BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHUYÊN ĐỀ ĐA THỨC DÀNH CHO SINH VIÊN THI OLYMPIC – PHẦN 2

Người báo cáo: Th.s Đào Xuân Hưng

Hà nội, 6/2021

MỤC LỤC

Mục lục 2

MỞ ĐẦU 3

1. Kiến thức trọng tâm...4

1.1. Nghiệm hữu tỷ, nghiệm nguyên.. 4

1.2. Phân tích nhân tử theo các nghiệm...5

1.3. Đa thức CHEBYSHEV...6

2. Các bài toán..7

KẾT LUẬN... 15

TÀI LIỆU THAM KHẢO.... 16

MỞ ĐẦU

Đa thức là dạng toán thường gặp trong các đề thi chọn học sinh giỏi và các kỳ Olympic Toán sinh viên. Đây là một dạng toán khó, không có phương pháp giải chung cho một nhóm các bài riêng biệt. Để giải các bài toán về đa thức, đòi hỏi người làm phải có kiến thức sâu, rộng và cần có tư duy sáng tạo, linh hoạt. Trong báo cáo ở học kì 1 (phần 1) tôi đã đưa ra các khái niệm cơ bản về đa thức, nghiệm của đa thức và hướng dẫn sinh viên giải một số bài tập cụ thể. Tuy nhiên, với thời lượng có hạn của một báo cáo học thuật nên các bài tập đưa ra còn ít, thiếu nhiều dạng toán quan trọng. Vì vậy trong báo cáo này tác giả sẽ hoàn thiện những hạn chế nêu trên. Mục đích của báo cáo là giúp sinh viên có kiến thức để giải được các bài toán tương đối phức tạp đặt ra trong môn học chuyên nghành và đặc biệt nó rất hữu ích cho các bạn sinh viên tham gia kì thi Olympic Toán học.

.

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Định nghĩa: Cho $f \in R[x]$ và số $\alpha \in R$

Ta gọi α là một nghiệm thực của f nếu $f(\alpha) = 0$

Ta gọi α là nghiệm bội k của $f(x)$ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-\alpha)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-\alpha)^{k+1}$ nghĩa là:

$$f(x) = (x-\alpha)^k . g(x), \forall x \in R \text{ và } g(\alpha) \neq 0$$

hay $\begin{cases} f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, ..., f^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ f^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$

Định lí BEZOUT: α là một nghiệm của đa thức $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $x - \alpha$.

1.1. Nghiệm hữu tỷ, nghiệm nguyên

Cho $f \in Z[x], \deg f = n, a_i \in Z$

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n, a_o \neq 0$$

Nghiệm hữu tỷ nếu có $x = \frac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$ thì p là ước của hệ số tự do và q là ước của hệ số cao nhất: $p | a_n, q | a_o$.

Nếu f có n nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$ (phân biệt hay trùng nhau).

Thì: $x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{a_1}{a_o}$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + ... + x_{n-1} . x_n = \frac{a_2}{a_o}$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + ... + x_{n-2} x_{n-1} x_n = -\frac{a_3}{a_o}$$

....

và $x_1x_2...x_n = (-1)^n.\dfrac{a_n}{a_o}$

Đảo lại, nếu n số $x_1, x_2, x_3..., x_n$ có tổng các tích chập k của n số x_i là S_k thì $x_1, x_2, ..., x_n$ là nghiệm nếu có của phương trình:

$$X^n - S_1X^{n-1} + S_2X^{n-2} + ... + (-1)^{n-1}.S_{n-1}X + (-1)^n.S_n = 0$$

Định lí liên tục:

Nếu đa thức $f(x)$ nhận 2 giá trị trái dấu trên $[a,b]$ là $f(a).f(b) < 0$ thì đa thức $f(x)$ có ít nhất một nghiệm $x = c \in (a,b)$

Định lí LAGRANGE:

Với mọi đa thức $f(x)$ trên $[a,b]$ thì có số $c \in (a,b): \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

Đặc biệt nếu $f(a) = f(b) = 0$ hay chỉ cần $f(a) = f(b)$ thì $f'(c) = 0$ tức là: $f'(x) = 0$ có 1 nghiệm thuộc (a,b)

