BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

PHƯƠNG TRÌNH HÀM
(Phần II)

Người báo cáo: Th.s Đào Xuân Hưng

Hà nội, 5/2020

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

PHƯƠNG TRÌNH HÀM

(Phần II)

Xác nhận của Bộ Môn

Hà nội, 5/2020

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Phương trình hàm là dạng toán thường gặp trong các đề thi chọn học sinh giỏi và các kỳ Olympic Toán sinh viên. Đây là một dạng toán khó, không có phương pháp giải chung cho một nhóm các bài riêng biệt. Để giải các bài toán về phương trình hàm, đòi hỏi người làm phải có kiến thức sâu, rộng và cần có tư duy sáng tạo, linh hoạt. Trong báo cáo này, tôi sẽ đưa ra các khái niệm cơ bản về phương trình hàm và hướng dẫn sinh viên giải một số bài tập cụ thể. Mục đích của báo cáo này giúp sinh viên có kiến thức để giải được các bài toán tương đối phức tạp đặt ra trong môn học chuyên nghành và đặc biệt nó rất hữu ích cho các bạn sinh viên tham gia kì thi Olympic Toán học.

.

PHƯƠNG TRÌNH HÀM

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1.1. Ánh xạ và hàm số

- Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một và chỉ một phần tử y của Y. Phần tử y tương ứng của x gọi là ảnh của ánh xạ f, kí hiệu $y = f(x)$, x gọi là nghịch ảnh của y:

$$f : X \to : x \mapsto y = f\left(x\right)$$

- Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là đơn ánh nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều cho hai ảnh khác nhau của Y: $\forall a, b \in X : a \neq b \Rightarrow f\left(a\right) \neq f\left(b\right)$

Hay $\forall a,b \in X : f\left(a\right) = f\left(b\right) \Rightarrow a = b$

- Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là toàn ánh nếu mỗi phần tử Y bất kỳ của Y đều có nghịch ảnh x của X:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f\left(x\right)$$

Hay $Y = f\left(x\right) = \left\{ y \in Y \mid \exists \in X, y = f\left(x\right) \right\}$.

- Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là song ánh nếu f vừa đơn ánh và toàn ánh, tức là nếu mỗi phân tử y bất kỳ của Y đều có nghịch ảnh duy nhất x của X.

Hai tập hữu hạn có cùng số phần tử khi tồn tại một song ánh giữa chúng. Còn 2 tập vô hạn mà có song ánh giữa chúng thì gọi là cùng lực lượng hay cùng bản số.

- Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu:

$\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f\left(-x\right) = f\left(x\right)$

- Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu:

$\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f\left(-x\right) = -f\left(x\right)$

- Hàm số tuần hoàn: $\begin{cases} \exists a \neq 0 \\ f(x+a) = f(x), \forall x, x+a \in D \end{cases}$

Số dương bé nhất nếu có trong các số a thỏa mãn điều kiện trên gọi là chu kỳ T của

hàm số f.

- Hàm phản tuần hoàn : $\begin{cases} \exists a \neq 0 \\ f(x+b) = -f(x), \forall x, x+b \in D \end{cases}$

- Hàm cộng tính: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

- Hàm nhân tính: $f(xy) = f(x).f(y)$

- Điểm bất đồng của hàm f(x) là x = a sao cho f(x) = a

- Nếu hàm số f(x) có $f'(x) = 0$ trên D thì f(x) là hàm hằng trên D.

1.2. Đặc trưng hàm sơ cấp:

- Hàm bậc nhất $f(x) = ax + b, a \neq 0 : f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$

- Hàm tuyến tính $f(x) = ax,\ a \neq 0 : f(x+y) = f(x)\ .\ f(y)$

- Hàm mũ $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1 : f(x+y) = f(x) + f(y)$

- Hàm lôgarit $f(x) = \log_a |x|, a > 0, a \neq 1 : f(xy) = f(x) + f(y)$

- Hàm $\sin f(x) = \sin : f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x)$

- Hàm $\text{cosin}\, f(x) = \cos x : f(2x) = 2f^2(x) - 1$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

