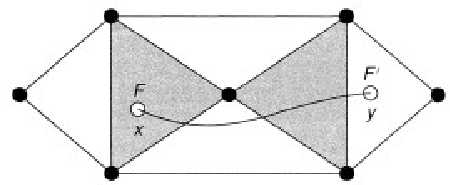


Hình 15

Định lý 1. *Bản đồ* G *là* 2 - *sắc tính diện khi và chỉ khi mọi đỉnh của* G *có bậc chẵn.*

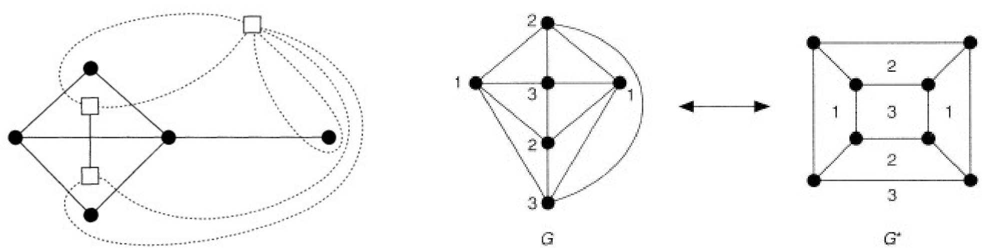
Chứng minh. Với mỗi đỉnh v của G, số diện xung quanh v phải là số chẵn, bởi vì chúng được tô bằng 2 màu. Từ đó suy ra mọi đỉnh của G có bậc chẵn.

Ngược lại, Nếu mọi đỉnh của G có bậc chẵn thì ta sẽ tô các diện của G bằng 2 màu như sau: Chọn diện bất kỳ F và tô nó bằng màu đỏ. Vẽ một đường cong từ điểm x trong F tới điểm y trong diện khác F' và không đi qua đỉnh nào của G. Nếu đường cong đó đi qua một số chẵn cạnh thì tô màu đỏ cho diện chứa y. Nếu trái lại, tô màu xanh. Việc tô màu này được hoàn toàn xác định, vì có thể lấy một chu trình gồm hai đường như thế và chứng minh rằng chu trình đi qua một số chẵn cạnh của G, nhờ dựa trên sự kiện là mỗi đỉnh có một số chẵn cạnh liên thuộc nó.



Hình 16

Cho đồ thị phẳng G, *đồ thị đối ngẫu* G* của G được xây dựng như sau: trong mỗi diện f của G, chọn một điểm v*, các điểm này là các đỉnh của G*; với mỗi cạnh e của G, ta vẽ một cạnh e*, cắt e (không cắt các cạnh khác của G) và nối hai đỉnh thuộc hai diện có chung cạnh e, các cạnh như thế tạo nên tập cạnh của G*. (Xem hình 17)



Hình 17.

Định lý 2. *Cho* G *là một đồ thị phẳng, không có khuyên và* G* *là đồ thị đối ngẫu của* G. *Khi đó*, G *là* k - *sắc tính* đỉnh *khi và chỉ khi* G* *là* k - *sắc tính* diện.

Chứng minh. Ta có thể giả thiết G là một đơn đồ thị liên thông, do đó G* là một bản đồ. Nếu G là k - sắc tính đỉnh thì ta có thể dùng k màu để tô các diện của G* sao cho mỗi diện thừa hưởng màu của đỉnh duy nhất nằm trong diện đó (xem Hình 2.12). Hai diện kề nhau trong G* có màu khác nhau, bởi vì các đỉnh của G nằm trong hai diện này là kề nhau trong G, nên chúng có màu khác nhau. Vì vậy G* là k- sắc tính diện.

Bây giờ giả sử rằng G* là k - sắc tính diện. Khi đó dùng k màu ta có thể tô các đỉnh của G sao cho mỗi đỉnh thừa hưởng màu của diện chứa nó. Bằng lập luận tương tự như trên có thể thấy rằng không có hai đỉnh kề nhau nào trong G lại có màu như nhau. Vì vậy G là k - sắc tính đỉnh.

Từ đó ta có chứng minh khác cho định lý 1:

Chứng minh định lý 1. Có thể chỉ ra rằng đối ngẫu của đồ thị phẳng mà mọi đỉnh có bậc chẵn là một đồ thị phẳng hai phần và ngược lại. Vì vậy ta chỉ cần để ý rằng một đồ thị phẳng, liên thông và không có khuyên là 2 - sắc tính đỉnh khi và chỉ khi nó là một đồ thị hai phần.

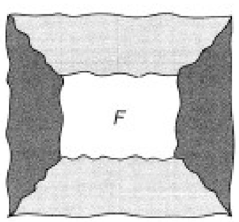
Hệ quả. *Định lý bốn màu đối với các bản đồ tương đương với định lý bốn màu đối với các đồ thị phẳng.*

Chứng minh. Ta có thể giả thiết G là một đơn đồ thị phẳng liên thông. Khi đó, đồ thị đối ngẫu G* là một bản đồ. Nếu G* là 4-sắc tính diện thì G là 4 - sắc tính đỉnh. Ngược lại, giả sử G là một bản đồ và G* là đồ thị đối ngẫu của G. Khi đó, G* là một đơn đồ thị phẳng và vì vậy nếu G* là 4 - sắc tính đỉnh thì G là 4 - sắc tính diện.

