BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ỨNG DỤNG SAI PHÂN ĐỂ TÌM SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ

Người báo cáo: Th.s Đào Xuân Hưng

Hà nội, 5/2020

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

ỨNG DỤNG SAI PHÂN ĐỂ TÌM SỐ HẠNG TỔNG QUÁT CỦA DÃY SỐ

Xác nhận của Bộ Môn

Hà nội, 5/2020

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Lý thuyết định tính của hệ động lực rời rạc đã được nghiên cứu từ những năm đầu thế kỷ XVIII, song ngày nay nó vẫn được đông đảo các nhà khoa học quan tâm và nghiên cứu. Những kết quả cơ bản của nó được ứng dụng rộng rãi trong nhiều mô hình ứng dụng. Đặc biệt trong thời gian gần đây nhờ có sự phát triển của công nghệ tin học, lý thuyết hệ động lực rời rạc nói chung và lý thuyết định tính của các phương trình sai phân nói riêng đã có sự phát triển vượt bậc đặc biệt là khả năng ứng dụng thực tiễn của nó.

Về tổng thể hầu hết các phương pháp thông dụng được sử dụng trong lý thuyết phương trình vi phân đều có thể xây dựng lại cho việc nghiên cứu tính chất nghiệm của các hệ phương trình sai phân. Tuy nhiên về lý thuyết tính toán và các biểu thức toán học trong một số công thức cơ bản lại khá phức tạp.

Mục tiêu cơ bản của báo cáo này là trình bày lại một cách hệ thống các khái niệm cơ bản về phép tính sai phân hữu hạn, chúng tôi cũng trình bày một cách vắn tắt lý thuyết phương trình sai phân cấp cao và phương trình sai phân tuyến tính cấp 2, đồng thời đưa ra các ví dụ ứng dung phương trình sai phân để tìm số hạng tổng quát của dãy số.

1 Sơ lược về phép tính sai phân hữu hạn

Định nghĩa 1.1. *Ta gọi sai phân hữu hạn cấp một của hàm số* $u(n) = u_n$ *với* $n \in \mathbb{Z}$ *là hiệu*

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n.$$

Định nghĩa 1.2. *Ta gọi sai phân hữu hạn cấp 2 của hàm* $u(n) = u_n$ *là sai phân của sai phân cấp 1 của* u_n*, và nói chung sai phân cấp k của hàm* u_n *là sai phân của sai phân cấp* $k-1$ *của hàm số đó.*

Sai phân cấp 2 của hàm u_n là

$$\Delta^2 u_n = \Delta(\Delta u_n) = \Delta u_{n+1} - \Delta u_n = u_{n+2} - u_{n+1} - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n;$$

Sai phân cấp 3 của hàm u_n là

$$\Delta^3 u_n = \Delta(\Delta^2 u_n) = \Delta^2 u_{n+1} - \Delta^2 u_n = u_{n+3} - 3u_{n+2} + 3u_{n+1} - u_n \ \ldots$$

Sai phân cấp k của hàm u_n là

$$\Delta^k u_n = \Delta(\Delta^{k-1} u_n) = \Delta^{k-1} u_{n+1} - \Delta^{k-1} u_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i u_{n+k-i}\,,$$

trong đó $C_k^i = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$.

Các tính chất của sai phân:

Tính chất 1*:* Sai phân các cấp đều được biểu diễn qua các giá trị của hàm số

$$\Delta^k u_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i u_{n+k-i}\ ,$$

trong đó $C_k^i = \dfrac{k!}{i!(k-i)!}$.

Tính chất 2: Sai phân mọi cấp đều là toán tử tuyến tính

$$\Delta^k(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \Delta^k u_n + \beta \Delta^k v_n\ ,$$

với α , β là các số thực tuỳ ý.

Tính chất 3*:* Sai phân cấp k của đa thức bậc m bằng:

* Hằng số, nếu $k = m$,

* 0, nếu $k > m$,

* Đa thức bậc $(m - k)$, nếu $k < m$.

