BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHUYÊN ĐỀ ĐA THỨC DÀNH CHO SINH VIÊN THI OLYMPIC – PHẦN 1

Người báo cáo: Th.s Đào Xuân Hưng

Hà nội, 1/2021

MỤC LỤC

Mục lục 2

MỞ ĐẦU 3

1. Kiến thức trọng tâm...4

1.1. Nghiệm hữu tỷ, nghiệm nguyên... 4

1.2. Phân tích nhân tử theo các nghiệm..5

1.3. Đa thức CHEBYSHEV...6

2. Các bài toán...7

KẾT LUẬN... 16

TÀI LIỆU THAM KHẢO.... 18

MỞ ĐẦU

Đa thức là dạng toán thường gặp trong các đề thi chọn học sinh giỏi và các kỳ Olympic Toán sinh viên. Đây là một dạng toán khó, không có phương pháp giải chung cho một nhóm các bài riêng biệt. Để giải các bài toán về đa thức, đòi hỏi người làm phải có kiến thức sâu, rộng và cần có tư duy sáng tạo, linh hoạt. Trong báo cáo này, tôi sẽ đưa ra các khái niệm cơ bản về đa thức, nghiệm của đa thức và hướng dẫn sinh viên giải một số bài tập cụ thể. Mục đích của báo cáo này giúp sinh viên có kiến thức để giải được các bài toán tương đối phức tạp đặt ra trong môn học chuyên nghành và đặc biệt nó rất hữu ích cho các bạn sinh viên tham gia kì thi Olympic Toán học.

.

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

Định nghĩa: Cho $f \in R[x]$ và số $\alpha \in R$

Ta gọi α là một nghiệm thực của f nếu $f(\alpha)=0$

Ta gọi α là nghiệm bội k của $f(x)$ nếu $f(x)$ chia hết cho $(x-\alpha)^k$ nhưng không chia hết cho $(x-\alpha)^{k+1}$ nghĩa là:

$$f(x)=(x-\alpha)^k.g(x), \forall x \in R \text{ và } g(\alpha)\neq 0$$

hay $\begin{cases} f(\alpha)=0, f'(\alpha)=0,..., f^{(k-1)}(\alpha)=0 \\ f^{(k)}(\alpha)\neq 0 \end{cases}$

Định lí BEZOUT: α là một nghiệm của đa thức $f(x)$ khi và chỉ khi $f(x)$ chia hết cho $x-\alpha$.

1.1. Nghiệm hữu tỷ, nghiệm nguyên

Cho $f \in Z[x], \deg f = n, a_i \in Z$

$$f(x)=a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n, a_o \neq 0$$

Nghiệm hữu tỷ nếu có $x=\dfrac{p}{q}$ với $(p,q)=1$ thì p là ước của hệ số tự do và q là ước của hệ số cao nhất: $p|a_n, q|a_o$.

Nếu f có n nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n$ (phân biệt hay trùng nhau).

Thì: $x_1+x_2+...+x_n=\dfrac{a_1}{a_o}$

$$x_1x_2+x_1x_3+...+x_{n-1}.x_n=\frac{a_2}{a_o}$$

$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+...+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_3}{a_o}$$

....

và $x_1x_2...x_n=(-1)^n.\dfrac{a_n}{a_o}$

Đảo lại, nếu n số $x_1, x_2, x_3..., x_n$ có tổng các tích chập k của n số x_i là S_k thì $x_1, x_2, ..., x_n$ là nghiệm nếu có của phương trình:

$$X^n - S_1 X^{n-1} + S_2 X^{n-2} + ... + (-1)^{n-1}.S_{n-1} X + (-1)^n.S_n = 0$$

Định lí liên tục:

Nếu đa thức $f(x)$ nhận 2 giá trị trái dấu trên $[a,b]$ là $f(a).f(b) < 0$ thì đa thức $f(x)$ có ít nhất một nghiệm $x = c \in (a,b)$

Định lí LAGRANGE:

Với mọi đa thức $f(x)$ trên $[a,b]$ thì có số $c \in (a,b): \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$

Đặc biệt nếu $f(a) = f(b) = 0$ hay chỉ cần $f(a) = f(b)$ thì $f'(c) = 0$ tức là: $f'(x) = 0$ có 1 nghiệm thuộc (a,b)

Định lí ROLE:

Giữa 2 nghiệm của đa thức $f(x)$ thì có một nghiệm của $f'(x)$

Nếu f có n nghiệm phân biệt thì f' có $n-1$ nghiệm phân biệt, f'' có $n-2$ nghiệm phân biệt,…, $f^{(n-k)}$ có $n-k$ nghiệm phân biệt,…

1.2. Phân tích nhân tử theo các nghiệm

Cho $f \in R[x]$ có nghiệm $x_1, x_2, ..., x_m$ với bội tương ứng $k_1, k_2, ..., k_m$ thì tồn tại $g \in R[x]$

$$f(x) = (x - x_1)^{k_1}.(x - x_2)^{k_2}...(x - x_m)^{k_m}.g(x)$$

Hay $f(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)^{k_i} g(x)$ với $\sum_{i=1}^{m} k_1 \le n$

Nếu f bậc n có đủ n nghiệm phân biệt hay trùng nhau thì:

$$f(x) = A(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) = A\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$$

Phân tích ra nhân tử của $\mathbf{f \in R[x]}$

Các nhân tử của f chỉ là nhị thức bậc nhất hoặc tam thức bậc hai vô nghiệm:

$$f(x)=a_o\prod_{i=1}^{m}(x-d_i)\prod_{k=1}^{s}(x^2+b_k.x+c_k)$$

Với các hệ số $d_i,b_k,c_k\in R, 2s+m=\deg f, b_k^2-4c_k<0$ và cách phân tích này là duy nhất.

Phân tích ra nhân tử của $\mathbf{f}(\mathbf{z})\in\mathbf{C}[\mathbf{z}]$, $\deg f=n$

$$f(z)=a_oz^n+a_1z^{n-1}+...+a_{n-1}z+a_n, a_o\neq 0$$

Theo định lí D'ALEMNBERT thì f có đủ n nghiệm phức $z_1,z_2,...,z_n$ nên:

$$f(z)=a_o(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)=a_o\prod_{i=1}^{n}(z-z_i)$$

1.3. Đa thức CHEBYSHEV:

$T_n(x)$ xác định như sau:

$$T_n(x)=1, T_1(x)=x, T_{n+1}x=2x.T_n(x)-T_{n-1}, n\geq 1$$

Cụ thể: $T_o(x)=1; T_1(x)=x; T_2(x)=2x^2-1$

$$T_3(x)=4x^3-3x; T_4(x)=8x^4-8x^2+1$$

$$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x,...$$

Đa thức Chebyshev (Trưbưsep) $T_n(x)$ có bậc n và có hệ số cao nhất 2^{n-1}.

Đôi khi ta chỉ xét $n\geq 1$ trở đi.

Kết quả:

$(1): T_n(\cos\alpha)=\cos n\alpha$

$(2): |T_n(x)|\leq 1, \forall x\in[-1,1]$

$(3): |T_n(x)|=1$ có đúng n nghiệm phân biệt trê $[-1,1]$ là:

$$x=\cos k\frac{\pi}{n}, k=0,1,...,n-1$$

Chú ý:

1) Số lượng nghiệm:

- Mỗi đa thức hệ số thực bậc n đều có không quá n nghiệm thực
- Đa thức có vô số nghiệm là đa thức không $f \equiv 0$
- Nếu đa thức có bậc $\le n$ và có quá n nghiệm là đa thức không
- Nếu đa thức có bậc $\le n$ và nhận $n+1$ giá trị như nhau tại $n+1$ điểm khác nhau của biến là đa thức hằng: $f \equiv C$
- Hai đa thức có bậc $\le n$ và nhận $n+1$ giá trị như nhau tại $n+1$ điểm khác nhau của biến thì đồng nhất nhau: $f \equiv g$

2) Quy tắc dấu DESCARTE:

$$f(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n, a_o \ne 0$$

Gọi D là số nghiệm dương (kể cả bội)

L là số lần đổi dấu trong dãy hệ số khác 0 từ a_o đến a_n (bỏ đi các hệ số $a_i = 0$)

Thì: $D \le L$ và $L - D$ là số chẵn hay $L = D + 2m, m \in N$

3) Đưa đa thức vào giả thiết các số bất kì

Cho n số bất kì $x_1, x_2, ..., x_n$ thì ta xét đa thức nhận n số đó làm nghiệm:

$f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i) = (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$. Từ đó ta khai thác các quan hệ về nghiệm, Viette, hệ số, đạo hàm,…

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1. Cho số tự nhiên $n \ge 2$, chứng minh phương trình:

$\frac{x_n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + \frac{x^2}{2!} + \frac{x}{1!} + 1 = 0$ không có nghiệm hữu tỉ.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh phản chứng. Giả sử phương trình đã cho có nghiệm hữu tỉ α . Khi đó α sẽ là nghiệm hữu tỉ của đa thức:

$$P(x) = x^n + nx^{n-1} + ... + n!\frac{x^k}{k!} + ... + n!\frac{x}{1!} + n!$$

Nhưng do P(x) là đa thức bậc n với hệ số nguyên, hơn nữa hệ số của x^n bằng 1, nên suy ra α phải là số nguyên, và ta có:

$$\alpha^n + n\alpha^{n-1} + ... + n!\frac{\alpha^k}{k!} + ... + n!\frac{\alpha^2}{2} + n!\frac{\alpha}{1!} + n! = 0 \quad (1)$$

Gọi p là một ước nguyên tố của n.

$\forall k = \overline{1,n}$, kí hiệu r_k là số mũ cao nhất của p thỏa mãn $k! \vdots p^{r_k}$, ta có:

$$r_k = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + ... + \left[\frac{k}{p^s}\right] \quad (2)$$

Với s là số nguyên không âm thỏa mãn: $p^s \le k < p^{s+1}$

Từ (2) suy ra: $r_k \le \frac{k}{p} + \frac{k}{p^2} + ... + \frac{k}{p^s} = k.\frac{1-\frac{1}{p^s}}{p-1} < k$

Do đó $r_n - r_k > r_n - k$. Suy ra $r_n - r_k \ge r_n - k + 1$

Vì vậy ta được $\frac{n!}{k!} \vdots p^{n-k+1}, \forall k = \overline{1,n}$ (3)

Mà $n \vdots p$ nên từ (1) ta có $\alpha^n \vdots p$, và dó đó $\alpha \vdots p$

Suy ra $\alpha^k \vdots p_k, \forall k = \overline{1,n}$

Kết hợp điều này với (3) ra được $n!\frac{\alpha^k}{k!} \vdots p_n^{r+1}, \forall k = \overline{1,n}$

Từ đây và (1) ta suy ra $n! \vdots p_n^{r+1}$: mâu thuẫn $\Rightarrow$ đpcm.

Bài toán 2. Cho $P(x) \in Z[x]$ và $P(x) = 1; P(x) = 2; P(x) = 3$ có ít nhất một nghiệm nguyên lần lượt là x_1, x_2, x_3 . Chưng minnh $P(x) = 5$ không có hơn một nghiệm nguyên

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh rằng x_1, x_2, x_3 là nghiệm nguyên duy nhất của các phương trình trên.

Ta có $P(x) = (x - x_2).q(x) + 2$ với $q(x) \in Z[x]$

Cho $x = x_1$ và $x = x_3$, ta được

$$1 = P(x_1) = (x_1 - x_2)q(x_1) + 2 \Rightarrow (x_1 - x_2)q(x_1) = -1$$
$$3 = P(x_3) = (x_3 - x_2)q(x_3) + 2 \Rightarrow (x_3 - x_2)q(x_3) = 1$$

Vì $x_1 - x_2; x_3 - x_2; q(x_3); q(x_3)$ là những số nguyên nên $x_1 - x_2$ và $x_3 - x_2$ chỉ có thể

bằng ± 1. Nhưng $x_1 \neq x_3$ nên:

Hoặc $x_1 - x_2 = 1$ và $x_3 - x_2 = -1$

Hoặc $x_1 - x_2 = -1$ và $x_3 - x_2 = 1$

Do đó x_2 là trung bình cộng của x_1, x_3

Giả sử phương trình $P(x) = 2$ còn có một nghiệm nguyên $x'_2 \neq x_2$. Lặp lại lập luận trên cho 3 số x_1, x_2, x_3 thì ta lấy $x'_2 = x_2$ (mâu thuẫn)