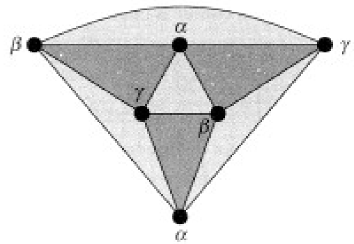
Định lý 3. *Giả sử* G *là một bản đồ lập phương. Khi đó*, G *là* 3 - *sắc tính diện khi và chỉ khi mỗi diện được giới hạn bởi một số chẵn cạnh.*

Chứng minh. Cho một diện bất kỳ F của G, các diện của G xung quanh F phải luân phiên đổi màu. Như vậy phải có một số chẵn diện quanh F, và vì vậy mỗi diện được giới hạn bởi một số chẵn cạnh.

Bây giờ ta chứng minh kết quả đối ngẫu khẳng định răng nếu G là một đơn đồ thị phẳng liên thông, trong đó mỗi diện là một tam giác và mọi đỉnh có bậc chẵn. Khi đó, G là 3 - sắc tính đỉnh. Ta ký hiệu 3 màu đó là α và β.



Hình 18

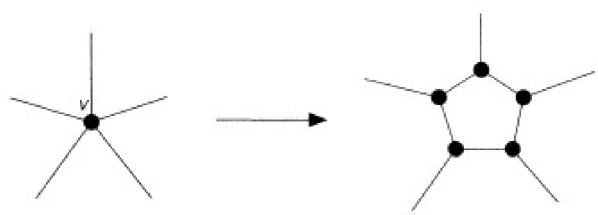


Hình 19

Do mọi đỉnh của G có bậc chẵn nên các diện của G có thể tô được bằng 2 màu: đỏ và xanh. Khi đó, có thể dùng 3 màu để tô đỉnh của G như sau: tô cho 3 đỉnh của một diện màu đỏ bằng 3 màu γ, α, β sao cho chúng xuất hiện theo chiều kim đồng hồ và tô 3 đỉnh của một diện màu xanh sao cho các màu này xuất hiện ngược chiều kim đồng hồ. Cách tô đỉnh này được mở rông cho toàn bộ đồ thị và như vậy định lý được chứng minh.

Định lý 4. *Để chứng minh định lý bốn màu chỉ cần chứng minh rằng mọi bản đồ lập phương là* 4 - *sắc tính diện*.

Chứng minh. Theo Hệ quả, chỉ cần chứng minh rằng nếu mọi bản đồ lập phương là 4 - sắc tính diện thì một bản đồ bất kỳ cũng là 4 - sắc tính diện. Giả sử G là một bản đồ bất kỳ, Nếu G có đỉnh bậc 2 thì ta có thể loại bỏ các đỉnh đó mà không ảnh hưởng tới việc tô màu. Chỉ còn phải xử lý các đỉnh bậc từ 4 trở lên. Nếu v là một đỉnh bậc lớn hơn hoặc bằng 4, thì ta sửa v thành một diện. Làm như vậy đối với mọi đỉnh bậc từ 4 trở lên. Kết quả là ta nhận được một bản đồ lập phương mà theo giả thiêt bản đồ này là 4 - sắc tính diện. Cuối cùng, ta sẽ nhận được cách tô các diện của G bằng 4 màu nhờ co mỗi diện vừa thêm vào thành một đỉnh duy nhất và khôi phục trở lại mọi đỉnh bậc 2 như ban đầu.



Hình 20

4. KẾT LUẬN

Báo cáo này có mục đích tìm hiểu và trình bày các khái niệm cơ bản về đồ thị và các dạng đồ thị thường gặp, về bài toán tô màu trên đỉnh của đồ thị và một số ứng dụng của các bài toán này. Trình bày các kết quả lý thuyết, các định lý về tô màu trên các loại đồ thị khác nhau và các thuật toán tô màu đỉnh và cạnh, dựa trên các kết quả lý thuyết đã có.

Hy vọng nội dung của báo cáo sẽ giúp các thầy, cô giáo cùng với các bạn sinh viên đang giảng dạy và học tập có thêm nguồn tài liệu hữu ích, bổ sung thêm phương pháp để tiếp cận vấn đề, nhằm nâng cao chất lượng bài giảng, giúp các em sinh viên hiểu sâu sắc được vấn đề hướng tới đạt thành tích cao trong các kì thi.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Quốc Chiến, *Giáo trình lý thuyết đồ thị và ứng dụng*, Đại học Đà Nẵng, 2007.

[2] Nguyễn Tô Thành, Nguyễn Đức Nghĩa, *Giáo trình Toán rời rạc*. NXB Đại học quốc gia Hà Nội, 2003.

[3] Nguyễn Xuân Quỳnh, *Cở sở toán rời rạc và ứng dụng,* NXB Giáo dục Hà Nội 1995.

[4] Đặng Huy Ruận, *Lý thuyết đồ thị và ứng dụng,* NXB Khoa học tự nhiên, 2004.