BÁO CÁO HỌC THUẬT HỌC KỲ 2
NĂM HỌC 2020-2021

SUBHARMONIC FUNCTIONS AND MANY NOTIONS OF CONVEXITY

GVC. THS NGUYỄN THỊ LAN HƯƠNG - HUMG

I. GIỚI THIỆU

1) Báo cáo học thuật đã giới thiệu khái quát các khái niệm cơ bản nhất của giải tích phức nhiều biến và tự đẳng cấu.

2) Báo cáo học thuật cũng đã giới thiệu được một số kết quả nghiên cứu kinh điển cũng như khởi nguồn của các kết quả nghiên cứu đó.

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.1 *Hàm f được gọi là C-khả vi tại điểm* $z_0 \in \Omega$ *nếu tồn tại giới hạn*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Trong trường hợp này, ta nói rằng f có đạo hàm theo biến phức tại điểm z_0 *và ký hiệu là*

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.2

i) Hàm f được gọi là hàm chỉnh hình tại điểm z_0 *nếu nó là C-khả vi tại một lân cận nào đó của điểm* z_0.

ii) Hàm f được gọi là chỉnh hình trong miền Ω *nếu nó chỉnh hình tại mọi điểm của miền ấy.*

iii) Tập hợp các hàm chỉnh hình trong miền Ω *ký hiệu là* $H(\Omega)$.

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.3

i) Hàm f: $\Omega_1 \to \Omega_2$ *được gọi là hàm song chỉnh hình nếu nó là một song ánh chỉnh hình từ* Ω_1 *vào* Ω_2.

ii) Nếu $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ *thì f được gọi là tự đẳng cấu của* Ω *và ký hiệu là* Aut(Ω).

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.4 *Hàm u: $\Omega \to R$ (hoặc C) được gọi là điều hòa nếu nó là C^2 và*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0.$$

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.5 *Hàm u: $\Omega \to R$ (hoặc C) được gọi là điều hòa dưới nếu nó là C^2 và*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} \geq 0.$$

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.6 *Gọi Ω là một miền trong C^n. Trong một lân cận đủ bé U của điểm biên p $\in \partial\Omega$, ta có thể viết*

$$\Omega \cap U = \{z \in U: \rho(z) < 0\},$$

trong đó ρ là hàm thỏa mãn $\nabla\rho \neq 0$ trên $\partial\Omega \cap U$. Khi đó:

i) Hàm ρ được gọi là hàm xác định biên của miền Ω trong lân cận của p.

ii) Ta nói rằng miền Ω có biên trơn lớp C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ tại p nếu hàm xác định biên ρ trơn lớp C^k tại p.

iii) Biên $\partial\Omega$ được gọi là trơn lớp C^k nếu nó trơn lớp C^k tại mọi điểm.

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.7 *Tập $S \subset R^N$ được gọi là lồi nếu với mọi P, Q $\in S$ và $0 \leq \lambda \leq 1$ thì $(1 - \lambda)P + \lambda Q \in S$.*

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.8 *Cho* $\Omega \subset R^N$ *có biên trên lớp* C^1 *và* ρ *là hàm xác định lớp* C^1*. Cho p* $\in \partial\Omega$*, bộ N số thực* $w = (w_1, \ldots.., w_N)$ *được gọi là véc tơ pháp tuyến của biên* $\partial\Omega$ *tại p nếu*

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \rho}{\partial x_j}(p).w_j = 0$$

Khi đó ta viết $w \in T_p(\partial\Omega)$.

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.9 *Miền $G \subset C^n$ với biên trên lớp C^2 được gọi là giả lồi tại $p \in \partial G$ nếu tồn tại hàm xác định biên ρ, tức là $\Omega \cap U = \{\rho < 0\}$ với U là một lân cận của p sao cho*

$$L_\rho(p)(w) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial z_i \partial \overline{z_i}} w_i \overline{w}_i \geq 0$$

với mọi $w \in C^n$ thỏa mãn

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(p)}{\partial z_j} w_j = 0$$