Vậy x_2 là nghiệm duy nhất của phương trình $P(x) = 2$

Hướng dẫn giải tương tự cho $P(x) = 1; P(x) = 3$

Giả sử phương trình $P(x) = 5$ có một nghiệm nguyên x_5, ta có:

$$5 = P(x_5) = (x_5 - x_2)q(x_5) + 2 \Rightarrow (x_5 - x_2)q(x_5) = 3$$

Nếu $x_5 - x_2$ chỉ có thể lấy các giá trị ± 1 và ± 3

Nếu $x_5 - x_2 = \pm 1$ thì theo chứng minh trên x_5 phải trùng với x_1 hoặc x_3. Vô lý vì x_5 khác với x_1 và x_3. Do đó chỉ có thể xảy ra khả năng $x_5 - x_2 = \pm 3$

Mà $P(x) = (x - x_3)r(x) + 3; r(x) \in Z[x]$

$$\Rightarrow 5 = P(x_5) = (x_5 - x_3)r(x_5) + 3 \Rightarrow (x_5 - x_3)r(x_5) = 2$$

Suy ra $x_5 - x_3$ chỉ có thể lấy các giá trị ± 1 và ± 2. Có thể thấy

$x_5 - x_3 = \pm 1$ (mâu thuẫn). Nên $x_5 - x_3 = \pm 2$ do đó:

Nếu $x_1 - x_2 = 1$ và $x_3 - x_2 = -1$ thì $x_5 - x_2 = -3$

Nếu $x_1 - x_2 = -1$ và $x_3 - x_2 = 1$ thì $x_5 - x_2 = 3$

Như vậy nghiệm nguyên x_5 (nếu nó tồn tại) của phương trình $P(x) = 5$ được xác định hoàn toàn bởi x_1, x_2, x_3. Các số này là duy nhất. Vậy $P(x) = 5$ không thể có hơn một nghiệm nguyên.

Bài toán 3. Chứng minh rằng với mọi số nguyên a, đa thức:

$f(x)=x^4-2001x^3+(2000+a)x^2-1999x+a$ không thể có hai nghiệm nguyên (phân biệt hay trùng nhau)

Hướng dẫn giải

Trước hết ra chứng minh rằng nếu x_o là một nghiệm nguyên của $f(x)$ thì x_o phải là số chẵn. Thật vậy:

$f(x_o)=0; f(1)=2a-1999$ là số lẻ nên $f(x_o)-f(1)$ là số lẻ

Nhưng $f(x_o)-f(1)$ chia hết cho x_o-1 nên x_o-1 là một số lẻ do đó x_o là chẵn. Ta xét 2 trường hợp:

- Giả sử $f(x)$ có hai nghiệm nguyên x_1, x_2 phân biệt, thế thì:

$$0=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=(x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^3)-2001(x_1^2+x_1x_2+x_2^2+(2000+a)(x_1+x_2)-1999$$

Đẳng thức không thể xảy ra vì x_1, x_2 đều chẵn.

- Giả sử $f(x)$ có nghiệm kép x_o chẵn. Khi đó x_o cũng là nghiệm của đạo hàm $f'(x)$. Do đó:

$$f'(x_o)=4x_o^3-6003x_o^2+2(2000+a)x_o-1999=0$$

Đẳng thức không thể xảy ra vì x_o chẵn.

Bài toán 4. Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương $n, a^n+b^n+c^n$ là số nguyên. Chứng minh tồn tại các số nguyên p, q, r sao cho a, b, c là 3 nghiệm của phương trình $x^3+px^2+qx+r=0$

Hướng dẫn giải

Ta xét bài toán: Cho hai số thực a, b thỏa mãn điều kiện: với mỗi số nguyên dương n, a^n+b^n là số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên p, q sao cho a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2+px+q=0$

Theo định lí Viet, rõ ràng điều phải chứng minh tương đương với việc chứng minnh $a+b$ và $a.b$ là số nguyên. $a+b$ hiển nhiên nguyên theo điều kiện đề bài.

Ngoài ra ta có $2ab=(a+b)^2-(a^2-b^2)$ là số nguyên. Đến đây, ta có thể tiếp tục dùng hằng đẳng thức này để suy ra $2a^2b^2$ cũng là số nguyên: $2a^2b^2=(a^2+b^2)-(a^4+b^4)$

<u>Bổ đề.</u> Nếu x là số thực sao cho $2x$ và $2x^2$ là các số nguyên thì x là số nguyên.