Định lí ROLE:

Giữa 2 nghiệm của đa thức $f(x)$ thì có một nghiệm của $f'(x)$

Nếu f có n nghiệm phân biệt thì f' có $n-1$ nghiệm phân biệt, f'' có $n-2$ nghiệm phân biệt,…, $f^{(n-k)}$ có $n-k$ nghiệm phân biệt,…

1.2. Phân tích nhân tử theo các nghiệm

Cho $f \in R[x]$ có nghiệm $x_1, x_2, ..., x_m$ với bội tương ứng $k_1, k_2, ..., k_m$ thì tồn tại $g \in R[x]$

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1}.(x - x_2)^{k_2}...(x - x_m)^{k_m}.g(x)$$

Hay $f(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - x_i)^{k_i} g(x)$ với $\sum_{i=1}^{m} k_1 \le n$

Nếu f bậc n có đủ n nghiệm phân biệt hay trùng nhau thì:

$$f(x) = A(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) = A\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

Phân tích ra nhân tử của $\mathbf{f} \in \mathbf{R}[\mathbf{x}]$

Các nhân tử của f chỉ là nhị thức bậc nhất hoặc tam thức bậc hai vô nghiệm:

$$f(x) = a_o \prod_{i=1}^{m} (x - d_i) \prod_{k=1}^{s} (x^2 + b_k.x + c_k)$$

Với các hệ số $d_i, b_k, c_k \in R, 2s + m = \deg f, b_k^2 - 4c_k < 0$ và cách phân tích này là duy nhất.

Phân tích ra nhân tử của $\mathbf{f}(\mathbf{z}) \in \mathbf{C}[\mathbf{z}]$, $\deg f = n$

$$f(z) = a_o z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_{n-1} z + a_n, a_o \neq 0$$

Theo định lí D'ALEMNBERT thì f có đủ n nghiệm phức $z_1, z_2, ..., z_n$ nên:

$$f(z) = a_o (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n) = a_o \prod_{i=1}^{n} (z - z_i)$$

1.3. Đa thức CHEBYSHEV:

$T_n(x)$ xác định như sau:

$T_n(x) = 1, T_1(x) = x, T_{n+1} x = 2x.T_n(x) - T_{n-1}, n \geq 1$

Cụ thể: $T_o(x) = 1; T_1(x) = x; T_2(x) = 2x^2 - 1$

$T_3(x) = 4x^3 - 3x; T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, ...$

Đa thức Chebyshev (Trưbưsep) $T_n(x)$ có bậc n và có hệ số cao nhất 2^{n-1} .

Đôi khi ta chỉ xét $n \geq 1$ trở đi.

Kết quả:

$(1): T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$

$(2): |T_n(x)| \leq 1, \forall x \in [-1, 1]$

$(3): |T_n(x)| = 1$ có đúng n nghiệm phân biệt trê $[-1, 1]$ là:

$$x = \cos k\frac{\pi}{n}, k = 0, 1, ..., n-1$$

Chú ý:

1) Số lượng nghiệm:

- Mỗi đa thức hệ số thực bậc n đều có không quá n nghiệm thực
- Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không $f \equiv 0$
- Nếu đa thức có bậc $\le n$ và có quá n nghiệm là đa thức không
- Nếu đa thức có bậc $\le n$ và nhận $n+1$ giá trị như nhau tại $n+1$ điểm khác nhau của biến là đa thức hằng: $f \equiv C$
- Hai đa thức có bậc $\le n$ và nhận $n+1$ giá trị như nhau tại $n+1$ điểm khác nhau của biến thì đồng nhất nhau: $f \equiv g$

2) Quy tắc dấu DESCARTE:

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, a_o \ne 0$$

Gọi D là số nghiệm dương (kể cả bội)

L là số lần đổi dấu trong dãy hệ số khác 0 từ a_o đến a_n (bỏ đi các hệ số $a_i = 0$)

Thì: $D \le L$ và $L - D$ là số chẵn hay $L = D + 2m, m \in N$

3) Đưa đa thức vào giả thiết các số bất kì

Cho n số bất kì $x_1, x_2, ..., x_n$ thì ta xét đa thức nhận n số đó làm nghiệm:

$f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$. Từ đó ta khai thác các quan hệ về nghiệm, Viette, hệ số, đạo hàm,…

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 11: Giả sử a và b là 2 trong 4 nghiệm của đa thức: $x^4 + x^3 - 1$

Chứng minh tích ab là nghiệm của đa thức: $x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1$

Hướng dẫn giải

Giả sử a, b, c, d là 4 nghiệm của đa thức: $x^4 + x^3 - 1$

$P(x) = x^4 + x^3 - 1 = (x - a)\left(x - b\right)\left(x - c\right)\left(x - d\right) \Rightarrow abcd = -1$

Ta cần chứng minh: $Q(ab) = 0$ với:

$$Q(x)=x^6+x^4+x^3-x^2-1=x^3\left(x^3+x+1-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\Rightarrow Q(ab)=(ab)^3.\left[(ab)^3+(ab)+1-\frac{1}{ab}-\frac{1}{(ab)^3}\right]$$

$$=(ab)^3.\left[(ab)^3+ab+1+cd+(cd)^3\right]$$

Do đó: $Q(ab)=0\Leftrightarrow (ab)^3+ab+1+cd+(cd)^3=0$

Thật vậy: $P(a)=0\Rightarrow a^4+a^3=1\Rightarrow a^3=\frac{1}{a+1}$

Tương tự $b^3=\frac{1}{b+1}$ nên $a^3b^3=\frac{1}{(a+1)(b+1)}=-(1+c)(1+d)$

Tương tự: $c^3d^3=-(1+a)(1+b)$ suy ra:

$(ab)^3+ab+1+cd+(cd)^3=-(1+c)(1+d)+ab+1+cd-(1+a)(1+b)$

$=-1-a-b-c-d=0$. Vậy: $Q(ab)=0$ (đpcm)

Bài toán 12: Cho $P(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có hệ số nguyên. Chứng minh nếu $P(x)$ có một nghiệm bằng tích 2 nghiệm còn lại thì:

$$2P(-1)\,\vdots\,P(1)+P(-1)-2(1+P(0))$$

Hướng dẫn giải

Gọi 3 nghiệm là $u,v,u.v$ theo định lý Viete:

$u+v+uv=-a, uv(1+u+v)=b, u^2v^2=-c$

- Xét $a=1$ thì $0=u+v+uv+1=(u+1)(v+1)$ nên có nghiệm bằng -1 do đó $2P(-1)=0$ chia hết cho mọi số
- Xét $a\neq 1$ thì $b-c=uv(1+u+v+uv)=uv(1-a)$

Nên $uv=\frac{b-c}{1-a}$ hữu tỉ

Do $u^2v^2=-c$ nguyên nên uv nguyên

Ta có: $P(1)+P(-1)-2(1+P(0))=2(a-1)$

$=-2(u+v+uv+1)=-2(1+u)(1+v)\neq 0$

Và $2P(-1)=2(-1-u)(-1-v)(-1-uv)$

$=-2(1+uv)(1+u)(1+v)$

Do đó: $2P(-1)\,\vdots\,P(1)+P(-1)-2(1+P(0))$

Bài toán 13: Chứng minh phương trình:

a) $x^4-6x^3+8x^2+4x-1=0$ có ít nhất 1 nghiệm dương

b) $x^4-2x^3-2x+1=0$ có đúng 2 nghiệm

c) $x^5-2x^4-8x^3-x^2-9x+1=0$ có đúng 2 nghiệm dương và ít nhất 1 nghiệm âm

Hướng dẫn giải

Sử dụng quy tắc dấu Đề các

a) Dãy các dấu của các hệ số là $+-++-$

Gọi L là số lần đổi dấu hệ số và D là số nghiệm dương thì:

$L=3\Rightarrow 3=D+2k$

Do đó $D=3$ hoặc 1 hay $D\ge 1$ nên phương trình có ít nhất 1 nghiệm dương.

b) Dãy các dấu của hệ số là $+-++-$ nên : $L=2\Rightarrow 2=D+2k$

Do đó: $D=0$ hoặc $D=2$

Mặt khác $f(0)=1, f(1)=-2$ nên $f(0).f(1)<0$ do đó phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trong $(0,1)$