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.10 *Miền $G \subset C^n$ với biên trên lớp C^2 được gọi là giả lồi chặt tại $p \in \partial G$ nếu tồn tại hàm xác định biên ρ, tức là $\Omega \cap U = \{\rho < 0\}$ với U là một lân cận của p sao cho*

$$L_\rho(p)(w) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial z_i \partial \overline{z_i}} w_i \overline{w}_i \geq 0$$

Với mọi $w \in C^n \backslash \{0\}$ thỏa mãn

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \rho(p)}{\partial z_j} w_j = 0$$

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.11 *Một điểm* $p \in \partial\Omega$ *được gọi là điểm tụ quỹ đạo nếu tồn tại* dãy $\{f_j\} \subset Aut(\Omega)$ và *tồn tại* $q \in \Omega$ *sao cho* $f_j(q) \to p$ *khi* $j \to \infty$.

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.12 *Cho $\Omega \subset C^n$ là một miền trơn C^∞ và điểm $p \in \partial\Omega$. Khi đó, kiểu D'Angelo $\tau(\partial\Omega, p)$ của $\partial\Omega$ tại p được định nghĩa như sau*

$$\tau(\partial\Omega, p) = sup_\gamma \frac{\upsilon(\rho o \gamma)}{\upsilon(\gamma)}$$

ở đó ρ là một hàm được xác định cho Ω trong một lân cận của p, supremum được lấy trên tất cả các đường cong chỉnh hình khác hằng γ: $(C, 0) \to (C^n, p)$.

Ta nói rằng p là điểm hữu hạn nếu $\tau(\partial\Omega, p) < \infty$ và là điểm vô hạn nếu ngược lại.

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.13 *Cho Ω, D là các đa tạp phức.*

i) Dãy các ánh xạ chỉnh hình $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset Hol(\Omega, D)$ *gọi là phân kỳ compact nếu với mỗi tập con compact* $K \subset \Omega$ *và mỗi tập con compact* $L \subset D$*, tồn tại* j_0 *sao cho* $f_j(K) \cap L = \phi$ *với mọi* $j \geq j_0$*.*

ii) Một họ F là không phân kỳ compact nếu F không chứa dãy con phân kỳ compact.

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.14 *Miền D được gọi là miền taut nếu với mọi dãy* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset Hol(\Omega, D)$ *chứa một dãy con hội tụ hoặc chứa một dãy con phân kỳ compact.*

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.15 *Một hàm φ được gọi là hàm peak đa điều hòa dưới địa phương tại một điểm p thuộc $\partial\Omega$ nếu tồn tại một lân cận U của p trong C^n sao cho φ là đa điều hòa dưới trên $U \cap \Omega$, liên tục trên $U \cap \bar{\Omega}$ và thỏa mãn*

$$\begin{cases} \varphi(p) = 0, \\ \varphi(z) < 0 \end{cases} \quad \text{với mọi } z \in (U \cap \bar{\Omega}) \setminus \{p\} \ .$$

II. NỘI DUNG BCHT
1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Định nghĩa 1.16 *(Hội tụ Caratheodory) Giả sử* $\{\Omega_v\}$ *là một dãy các miền trong đa tạp phức sao cho* $p \in \bigcap_{v=1}^{\infty} \Omega_v$. *Nếu p là một điểm trong của* $\bigcap_{v=1}^{\infty} \Omega_v$ *thì hạt nhân Caratheodory* $\hat{\Omega}$ *tại p của dãy* $\{\Omega_v\}$ *là miền lớn nhất chứa p thỏa mãn tính chất: mỗi tập con compact của* $\hat{\Omega}$ *nằm trong tất cả các miền trừ ra một số hữu hạn các miền* Ω_v. *Nếu p không là điểm trong của* $\bigcap_{v=1}^{\infty} \Omega_v$ *thì nhân Caratheodory* $\hat{\Omega}$ *là* $\{p\}$. *Dãy* $\{\Omega_v\}$ *được gọi là hội tụ đến nhân của nó tại p nếu mọi dãy con của dãy* $\{\Omega_v\}$ *đều có cùng nhân tại p.*

II. NỘI DUNG BCHT
2. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 2.1 (Wong-Rosay) *Miền bất kỳ $\Omega \subset C^n$ có biên trơn lớp C^2, giả lồi chặt và có nhóm tự đẳng cấu không compact đều song chỉnh hình với hình cầu đơn vị trong C^n.*