- Hàm $\text{tang}\, f(x) = \tan x : f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1 - f(x)f(y)}$

- Hàm $\text{cotang}\, f(x) = \cot x : f(x+y) = \frac{f(x)f(y) - 1}{f(x)+f(y)}$

- Hàm $f\left(x\right)=\text{sh}x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}: f\left(3x\right)=3f\left(x\right)+4f^{3}\left(x\right)$

- Hàm $f\left(x\right)=\text{ch}x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{3}: f\left(x+y\right)+f\left(x-y\right)=2f\left(x\right)f\left(y\right)$

1.3. Phương trình hàm

- Tính giá trị đặc biệt f(0), f(1),...

- Dùng phép thế, đổi biến, các chuyển đổi số học, đại lượng trung bình, biến đổi tịnh tiến và đồng dạng, biến đổi phân tuyến tính,...

- Dùng tính chất đơn ánh, toàn ánh, song án, tuần hoàn,..

- Đánh giá, dự đoán hàm số, quy nạp,...

Phương trình hàm Cauchy: Hàm f(x) xác định và liên tục trên **R** thỏa mãn:

$f\left(x+y\right)=f\left(x\right)+f\left(y\right),\forall x,y\in\mathbb{R}$ thì $f\left(x\right)=ax$ với a hằng số tùy ý.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 16. Hàm số f xác định trên tập các số tự nhiên N và có giá trị trên đó. Chứng minh rằng đẳng thức $f\left(f\left(n\right)\right) = n+1995$ không thể nghiệm đúng với mọi $n \in N$.

Hướng dẫn giải

Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng Giả sử rằng ta có đẳng thức

$f\left(f\left(n\right)\right) = n + 1995$ đúng $\forall n\in N$. Khi đó:

$f\left(n + 1995\right) = f\left(f\left(f\left(n\right)\right)\right) = f\left(n\right) + 1995$

Và suy ra: $f\left(n + 1995k\right) = f\left(n\right) + 1995k$ (1) đúng $\forall n,k\in N$

Xét số nguyên r bất kì: $0\le r\le 1994$ và chia f(r) cho 1995 có số dư

$f(r) = 1995p + q$ với $0\le q\le 1994$

Theo giả thiết: $f(f(r)) = r + 1995$

Từ (1): $f(f(r)) = f(q + 1995p) = f(q) + 1995p$

Vì $r\le 1994$ nên chỉ có thể có hai khả năng (i): $p = 0 \Rightarrow f(r) = q$ và $f(q) = r + 1995$

(ii): $p = 1 \Rightarrow f(r) = q + 1995$ và $f(r) \neq f(q)$ nghĩa là $r \neq q$

Như vậy các số $0, 1,2,...,1994$ có thể chia thành các cặp (a, b) sao cho

trong mỗi cặp $f(a) = b$ và $f(b) = a + 1995$. Đó là điều vô lí vì từ 0 đến 1994 có một số lẻ số.

Bài toán 17. Cho hàm số f(x) xác định và liên tục trên [0, 1] sao cho:

(i) $f(0) = f(1) = 0$

(ii) $2f(x) + f(y) = 3\left(\frac{2x+y}{3}\right)$ với mọi $x, y \in [0, 1]$

Chứng minh rằng $f(x) = 0$ với mọi $x, y \in [0, 1]$

Hướng dẫn giải

Bằng quy nạp theo n ta sẽ chứng minh rằng $f\left(\frac{m}{3^n}\right) = 0$ với mọi số nguyên

$n \geq 0$

và với mọi m thoả mãn $0 \leq m \leq 3^n$. Các điều kiện ở đề bài chứng tỏ điều này đúng với

$n = 0$. Giả sử điều này đúng với $n = k - 1 > 0$, ta chứng minh nó đúng với $n = k$.