Vậy $D>0$ do đó $D=2$ nên phương trình có 2 nghiệm dương

Rõ ràng $f(x)>0$ nếu $x<0$ nên phương trình chỉ có 2 nghiệm dương không có nghiệm âm

c) Dãy các dấu của các hệ số là $+----+$ nên:

$L=2$. Thành thử $D=0$ hoặc $D=2$

Vì $f(0)=1$ và $f(1)<0$ nên phương trình có nghiệm dương trong $(0,1)$

Vậy $D>0$ do đó $D=2$

Xét $g(x)=f(-x)=-x^5-2x^4+8x^3-x^2+9x+1$

Dãy các dấu của các hệ số của $g(x)$ là: $--+-++$

$\Rightarrow L=3$ do đó phương trình $g(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm dương nên phương trinhf $f(x)=0$ có ít nhất 1 nghiệm âm

Bài toán 14: Cho $f(x)\in R[x], deg\ f=n$ **.** Giả sử $a<b$ mà $f(a).f(b)<0$. Chứng minh $f(x)$có một số lẻ các nghiệm trong khoảng (a,b) kể cả bội. Còn nếu $f(a).f(b)>0$ thì $f(x)$ có một số chẵn các nghiệm trong (a,b)

Hướng dẫn giải

Giả sử $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ là các nghiệm của $f(x)$ với các bội tương ứng là $k_1,k_2,...,k_s$.

Khi đó: $f(x)=(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}...(x-\alpha_s)^{k_s}.g(x)$

Trong đó $g(x)$ không có nghiệm trong (a,b) nên đa chức $g(x)$giữ nguyên dấu trong (a,b). Giả sử $g(x)>0$ với mọi $x\in[a,b]$

Ta có $f(b).g(b)>0$ và $f(a).g(a).(-1)^{k_1+k_2+...+k_s}>0$

Vì $f(a)$ trái dấu với $f(b)$ và $g(a)$ cùng dấu với $g(b)$ do đó $f(a)$ trái dấu với $g(a)$

Thành thử tổng $k_1+k_2+...+k_s$ là số lẻ

Chứng minh tương tự khi $f(a).f(b)>0$

Bài toán 15: Cho đa thức $P(x)$ bậc n và 2 số $a<b$ thỏa:

$P(a)<0,-P'(a)\le 0,P''(a)\le 0,...,(-1)^n P^n(a)\le 0$

$P(b)>0,P'(b)\ge 0,P''(b)\ge 0,...,P^n(b)\ge 0$

Chứng minh các nghiệm thực của $P(x)$ thuộc (a,b)

Hướng dẫn giải

Khai triển Taylor ta có:

$$P(x)=P(b)+\frac{P'(b)}{1!}(x-b)+\frac{P''(b)}{2!}(x-b)^2+...+\frac{P''(b)}{n!}(x-b)^n$$

Nếu $x\ge b\Rightarrow P(x)>0\Rightarrow P(x)$không có nghiệm $x\ge b$

Tương tự: $P(x)=P(a)+\frac{P'(a)}{1!}(x-a)+\frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{P''(a)}{n!}(x-a)^n$

$$=P(a)+\frac{-P'(a)}{1!}(a-x)+\frac{P''(a)}{2!}(a-x)^2+...+\frac{(-1)^n.P^n(a)}{n!}(a-x)^n$$

Nếu $x<a\Rightarrow P(x)<0\Rightarrow P(x)$ không có nghiệm $x\le a$

Vậy các nghiệm phải thuộc (a,b)

Bài toán 16: Cho $f(x)$ là đa thức bậc n có các hệ số bằng ± 1 . Biết rằng đa thức $x=1$ là nghiệm bội cấp m với $m\ge 2^k, k\ge 2,$ k nguyên. Chứng minh rằng $n\ge 2^{k+1}-1$

Hướng dẫn giải

Gọi $\overline{f}$ là đa thức với các hệ số theo modulo 2. Vì $f(x)$ có các hệ số là 1 và -1 nên $\overline{f}(x)=x^n+x^{n-1}+...+x+1$