II. NỘI DUNG BCHT
2. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 2.2 (Bedford-Pinchuk) *Giả sử $\Omega \subset C^n$ là một miền bị chặn với biên nhẵn, giả lồi và có kiểu hữu hạn. Giả sử rằng hạng của dạng Levi ít nhất bằng n – 2 tại mỗi điểm biên của miền Ω. Khi đó, nếu Aut(Ω) là không compact thì Ω song chỉnh hình với miền:*

$$E_m = \{(z_1, \ldots., z_n) \in C^n : |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + \ldots.. + |z_n|^2 < 1\}$$

với số nguyên m ≥1 nào đó.

II. NỘI DUNG BCHT
2. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 2.3 (F. Berteloot) *Giả sử Ω là một miền trong C^n và cho điểm biên $p_\infty \in \partial\Omega$. Giả sử rằng tồn tại dãy $\{\varphi_p\} \subset Aut(\Omega)$ và một điểm $a \in \Omega$ sao cho $\lim \varphi_p(a) = p_\infty$. Nếu $\partial\Omega$ nhẵn, giả lồi và có kiểu hữu hạn trong lân cận nào đó của điểm p_∞ thì Ω song chỉnh hình với miền*

$$D = \{(w, z) \in C^2 : Rew + H(z, \overline{z}) < 0\},$$

trong đó H là một đa thức thuần nhất đa điều hòa dưới trên C với bậc 2m ($\tau(\partial\Omega, p_\infty) = 2m$).

II. NỘI DUNG BCHT
2. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 2.4 [33] *Giả sử Ω là một miền trong C^n và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên. Giả sử rằng*

(a) *$\partial\Omega$ là nhẵn, giả lồi trong một lân cận nào đó của điểm $p_\infty \in \partial\Omega$ và có kiểu 2m tại p_∞,*

(b) *Hạng của dạng Levi ít nhất bằng n – 2 tại p_∞,*

(c) *Tồn tại dãy $\{\varphi_n\}$ thuộc Aut(Ω) sao cho limφ_p(a) = p_∞ với điểm nào đó a $\in \Omega$,*

Khi đó, Ω song chỉnh hình với miền có dạng sau

$$M_H = \{(\mathrm{w}_1, \dots, \mathrm{w}_n) \in \mathrm{C}^n : \mathrm{Re}\, w_n + H(\mathrm{w}_1, \bar{\mathrm{w}}_1) + |\mathrm{w}_2|^2 + \dots + |\mathrm{w}_{n-1}|^2 < 0\}$$

trong đó H là một đa thức thuần nhất điều hòa dưới trên C.

II. NỘI DUNG BCHT
2. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 2.5 (H. Gaussier) *Giả sử Ω là một miền trong C^n và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên. Giả sử rằng p_∞ là điểm tụ quỹ đạo của miền Ω. Khi đó, nếu biên $\partial\Omega$ là nhẵn, lồi trong một lân cận của p_∞ và có kiểu 2m tại p_∞ thì Ω song chỉnh hình với miền sau đây*

$$D = \{(z_1, z') \in C^n : \operatorname{Re} z_1 + P(z') < 0\}$$

Trong đó P là một đa thức lồi không suy biến với bậc $\leq 2m$.

II. NỘI DUNG BCHT
2. MỘT SỐ KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU KINH ĐIỂN

Định lý 2.6 [35] *Giả sử Ω là một miền trong C^n và $p_\infty \in \partial\Omega$ là một điểm biên tụ quỹ đạo của Ω. Khi đó, nếu $\partial\Omega$ nhẵn, lồi tuyến tính địa phương trong một lân cận của $p_\propto$ và có kiểu hữu hạn 2m tại điểm p_∞ thì Ω song chỉnh hình với miền sau*

$$D = \{z \in C^n : \mathrm{Re}\, z_1 + P(z') < 0\}$$

Trong đó P là một đa thức không suy biến đa điều hòa dưới bậc nhỏ hơn hoặc bằng 2m.

TRÂN TRỌNG CẢM ƠN!

TRAO ĐỔI & THẢO LUẬN