Nếu $m = 3 \pmod 3$ thì theo giả thiết quy nạp ta có: $f\left(\frac{m}{3^k}\right) = f\left(\frac{m/3}{3^{k-1}}\right) = 0$

Nếu $m = 1 \pmod 3$ thì $1 \leq m = 3^k - 2$ và

$$3f\left(\frac{m}{3^k}\right) = 2f\left(\frac{(m-1)/3}{3^{k-1}}\right) + f\left(\frac{(m+2)/3}{3^{k-1}}\right) = 0 + 0 = 0$$

Cuối cùng, nếu $m = 2 \pmod 3$ thì $2 \leq m \leq 3^k - 1$ và

$$3f\left(\frac{m}{3^k}\right) = f\left(\frac{(m-2)/3}{3^{k-1}}\right) + 2f\left(\frac{(m+1)/3}{3^{k-1}}\right)$$

Vậy $f\left(\frac{m}{3^k}\right)=0$ với mọi số nguyên $n,m\geq 0$ và $m=3^n$

Với mọi $x\in[0,1]$, ta có thể lập nên một dãy số có dạng $\frac{m}{3^k}$ có giới hạn x. Vì hàm f(x) liên tục nên suy ra $f(x)=0$ với mọi $x\in[0,1]$ ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 18. Hàm số f(x) xác định và có đạo hàm trên $[0,+\infty]$. Biết rằng với mọi $x\geq 0$ luôn có:

1) $\left[f(x)\right]\leq 5$

2) $f(x).f'(x) > \sin x$. Tồn tại hay không $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Hướng dẫn giải

Đặt $F(x)=f^2(x)+2\cos x$ xác định trên $[0,+\infty]$

(1) $\Rightarrow$ $|F(x)|\leq f^2(x) + 2|\cos x| \leq 5^2 + 2$

(2) $\Rightarrow F'(x)=2f'(x).f(x)-2\sin x\geq 0$ nên F(x) tang

Xét dãy số $\{x^n\} = [2\pi, 2\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi, 4\pi + \frac{\pi}{2}, 6\pi, 6\pi + \frac{\pi}{2} ...]$

Thì $x_n>0$, x_n tăng và $x_n\to+\infty$ khi $x_n\to+\infty$

Đặt $U_n = f(x_n)$ thì U_n là dãy số tăng và bj chặn trên, nên tồn tại $\lim U_n$

Giả sử rằng tồn tại limf(x) khi $x_n\to+\infty$ thì tồn tại V_n

$$\lim_{x\to\infty}\left(F(x_n)-F^2(x_n)\right)=\lim_{x\to\infty}U_n-\left(\lim_{x\to\infty}F(x_n)\right)^2$$

Như thế tồn tại limcosx khi $n\to+\infty$, điều này không thể được vì:

$2\cos x_n = \{2, 0, 2, 0,...\}$ là dãy số không có giới hạn.

Vậy không tồn tại limf(x) khi $x_n\to+\infty$.

Bài toán 19. Tìm hàm f xác định trên tập các số nguyên dương và cũng nhận giá trị nguyên dương thoả mãn: $f(n + 1) > f(f(n)), \forall n \in N^*$

Hướng dẫn giải

Trước tiên ta sẽ chứng minh qui nạp: $f(1) < f(2) < f(3)...$

Gọi S_n là phát biểu sau: nếu $r \le n$ và $m > r$ thì $f(r) < f(\mathrm{m})$

Vì khi $m > 1$thì $(m) > f(s),$ với $s = f(m - 1)$, nên f(m) không thể là phần tử nhỏ nhất của tập $\{f(1), f(2), f(3),...\}$

Nhưng tập này bị chặn dưới bởi 0, nên chắc chắn nó phải có phần tử bé , nhất. Suy ra phần tử này là f(1). Vậy S_1 đúng.

Giả sử S_n đúng. Lấy $m > n + 1$, khi đó $m - 1 > n$, do đó ta có $f(m - 1) > f(n)$

(vì S_n đúng). Nhưng cũng từ S_n ta có: $f(n) > f(n - 1) > ... > f(1)$, do vậy, ta được

$f(n) \ge n - 1 + f(1) \ge n$. Suy ra $f(m - 1) > n + 1$ từ đó $f(m) > f(n + 1)$. Từ đây suy ra rằng S_{n+1} đúng.