Chứng minh. Ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử $2x=k$ nguyên, nhưng x không nguyên. Khi đó k là số nguyên lẻ:

$k=2m+1$. Suy ra $x=m+\frac{1}{2}$

Nhưng khi đó $2x^2=2(m+\frac{1}{2})^2=2m^2+2m+\frac{1}{2}$ không nguyên. Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử là sai, tức là x nguyên.

Như vậy, theo bổ đề thì ab nguyên và ta suy ra điều phải chứng minnh. Từ phép chứng minh ta cũng suy ra kết quả mạnh hơn:

Nếu $a+b, a^2+b^2, a^4+b^4$ là các số nguyên thì a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2+px+q=0$ với p, q là các số nguyên nào đó (và dó đó a^n+b^n nguyên dương với mọi n nguyên dương). Điều đó cũng có nghĩa là ta chỉ cần dùng giả thiết của bài toán đến $n=4$. Ví dụ $a=\frac{\sqrt{2}}{2}, b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ cho thấy $k=4$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện:

Nếu a, b là các số thực thỏa mãn điều kiện a^n+b^n là số nguyên với mọi $n=1,2...,k$ thì a^n+b^n nguyên với mọi n nguyên dương.

Trở lại với bài toán, ta chỉ cần chứng minh $a+b+c, ab+bc+ca$ và abc nguyên.

Theo điều kiện đề bài thì $a+b+c$ là số nguyên. Tiếp theo ta có

$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$ là số nguyên.

Tương tự như lời hướng dẫn gải trên, ta muốn chứng minh rằng $2(ab+bc+ca)^2$ cũng là số nguyên.

Từ đó dùng bổ đề suy ra $ab+bc+ca$ là số nguyên

Ta có $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)=(a^2+b^2+c^2)-(a^4+b^4+c^4)$

và $2(ab+bc+ca)^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4abc(a+b+c)$ (1)

Vì $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (2)

Từ đây, do $a+b+c, a^2+b^2+c^2, a^3+b^3+c^3$ và $2(ab+bc+ca)$ là số nguyên nên ta suy ra $6abc$ là số nguyên (ta nhân (2) với $2!$). Từ đó, nhân (2) với 3 ta thu được $6(ab+bc+ca)^2=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+12abc(a+b+c)$ là số nguyên.

Như vậy $2(ab+bc+ca)$ và $6(ab+bc+ca)^2$. Áp dụng cách chứng minh như bổ đề nêu trên, ta suy ra $ab+bc+ca$ là số nguyên. Từ đây, thay vào (2) ta có $3abc$ là số nguyên.
Tiếp theo, ta ử dụng hằng đẳng thức tương tự (2)

$$a^6+b^6+c^6-3a^2b^2c^2=(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)$$

với chú ý $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$ là số nguyên ta suy ra $6a^2b^2c^2$ là số nguyên.

Từ $6abc$ và $6a^2b^2c^2$ là số nguyên, bằng cách chứng minh hoàn toàn tương tự ta suy ra abc là số nguyên. Bài toán được Hướng dẫn giải quyết hoàn toán.

Bài toán 5. Cho đa thức P(x) có bậc $m>0$ và có các hệ số nguyên. Gọi n là số tất cả các nghiệm nguyên phân biệt của hai phương trình $P(x)=1$ và $P(x)=-1$. Chứng minh rằng : $n<m+2$

Hướng dẫn giải

Xét hai đa thức $A(x)$ và $B(x)$, với các hệ số nguyên, chúng giống nhau hoàn toàn, chỉ trừ hai số hạng tự do là khác nhau, hai số hạng này hơn kém nhau 2 đơn vị.
Gọi r và s là các nghiệm nguyên tương ứng của hai đa thức, tức là:

$$A(r)=0 \quad (1) \text{ và } B(s)=0 \quad (2)$$

Khi đó, trừ (1) cho (2) ta được một tổng của hạng tử có dạng $a(r^i-s^i)$ và cộng thêm cho 2. Mỗi hạng tử này chia hết cho $(r-s)$, do đó 2 phải chia hết cho $(r-s)$. Từ đó, suy ra r và s hơn kém nhau 0, 1 hoặc 2 đơn vị.
Giả sử r là nghiệm nguyên bé nhất trong tất cả các nghiệm nguyên của hai phương trình: $P(x)=1$ và $P(x)=-1$.