Ta có $f(x)=(x-1)^{2^k}g(x)$ trong đó $g(x)$ là đa thức có hệ số nguyên

Dễ dàng chứng minh được rằng $C_{2^k}^i\equiv 0$ (model 2), $1\le i\le 2^k-1$

Nên $x^n+x^{n-1}+...+x+1=\left(x^{2^k}+1\right)\overline{g}(x)$ (*)

Giả sử $\overline{g}(x)$ có bậc không quá 2^k-2

Ta có hệ số của x^{2^k-1} ở vế phải của (*) là 0. Điều này mâu thuẫn vì hệ số vế trái của (*) là 1. Do đó, bậc của $\overline{g}(x)$ không nhỏ hơn 2^k-1

Vậy $n\ge 2^k+2^k-1=2^{k+1}-1$

Bài toán 17: Cho đa thức $P(x)=rx^3+qx^2+px+1$ trong đó p,q r là các số thực với $r>0.$ Xét dãy số $(a_n),n=0,1,2,...$ xác định như sau

$a_0=1,a_1=-p,a_2=p^2-q$

$a_{n+3}=-pa_{n+2}-qa_{n+1}-ra_n(n\ge 0)$

Chứng minh rằng nêú đa thức $P(x)$ chỉ có duy nhất một nghiệm thực và không có nghiệm bội thì dãy (a_n) có vô số số âm.

Hướng dẫn giải

Từ điều kiện đề bài suy ra phương trình đặc trưng của phương trình sai phân $x^3+px^2+qx+r=0$ có 1 nghiệm thực âm và hai nghiệm phức liên hợp. Giả sử ba nghiệm đó là $-a,R(\cos\alpha+i\sin\alpha),R(\cos\alpha-i\sin\alpha)$ với $a>0,R>0,0<\alpha<\pi$ thì $a_n=C_1(-a)^n+C_2R^n(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$ trong đó C_1,C_2,C_3 là các hằng số nào đó, C_2,C_3 là các số phức liên hợp. Đặt $C_2=R^*(\cos\varphi+\sin\varphi)$ với $\varphi\in[0,2\pi)$, ta có

$$a_n=C_1(-a)^n+R^n(R^*(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos n\alpha+i\sin n\varphi)$$

$$+R^*(\cos\varphi-\sin\varphi)(\cos n\alpha-i\sin n\varphi)$$

$$=C_1(-a)^n+2R^nR^*(\cos(n\alpha+\varphi))$$

Giả sử ngược lại tồn tại n sao cho $a_n\ge 0$ với mọi $n\ge n_o$

Khi đó ta có $0\le a_{n+1}+aa_n$

$$=2R^{n+1}R^*(\cos((n+1)\alpha+\varphi))+a2R^nR^*(\cos(n\alpha+\varphi))$$

$$=2R^nR^*(R\cos((n+1)\alpha+\varphi)+a\cos(n\alpha+\varphi))$$

$$=2R^nR^*.C.\cos(n\alpha+\alpha^*)(C>0,\varphi^*\in[0,2\pi))$$ với mọi $n\ge n_o$

Điều này không xảy ra vì $0<\alpha<\pi$ nên tồn tại vô số n sao cho:

$$n\alpha+\varphi^*\in\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$$

Bài toán 18: Cho phương trình: $x^3-x=1=0$ có 3 nghiệm phân biệt. Tính tổng lũy thừa bậc 8 của 3 nghiệm đó

Hướng dẫn giải

Theo định lý Viete: phương trình: $x^3-x=1=0$ có 3 nghiệm phân biệt nên $x_1+x_2+x_3=0;x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-1$ và $x_1x_2x_3=-1$

Ta có: $x_i^3-x_i+1=0\Rightarrow x_i^3=x_i-1$

$\Rightarrow x_i^5=x_i^3-x_i^2=-x_i^2+x_i-1$

Nên: $x_i^8=2x_i^2-3x_i+2$

Do đó: $T=\sum x_i^8 = 2\sum x_i^2 - 3\sum x_i + 2\left[\left(\sum x_i\right)^2 - 2\sum x_i \sum x_j\right] - 3\sum x_i + 6, i\neq j = 10$

Bài toán 19: Giả sử đa thức $P(x)=x^5+x^2+1$ có 5 nghiệm r_1,r_2,r_3,r_4,r_5 .