Tính chất 4:

$$\Delta u_n v_n = u_n \Delta v_n + v_n \Delta u_n ,$$

$$\sum_{n=a}^{N} \Delta^k u_n = \Delta^{k-1} u_{N+1} - \Delta^{k-1} u_a ,$$

đặc biệt khi $k = 1$, ta có

$$\sum_{n=a}^{N} \Delta u_n = u_{N+1} - u_a \ .$$

2 .Phương trình sai phân cấp cao

Định nghĩa 1.3. *Phương trình sai phân cấp k là một hệ thức giữa sai phân các cấp*

$$F(u_n, \Delta u_n, ..., \Delta^k u_n) = 0 ,$$

trong đó u_n coi là sai phân cấp 0 của hàm u_n, cấp của phương trình sai phân chính là cấp lớn nhất của các sai phân (ở đây là bằng k).

Định nghĩa 1.4. *Phương trình sai phân tuyến tính cấp k của hàm u_n là một biểu thức tuyến tính giữa các giá trị của hàm u_n tại các điểm khác nhau*

$$a_0 u_{n+k} + a_1 u_{n+k-1} + ... + a_k u_n = f_n ,$$

trong đó $a_0, a_1, ..., a_k$ với $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$ là các hằng số hoặc các hàm số của n, được gọi là các hệ số của phương trình sai phân; f_n là một hàm số của n, được gọi là vế phải; u_n là giá trị cần tìm được gọi là ẩn.

**** Nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính:***

Xét phương trình sai phân tuyến tính cấp k

$$a_0u_{n+k} + a_1u_{n+k-1} + ... + a_ku_n = f_n. \tag{1.1}$$

Phương trình sai phân thuần nhất tương ứng

$$a_0u_{n+k} + a_1u_{n+k-1} + ... + a_ku_n = 0. \tag{1.2}$$

Phương trình đặc trưng

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + ... + a_k = 0. \tag{1.3}$$

Nghiệm tổng quát u_n của phương trình sai phân tuyến tính (1.1) là $u_n = u^* + \overline{u}$, với u^* là một nghiệm riêng của phương trình (1.1) và $\overline{u}$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng (1.2).

Nghiệm tổng quát của (1.2) có dạng

$$\overline{u} = c_1u_{n_1} + c_2u_{n_2} + ... + c_ku_{n_k},$$

trong đó $u_{n_1}, u_{n_2}, ..., u_{n_k}$ là k nghiệm độc lập tuyến tính của (1.2) và $c_1, c_2, ..., c_k$ là các hằng số tuỳ ý.

Nếu (1.3) có k nghiệm phân biệt $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ thì hệ $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_k^n\}$ là hệ k nghiệm độc lập tuyến tính của (1.2) và nghiệm tổng quát của (1.2) là

$$\overline{u} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + ... + c_k\lambda_k^n.$$

Nếu (1.3) có nghiệm thực λ_j bội s thì ngoài nghiệm λ_j^n ta bổ xung thêm các vectơ $n\lambda_j^n, n^2\lambda_j^n, ..., n^{s-1}\lambda_j^n$ cũng là các nghiệm độc lập tuyến tính của (1.2) và nghiệm tổng quát của (1.2) là

$$\bar{u} = \sum_{i \neq j=1}^{k} c_i \lambda_i^n + \sum_{i=0}^{s-1} c_j^i n^i \lambda_j^n .$$

Nếu (1.3) có nghiệm phức $\lambda_j = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ bội s thì ta lấy thêm các nghiệm $r^n n^i \cos n\varphi$, $r^n n^i \sin n\varphi$, $i = 0,...,s-1$ và nghiệm tổng quát của (1.2) là

$$\bar{u} = \sum_{i \neq j=1}^{k} c_i \lambda_i^n + \sum_{i=0}^{s-1} r^n (a_i n^i \cos n\varphi + b_i n^i \sin n\varphi),$$

trong đó a_i , b_i là các hằng số tuỳ ý.

3. ***Phương trình sai phân tuyến tính bậc hai***:

a. Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất bậc hai:

- Định nghĩa: Phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất bậc hai với hệ số hằng là phương trình dạng:

$$AX_{n+2} + BX_{n+1} + CX_n = 0 \text{ , n= 0, 1, 2,...} \qquad (1.1)$$

Trong đó A ≠ 0, B và C là những hằng số.

Nghiệm tổng quát:

- Nếu C=0 thì phương trình (1.1) có dạng

$$AX_{n+2} + BX_{n+1} = 0 \qquad (1.2)$$

Phương trình này là phương trình tuyến tính bậc nhất.