Ta biết rằng đa thức bậc m và có không quá m nghiệm phân biệt, do đó nó cũng có không quá m nghiệm nguyên phân biệt. Theo nhận xét trên, nếu r là một nghiệm nguyên của phương trình này và s là một nghiệm nguyên của phương trình kia thì r và s khác 0, 1 hoặc 2 đơn vị.

Nhưng ta có $s \ge r$, do đó ta được $s = r, s = r + 1$ hoặc $s = r + 2$

Do vậy, ta suy ra rằng phương trình thứ hai chỉ có thêm vào nhiều nhất là 2 nghiệm phân biệt nữa. Vậy: $n \le m + 2$

Bài toán 6. Tìm các nghiệm của đa thức $P(x)$ hệ số thực thỏa mãn:

$(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)P(x-1) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 2)P(x)$ với mọi x.

Hướng dẫn giải

Ta có $(x+2)(x^2+x+1)P(x-1) = (x-2)(x^2-x+1)P(x)$

Từ đây chọn: $x = -2$ suy ra $P(-2) = 0$, chọn $x = -1$ suy ra:

$P(-1) = 0$ (do $P(-2) = -9P(-1)),$

Chọn $x = 0$ suy ra $P(0) = 0,$ chọn $x = 1$ suy ra $P(1) = 0$

Do đó $P(x) = x(x-1)(x+1)(x+2)Q(x)$, với $Q(x)$ là đa thức hệ số thực

Thay $P(x)$ vào đẳng thức ở đề bài ta được

$$\left[(x+2)\left(x^2+x+1\right)\right](x-1)(x-2)x(x+1)Q(x-1)$$

$$= (x-2)\left(x^2-x+1\right)x(x-1)(x+2)Q(x)$$

Suy ra

$$\left(x^2+x+1\right)Q(x-1) = \left(x^2-x+1\right)Q(x), \forall x \ne 0, x \ne 1, x \ne -1, x \ne -2, x \ne 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q(x-1)}{x^2-x+1} = \frac{Q(x)}{x^2+x+1}, \forall x \ne 0, x \ne 1, x \ne -1, x \ne 2, x \ne -2$$

$$\Leftrightarrow \frac{Q(x-1)}{(x-1)^2+(x-1)+1} = \frac{Q(x)}{x^2+x+1}, \forall x \ne 0, x \ne 1, x \ne -1, x \ne -2, x \ne 2$$

Đặt $R(x) = \dfrac{Q(x)}{x^2+x+1}$, ta có $R(x0 = R(x-1), \forall x \ne 0, x \ne 1, x \ne -1, x \ne 2, x \ne -2$

Suy ra $R(x) \equiv C$ (hằng số), nên $Q(x) \equiv C(x^2+x+1)$

Do đó $P(x) = Cx(x-1)(x+1)(x+2)$. Thử lại:

$(x+2)\left(x^2+x+1\right)C\left(x^2-x+1\right)(x-1)(x-2)x(x+1)$

$=(x-2)\left(x^2-x+1\right)C\left(x^2+x+1\right)x(x-1)(x+1)(x+2)$ (thỏa mãn)

Vậy $P(x)=Cx(x-1)(x+1)(x+2)$ nên có 4 nghiệm $x=0;\pm 1,-2$

Bài toán 7. Tìm a để phương trình: $16x^4-ax^3+(2a+17)x^2-ax+16=0$ có 4 nghiệm phân biệt lập cấp số nhân

Hướng dẫn giải

Gọi 4 nghiệp phân biệt lập cấp số nhân y, ym, ym^2, ym^3 với

$y\neq 0, m\neq \pm 1, m\neq 0$. Với $A=\dfrac{a}{16}$, theo Viete

$y\left(1+m+m^2+m^3\right)=A$ (1)

$y^2\left(m+m^2+2m^3+m^4+m^5\right)=2A+\dfrac{17}{16}$ (2)

$y^3\left(m^3+m^4+m^5+m^6\right)=A$ (3)

Ta có: $m\neq -1$ vì nếu $m=-1$ thì phương trình có 2 nghiệm trùng nhau là $y=ym^2$ trái với bài ra.