Đặt $Q(x)=x^2-2$. Tính tích: $Q(r_1).Q(r_2).Q(r_3).Q(r_4).Q(r_5)$

Hướng dẫn giải

Ta có: $P(x)=x^5+x^2+1=(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)(x-r_5)$

Và $Q(r_1).Q(r_2).Q(r_3).Q(r_4).Q(r_5)$

$=\left(r_1^2-2\right)\left(r_2^2-2\right)\left(r_3^2-2\right)\left(r_4^2-2\right)\left(r_5^2-2\right)$

$=\left(\sqrt{2}-r_1\right)\left(\sqrt{2}-r_2\right)\left(\sqrt{2}-r_3\right)\left(\sqrt{2}-r_4\right)\left(\sqrt{2}-r_5\right)$

$\left(-\sqrt{2}-r_1\right)\left(-\sqrt{2}-r_2\right)\left(-\sqrt{2}-r_3\right)\left(-\sqrt{2}-r_4\right)\left(-\sqrt{2}-r_5\right)$

$=P(\sqrt{2}).(-\sqrt{2}$

$=\left(\left(\sqrt{2}\right)^5+\left(\sqrt{2}\right)^2+1\right).\left(\left(-\sqrt{2}\right)^5+-\left(\sqrt{2}\right)^2+1\right)$

$=\left(4\sqrt{2}+3\right).\left(-4\sqrt{2}+3\right)=9-32=-23$

Bài toán 20: Chứng tỏ đa thức: $x^5-\frac{1}{2}x^4-5x^3+x^2+4x-1$ (1) có đúng 5 nghiệm $x_i, i=\overline{1,5}$. Tính tổng $S=\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i+1}{2x_i^5-x^4-2}$

Hướng dẫn giải

Xét hàm số $f(x)=x^5-\frac{1}{2}x^4-5x^3+x^2+4x-1$ thì $f(x)$ làm hàm số liên tục trên R.

Ta có :

$f(-2)=-5<0, f(0)=-1<0, f(1)=-\frac{1}{2}<0, f(-\frac{3}{2})=2>0, f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}>0, f(3)=\frac{175}{2}>0$

Phương trình $f(x)=0$ có các nghiệm x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 sao cho:

$$-2<x_1<-\frac{3}{2}<x_2<0<x_3<\frac{1}{2}<x_4<1<x_5<3$$

Hơn nữa, vì $f(x)=0$ là phương trình bậc năm nên có đúng 5 nghiệm

Ta có x_i là nghiệm của phương trình (1) nên:

$$x_i^5-\frac{1}{2}x_i^4-5x_i^3+4x_i-1=0 \Leftrightarrow 2x_i^5-x_i^4-2=2(5x_i^3-x_i^2-4x_i)$$

Do đó: $S=\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i+1}{2(5x_i^3-x_i^2-4x_i)}$

Xét biểu thức $g(x)=\dfrac{x+1}{5x^3-x^2-4x}=\dfrac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}$

Ta có: $\dfrac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{5c+4}$ nên đồng nhất được:

$$\frac{x+1}{x(x-1)(5x+4)}=-\frac{1}{4x}+\frac{3}{9(x-1)}+\frac{5}{36(5x+40}$$

Do đó: $S=-\dfrac{1}{8}\sum_{i=1}^{6}\dfrac{1}{x_i}+\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{5}\dfrac{1}{x_i-1}+\dfrac{1}{72}\sum_{i=1}^{5}\dfrac{1}{x_i+\dfrac{4}{5}}$

Mà $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4(x-x_5)$

Vậy $x\neq x_i(i=\overline{1,5})$ ta được $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{5}\left(\dfrac{1}{x-x_i}\right)$