Nó có nghiệm tổng quát là $X_{n+1} = \lambda^n X_n$, $\lambda = -\frac{B}{A}$, n=1, 2,...

- Nếu B=0 thì phương trình (1.1) có dạng (khuyết B)

$$AX_{n+2} + BX_n = 0 \qquad (1.3)$$

Phương trình này về hình thức tương tự phương trình tuyến tính bậc nhất.

Nó có thể viết dưới dạng $X_{n+2} = -\frac{C}{A}.X_n = qX_n$.

Như vậy là ta có công thức nghiệm:

$$X_{2k} = q^k.X_o \text{ và } X_{2k+1} = q^k.X_1.$$

- Nếu phương trình (1.1) có các hệ số đều khác 0 thì ta có phương trình đặc trưng của phương trình sai phân (1.1) là :

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0$$

Phương trình trên sẽ có hai nghiệm là λ_1 và λ_2.

Để tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân (1.1) ta dựa vào các mệnh đề sau:

<u>Mệnh đề 1</u>:

Giả sử phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt ($\lambda_1 \neq \lambda_2$) khi ấy phương trình (1.1) có nghiệm là

$$X_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$$

Trong đó C_1 và C_2 là những hằng số được xác định và được xác định theo điều kiện ban đầu là X_0 và X_1.

<u>Ví dụ 1</u>:

Tìm công thức tổng quát của dãy số sau (tương đương với tìm nghiệm của phương trình sai phân)

$$U_0 = 7;\ U_1 = -6;\ U_{n+2} = 3U_{n+1} + 28U_n .$$

<u>Giải</u>:

Ta có: $U_{n+2} = 3U_{n+1} + 28U_n$.

Suy ra $U_{n+2} - 3U_{n+1} - 28U_n = 0$.

Nên ta có phương trình đặc trưng như sau: $\lambda^2 - 3\lambda - 28 = 0$.

Phương trình này có hai nghiệm là $\lambda_1 = 7$ và $\lambda_2 = -4$.

Suy ra công thức tổng quát của dãy số đã cho là:

$U_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$ hay $U_n = C_1.7^n + C_2.(-4)^n$. (*)

Với n=0 thì $U_0 = C_1 + C_2 = 7$ (1)

Với n=1 thì $U_1 = 7C_1 - 4C_2 = -6$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $C_1 = 2$ và $C_2 = 5$ (3)

Thay (3) vào (*) ta được công thức tổng quát của dãy số là:

$U_n = 2.7^n + 5.(-4)^n$.

<u>Mệnh đề 2</u>:

Nếu phương trình đặc trưng có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = -\frac{B}{A}$ thì nghiệm tổng quát của phương trình (1.1) là

$$X_n = C_1\lambda_1^n + C_2.n\lambda_2^n = (C_1 + n.C_2).\lambda^n.$$

Trong đó C_1 và C_2 là những hằng số được xác định theo điều kiện ban đầu là X_0 và X_1.

<u>Ví dụ 2</u>:

Tìm nghiệm của phương trình sai phân:

$U_0 = -1$; $U_1 = 2$; $U_{n+2} = 10U_{n+1} - 25U_n$.

<u>Giải</u>:

Ta có : $U_{n+2} = 10U_{n+1} - 25U_n$ suy ra $U_{n+2} - 10U_{n+1} + 25U_n$.

Do đó ta có phương trình đặc trưng như sau: $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$

Phương trình có nghiệm kép là $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 5$

Nên phương trình sai phân đã cho có nghiệm tổng quát có dạng:

$U_n = \lambda^n.(C_1 + n.C_2)$ (*)

Với n = 0 thì $U_0 = C_1 + C_2 = -1$ (1)

Với n = 1 thì $U_1 = 5^1(C_1 + 1.C_2) = 2$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $C_1 = -1$ và $C_2 = 1,4$ (3)

Thay (3) vào (*) ta được công thức nghiệm tổng quát của phương trình sai phân là :

$U_n = 5^n.(-1 + 1,4.n)$

b. Phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất bậc hai:

- *Định nghĩa*: Phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất bậc hai là phương trình dạng : $AX_{n+2} + BX_{n+1} + CX_n = D_n$, n = 0, 1, 2,..... (1.2)

Trong đó $A \neq 0$,B và C là những hằng số;D_n là hàm số của biến số tự nhiên n

- *Nghiệm tổng quát*:

Nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất bậc hai (1.2) là tổng của nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (1.1) và nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất (1.2) $X_n = \tilde{x}_n + x^*_n$.