Ta có $(1)\Leftrightarrow y(m+1)\left(m^2+1\right)=A\neq 0$

Chia (3) cho (1) vế theo vế: $y^2m^3=1$ (4)

Suy ra $m^3>0, m>0$. Thay (4) vào (2) được:

$y^2(m+m^2+m^4+m^5)=2A-\dfrac{15}{16}>0$ (2')

Vì $m>0, y^2>0$, do đó $A>0$. Từ (1) suy ra $y>0$

Từ (4) ta có: $\sqrt[3]{y}=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$. Đặt $\sqrt{m}=v$ thì $y=v^{-3}$

Thay vào (2) và (2') được: $v^{-3}\left(1+v^2+v^4+v^6\right)=A$ (5)

Rồi biến đổi thì được phương trình:

$$\frac{1}{8}(v-2)\left(v-\frac{1}{2}\right)\left(2v^2+3v+2\right)\left[2v^2-\left(1+\sqrt{2}\right)v+2\right]\left[2v^2-\left(\sqrt{2}-1\right)v+2\right]=0$$

$$\left[2v^2-\left(\sqrt{2}-1\right)v+2\right]=0$$

Ta có: $2v^2+3v+2>2v^2-(1+\sqrt{2})v+2>0$

$2v^2+\left(\sqrt{2}-1\right)v+2>0$ (do các biệt số đều âm) nên:

$(v-2)(v-\frac{1}{2})=0 \Leftrightarrow v=2$ hoặc $v=\frac{1}{2}$

Thay vào (5) thì có: $A=\frac{170}{16}$ suy ra: $a=170$

Đảo lại $a=170$ thì phương trình: $16x^4-170x^3+357x^2-170x+6=0$ có 4 nghiệm $\frac{1}{8},\frac{1}{2},2,8$ phân biệt lập cấp số nhân có công bội là 4. Vậy $a=170$

Bài toán 8. Tìm a, b nguyên sao cho phương trình:

$$x^4+^3+bx^2+ax+1=0 \qquad (1)$$

Có 2 trong số các nghiệm có tích bằng -1

Hướng dẫn giải

Giả sử có 2 số nguyên a, b mà phương trình $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ có 2 nghiệm u, v với $u,v\in Z$ và $u,v\neq 1$

Để ý rằng nếu x là 1 nghiệm thì $x\neq 0$ và $\frac{1}{x}$ cũng là nghiệm

Như vậy phương trình (1) có 4 nghiệm là: $u,v,\frac{1}{u},\frac{1}{v}$

Theo định lí Viet ta có: $u+v+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{\left(u+v\right)\left(uv+1\right)}{uv}=-a \qquad (2)$

Và $u.v+\frac{v}{u}+\frac{u}{v}+\frac{1}{uv}+2=u.v+\frac{(u+v)^2}{u.v}=b$ (3)

Ta sẽ chứng minh $u.v=-1$

Giả sử $u.v=-1$. Từ (2) và (3) ta suy ra $u+v$ hữu tỉ và $(u+v)^2\in Z$ nên $(u+v)\in Z$ và cả hai $(u+v),(u+v)^2+1$ đều chia hết cho u.v

Nhưng $\left[(u+v),(u+v)^2+1\right]=1$, nên suy ra hoặc $u.v=1$ hoặc $u.v=-1$

Điều này mâu thuẫn với $u.v\neq\pm 1$

Vậy $u.v=-1$ và do đó $a=0,b=-(u+v)^2-2\leq -2$

Ngược lại nếu $a=0,b\in Z,b\leq -2$

Phương trình (1) trở thành: $x^4+bx^2+1=0$ có hai nghiệm:

$$u=\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4}}{2}},v=\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4}}{2}}$$

Thỏa mãn: $u.v=-1\in Z,u.v\neq 1$

Vậy các số nguyên a, b cần tìm là: $a=0,b\in Z,b\leq -2$

Bài toán 9. Cho phương trình bậc 3: $x^3+px^2+qx+r=0$ có 3 nghiệm phân biệt. Chứng minh điều kiện cần và đủ để 3 nghiệm x_1,x_2,x_3

a) Lâp cấp số cộng là: $2p^2-9pq+27r=0$

b) Lập cấp số nhận là: $q^3-rp^3=0$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử nghiệm x_1,x_2,x_3 lập cấp số cộng nên $x_1+x_3=2x_2$