Và $f'(x)=5x^4-2x^3-15x^2+2x+4$, do đó:

$$\frac{f'(1)}{f(1)}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{1-x_i}\Rightarrow\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i-1}=-\frac{f'(1)}{f(1)}=-12$$

$$\frac{f'(0)}{f(0)}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}\Rightarrow\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i}=-\frac{f'(0)}{f(0)}=4$$

$$\frac{f'\left(-\frac{4}{5}\right)}{f\left(-\frac{4}{5}\right)}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{-\frac{4}{5}-x_i}=\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{x_i+\frac{4}{5}}=-\frac{f'\left(-\frac{4}{5}\right)}{f\left(-\frac{4}{5}\right)}=-\frac{12900}{4789}$$

Vậy $S=-\dfrac{8959}{4789}$

Bài toán 21: Cho $ab\neq 0$. Chứng minh phương trình:

$x^3-3(a^2+b^2)x+2(a^3+b^3)=0$ có 3 nghiệm phân biệt

Hướng dẫn giải

Xét hàm số: $y=x^3-3(a^2+b^2)x+2(a^3+b^3)=0,D=R$

Ta chứng minh hàm số có cực đại, cực tiểu và $y_{CD}.y_{CT}<0$

$$y'=3x^2-3(a^2+b^2)$$

Do đó $y'=0\Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{a^2+b^2},(S=0,P=a^2+b^2)$

Vì y’ bậc 2 có 2 nghiệm phân biệt nên có CĐ và CT.

Lấy y chia y’ ta có: $y=\dfrac{1}{3}x.y'-2(a^2+b^2)x+2(a^3+b^3)$

$\Rightarrow y_{CD}.y_{CT}=(-2(a^2+b^2)x_1+2(a^3+b^3))$

$$(-2(a^2+b^2)x_2+2(a^3+b^3)$$

$$=4\left(a^3+b^3\right)^2-4\left(a^2+b^2\right)^3$$

$$=-4a^2b^2(3a^2+3b^2-2ab)$$

$$=-4a^2b^2\left[2a^2+2b^2+(a-b)^2\right]<0 \Rightarrow dpcm$$

Bài toán 22: Cho phương trình $ax^3+27x^2+12x+2001=0$ có 3 nghiệm thực phân biệt. Hỏi phương trình sau có bao nhiêu nghiệm thực:

$$4\left(ax^3+27x^2+12x+2001\right)\left(3ax^2+27\right)=\left(3ax^2+54x+12\right)^2, a\neq$$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(x)=ax^3+27x^2+12x+2001=0$

Ta có: $2f(x).f''(x)=\left[f'(x)\right]^2 \Leftrightarrow 2f(x).f''(x)-\left[f'(x)\right]^2=0$

Đặt $g(x)=2f(x).f''(x)-\left[f'(x)\right]^2$. Ta có $g'(x)=2f(x).f'''(x)$

Gọi 3 nghiệm của $f(x)$ là $\alpha,\beta,\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$ ta có:

$g'(x)=12a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		α		β		γ		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	0	−	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	$g(\alpha)$	↗	$g(\beta)$	↘	$g(\gamma)$	↗	$+\infty$

Vì $f'(\alpha)\neq 0 \Rightarrow g(\alpha)=-\left[f'(x)\right]^2<0$

Tương tự ta có: $g\left(\beta\right)<0$ và $g\left(\gamma<0\right)$

Vậy phương trình $g(x)=0$ có 2 nghiệm thực

Bài toán 23: Cho $f\in R\left[x\right], f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_o$

Chứng minh: $\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+...+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_o}{1}=0$ thì f có nghiệm

Hướng dẫn giải

Xét $Q(x)=\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+..+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_o}{1}x$

Thì $Q'(x)=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_o$

Ta có $Q(0)=Q(1)=0$. Áp dụng định lí Role thì $Q(x)$ có 2 nghiệm neenn $Q'(x)=f(x)$ có nghiệm

Bài toán 24: Cho $f(x)=a_o x^n+a_1 x^{n-1}+a_{n-1}x+a_n, a_o\neq 0$ có n nghiệm phân biệt. Chứng minh $f(x)-f'(x)=0$ cũng có nghiệm phân biệt và:

$$(n-1)a_1^2>2na_o a_2$$

Hướng dẫn giải

Đặt $g(x)=e^{-x}f(x)$

Vì $f(x)+0$ có n nghiệm $\alpha_1<\alpha_2<...<\alpha_n$ nên $g(\alpha_i)=0,1,2,...,n$