Với $\tilde{x}_n$ là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất (1.1) và x^*_n là nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất (1.2) .

Ta tính $\tilde{x}_n$ theo 3 mệnh đề ở trên.

Còn tính x^*_n theo 1 trong 3 cách sau:

- Nếu $A + B + C \neq 0$ thì $x^*_n = \dfrac{D}{A+B+C}$.

- Nếu $A + B + C = 0$ và $2A + B \neq 0$ thì $x^*_n = \dfrac{n.D}{2A+B}$

- Nếu $A + B + C = 0$ và $2A + B = 0$ thì $x^*_n = n(n-1)\dfrac{D}{2A}$.

Ví dụ 3: (Thi Olympic Toán Singapore, 2001).

Cho $a_1 = 2000$; $a_2 = 2001$ và $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3$ với n = 1, 2, 3,...

Hãy tìm giá trị của a_{100}.

Giải:

Phương trình đặc trưng của phương trình đã cho là : $\lambda^2 = 2\lambda$ -1 có nghiệm kép là $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 1$ và A+ B + C = 1- 2 + 1 = 0; 2A + B = 2.1 - 2 =0.

Suy ra nghiệm tổng quát của phương trình sai phân đã cho là:

$a_n = 1^n.(C_1 + n.C_2) + n(n-1)\frac{D}{2A}$ hay $a_n = C_1 + n.C_2 + n(n-1).1,5$. (*)

Với n = 1 thì $a_1 = C_1 + C_2 = 2000$. (1)

Với n = 2 thì $a_2 = C_1 + 2.C_2 + 3 = 2001$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $C_1 = 2002$ và $C_2 = -2$. (3)

Thay (3) vào (*) ta được

$a_n = 1,5.n(n-1) - 2n + 2002 = 1,5.n^2 – 3,5.n + 2002$ (**)

Thay n = 100 vào (**) ta được $a_{100} = 16652$.

KẾT LUẬN

Trong báo cáo này chúng tôi đã trình bày một cách hệ thống các khái niệm cơ bản của phương trình sai phân cấp cao, đặc biệt là phương trình sai phân tuyến tính cấp hai, đồng thời chúng tôi của đưa ra các ví dụ ứng dụng phương trình sai phân để tìm số hạng tổng quát của dãy số. Báo cáo này rất hữu ích cho sinh viên năm nhất, năm hai và đặc biệt là sinh viên tham gia các kì thi Olympic.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] B.P. Đêmiđôvich (1967), Bài giảng về lý thuyết ổn định toán học (dịch từ tập tiếng Nga), NXB Khoa học Maxcơva.

[2] Lê Đình Thịnh, Đặng Đình Châu, Lê Đình Định, Phan Văn Hạp(2001), Phương trình sai phân và một số ứng dụng, NXB Giáo dục.

[3] Billur Kaymakcalan (1992), Lyapunov stability theory for Dynamic systems on the time scales J. Appl.Math and Stochastic Analysis 275-282.

[4] G.Eleutheriadis, M.Boudourides (1998) On the problem of asymptotic equivalence of ordinary differential equation, Ital, J.Puer Appl Math 4, 61-72.

[5] J.K. Hale and S.M.V. Lunel, (1993) Introduction to Functional Differential Equations, Springer-Verlag New York Berlin London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona Budapest

[6] J.Kato (1996), The asymptotic equivalence of functional differential equa-tions, J. differential Equat.1,3, 306-332.

[7] K.L. Coppel (1965) Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations , D.C Heath and Company Boston Publisher.

[8] K.L. Cooke (1967), Asymptotic theory for the delay-differential equations J.Math.Analysis and Appl 160-173.

[9] Nguyễn Thế Hoàn (1975) Asymptotic equivalence of systems of differential equations, IZV Acad Nauk ASSR Number 2, 35-40 (Russian).

[10] N.Levinson, The asymptotic behavior of systems of linear differental equations Amer.J.Math, 63 (1946), 1-6.

[11] R.P. Agarwal (1992), difference equations and inequalities, Marcel Dekker Inc , New York.

[12] Vũ Ngọc Phát (2001), Nhập môn lý thuyết điều khiển toán học, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.