Theo định lí Viet thì $x_1+x_2+x_3=-p\Rightarrow x_2=-\frac{p}{3}$

Nên: $\left(-\frac{p}{3}\right)^3+p\left(-\frac{p}{3}\right)^2+q\left(-\frac{p}{3}\right)+r=0$

Do đó: $2p^3-9pq+27r=0$

Đảo lại nếu có $2p^3-9pq+27r=0$ thì phương trình nhận $x_2=-\frac{p}{3}$ là nghiệm nên

$$\left(x+\frac{p}{3}\right).\left(x^2+\frac{2}{3}px+q-\frac{2}{9p^2}\right)=0$$

Khi đó: $x_1+x_3=-p+\frac{p}{3}=-\frac{2p}{3}=2x_2$

Vậy x_1,x_2,x_3 lập thành cấp số cộng

b) Giả sử 3 nghiệm x_1,x_2,x_3 lập cấp số nhân nên $x_1x_3 = x_2^2$

Theo định lí Viete thì:

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q_1x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 = qx_2\left(x_1 + x_2 + x_3\right) = q$

Mà $x_1 + x_2 + x_3 = -p$. Suy ra $x_2 = -\dfrac{q}{p}$

Nên: $\left(-\dfrac{q}{p}\right)^3 + p\left(-\dfrac{q}{p}\right)^2 + q\left(-\dfrac{q}{p}\right) + r = 0 \Rightarrow q^3 - rp^3 = 0$

Đảo lại nếu có $q^3 - rp^3 = 0$ thì phương trình nhận $x_2 = -\dfrac{q}{p}$ là một nghiệm của phương trình.

Do đó $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{q}{p}\right)\left(x^2 + Mx + \dfrac{pr}{q}\right) = 0$

Khi đó $x_1x_3 = \dfrac{pr}{q} = \left(\dfrac{q}{p}\right)^2 = x_2^2$ nên x_1,x_2,x_3 lập cấp số nhân

Bài toán 10. Cho đa thức $P(x)$ có bậc $n > 1$ có nghiệm thực $x_1,x_2,x_3,...,x_n$ phân biệt.

Chưng minh: $\dfrac{1}{P'(x_1)} + \dfrac{1}{P'(x_2)} + ... + \dfrac{1}{P'(x_n)} = 0$

Hướng dẫn giải

Đặt $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n), a \neq 0$

Nên $P'(x) = P_1(x) + P_2(x) + ... + P_n(x)$ với $P_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n}\left(x - x_j\right)$

Ta thấy $P_i(x_j) = 0, \forall j \neq i \Rightarrow P'(x_j) = P_j(x_j) \neq 0, \forall j = \overline{1,n}$

Xét đa thức: $F(x) = \sum_{i=1}^{n}\dfrac{P_i(x)}{P'(x_i)} - 1$ có bậc không vượt quá $n - 1$

Với $i = \overline{1,n}$ ta có: $F(x_i) = \dfrac{P_i(x_i)}{P'(x_i)} - 1 = 0$

$\Rightarrow F(x)$ có n nghiệm phân biệt $\Rightarrow F(x) = 0$

Mà hệ số của $F(x)$ đối với x^{n-1} bằng 0.

Nên $\frac{a}{P'(x_1)}+\frac{a}{P'(x_2)}+...+\frac{a}{P'(x_n)}=0$

Vậy: $\frac{1}{P'(x_1)}+\frac{1}{P'(x_2)}+...+\frac{1}{P'(x_n)}=0$ (đpcm)

KẾT LUẬN

Trong báo cáo trên, tôi đã đưa ra một số kiến thức cơ bản về đa thức, nghiệm của đa thức và một số bài tập cụ thể, Tuy nhiên với thời lượng cho phép của báo cáo không nhiều, do vậy lượng bài tập đưa ra còn ít và chưa đầy đủ các dạng. Trong báo cáo tới, tôi sẽ đưa thêm nhiều bài tập khác và các dang bài tập cũng đầy đủ hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Đàm Văn Nhỉ; Đa Thức – Chuỗi Và Chuyên Đề Nâng Cao; Nhà xuất bản thông tin và truyền thông, 2019.

[2]. Lê Hoành Phó, Chuyên Khảo Đa Thức, NXB Đại Học Quốc Gia Hà Nội, 2018

[3]. Nguyễn Hữu Điển, Đa Thức Và ứng Dụng, NXB giáo dục, 2019