Theo định lí Role trong mỗi khoảng $(\alpha_i,\alpha_{i+1})(i=1,2,...,n-1)$ thì tồn tại β_i để $g'(\beta_i)=0$. Mặt khác: $g'(x)=e^{-x[f(x)-f'(x)]}$

Suy ra $f(x)-f'(x)$ có $n-1$ nghiệm $\beta_1,\beta_2,...,\beta_{n-a}$ và do đó $f(x)-f'(x)=0$ có đủ n nghiệm.

Vì $f(x)$ có n nghiệm phân biệt nên theo định í Role thì: $f'(x)$ có $n-1$ nghiệm; $f''(x)$ có $n-2$ nghiệm,…

$\Rightarrow f^{(n-2)}(x)=\dfrac{n!}{2}a_o x^2+(n-1)!\,a_1 x+(n-2)!\,a_2$ có 2 nghiệm phân biệt

Do đó: $\Delta>0$ nên: $((n-1)!\,a_1)^2-2n!\,a_o(n-2)!\,a_2>0$

Vậy $(n-1)a_1^2>2na_o a_2$

Bài toán 25: Giả sử $f(x)=a_o x^n+a_1 x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ là đa thức với các hệ số thực, có $a_o\neq 0$ và thỏa mãn đẳng thức sau với $\forall x\in R: f(x).f(2x^2)=f(2x^3+x)(*)$. Chứng minh $f(x)$ không có nghiệm số thực.

Hướng dẫn giải

Từ (*) nhận thấy nếu x_o là nghiệm thực của $f(x)$ thì tất cả các số thực:

$x_n=2x_{n-1}^3+x_{n-1}; n=1,2,3,...$ cũng sẽ là nghiệm của $f(x)$

Hơn nữa dễ dàng nhận thấy:

$x_{o<0}$ thì $x_o>x_1>x_2...>x_n>x_{n+1}>...$ và:

Với $x_o>0$ $x_o<x_1<x_2<...<x_n<x_{n+1}<...$

Từ đó suy ra nếu $f(x)$ có 1 nghiệm thực khác 0 thì $f(x)$ sẽ có vô số nghiệm thực khác nhau. Tuy nhiên $f(x)$ chỉ có tối đa n nghiệm thực, do $f(x)$ là đa thức bậc n với các hệ số thực. Mâu thuẫn, chứng tỏ $f(x)$ không có nghiệm thực khác 0.

Ta chứng minh $f(0)\neq 0 \Leftrightarrow a_n\neq 0$

Giả sử $a_n=0$. Gọi k là chỉ số lớn nhất thỏa $a_k\neq 0$

Do vậy: $g(x)=f(x).f(2x^2)=a_o^2 2^n.x^{3n}+...+a_k^2 2^{n-k}.x^{3(n-k)}$

$h(x)=f(2x^3+x)=a_o 2^n x^{3n}+...+a_k x^{n-k}$

Vì $n-k>0 \Rightarrow 3(n-k)>n-k$

Do đó $g(x)\equiv h(x)\Rightarrow a_k=0$ (mâu thuẫn). Nên $a_n\neq 0$

Vậy $f(x)$ không có nghiệm số thực

KẾT LUẬN

Tiếp nối báo cáo phần 1, trong báo cáo này tôi giới thiệu lại một số kiến thức cơ bản về đa thức, nghiệm của đa thức và hoàn thiện hệ thống bài tập với đầy đủ các dạng toán từ cơ bản đến nâng cao, điều này giúp các em sinh viên cũng như người đọc có cái nhìn toàn diện hơn về đa thức.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Đàm Văn Nhỉ; Đa Thức – Chuỗi Và Chuyên Đề Nâng Cao; Nhà xuất bản thông tin và truyền thông, 2019.

[2]. Lê Hoành Phó, Chuyên Khảo Đa Thức, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2018

[3]. Nguyễn Hữu Điển, Đa Thức Và ứng Dụng, NXB giáo dục, 2019