Vậy S_nđúng với mọi n. Nói cách khác, nếu $n \le m$ thì $f(n) < f(m)$.

Giả sử với số m nào đó ta có $f(m) \ge m + 1$, thế thì: $f(f(m)) > f(m + 1)$ iều này mâu thuẫn. Suy ra $f(m) \le m$ với mọi m. Nhưng do ta có $f(1) \ge 1$và $f\left(m\right) > f(m - 1) > ... > f(1)$ nên $f\left(m\right) \ge m$ với mọi m. Suy ra $f\left(m\right) = m$với mọi

m.

Bài toán 20. Cho tập hợp T gồm tất cả các số tự nhiên không vượt quá 1999. Hãy tìm tất cả hàm số f xác định trên N, lấy giá trị trên T và thoả mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $f(t) = t$ với mọi $t \in T$

ii) $f(m + n) = f(f(m) + f(n))$ với mọi $m, n \in N$

Hướng dẫn giải

Đặt $f(2000) = a,\ b = 2000 - a$, với $1 \le b \le 2000$

Ta nhận xét:

1) Với mọi r mà $0 \le r < b,$ ta có: f(2000 + r) = a + r

2) Với mọi $k \in N, 0 \le r \le b$, ta có: $f(2000 + kb + r) = a + r$

Từ đó suy ra nếu f là hàm số cần tìm thì thoả mãn:

$$\begin{cases} (t) = t \\ f(2000) = a \\ f(2000 + m) = a + r \end{cases} \quad \text{với mọi } t \in T \ (*)$$

Với $r = m \pmod{(2000 - a)}$ và $0 \le r \le 2000 - a$

Ngược lại cho $a \in T$, xét hàm số f xác định trên N thoả (*) thì để ý:

$f(n + b) = f(n)$ với mọi $n \ge a, b = 2000 - a$

$n = f(n) \pmod{b}$ với mọi $n \in N$

Vậy tất cả các hàm số thoả mãn đề bài được xác định theo công thức (*) với mỗi $a \in T$ cho trước. Vậy có 2000 hàm số.

Bài toán 21. Xác định tất cả các hàm f: $N^* \to N^*$ hoả mãn điều kiện:

$f(n) + f(n + 1) = f(n + 2) f(n + 3) - 1996$ với mọi $n \in N^*$

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết ta có: $(k) + f(k + 1) = f(k + 2) f(k + 3) - 1996$

Và $f(k + 1) + f(k + 2) = f(k+3)\ f(k+4) - 1996$.

Do đó với mọi $k \in N$ thì $f(k + 2) - f(k) = f(k + 3)[f(k + 4) - f(k + 2)]$

Suy ra rằng:

$f(3) - f(1) = f(4) f(6) ... f(2k)[(f(2k + 1) - f(2k - 1)]$ (1)

$f(4) - f(2) = f(5) f(7) ... f(2k + 1)[(f(2k + 2) - f(2k)$ (2)

Nếu $f(3) - f(1) \ne 0$ và $f(4) - f(2) \ne 0$ thì hai đẳng thức trên dẫn đến mâu thuẫn. Do đó xảy ra các trường hợp sau:

1) $f(3) - f(1) \ne 0$ và $f(4) - f(2) = 0$

Từ (2) có $f(2k + 2) = f(2k) = c \ne 0$ với mọi k.

Nên (2) dẫn tới $|f(3) - f(1) I = ck\_11 f(2k+1) - f(2k-1)| \geq c^{k-1}$ với mọi k. Như vậy ta phải có $c = 1$.

Từ đó (1) trở thành $f(3) - f(1) = f(2k+1) - f(2k-1)$ nên dãy $(f(2k+1))$

là cấp số cộng với công sái d. Như thế với mọi k ta có:

$f(2k) = 1, f(2k-1) = f(1) + (k-1)d.$

Từ giả thiết cho $n=1$ ta có

$f(1) + f(2) = f(3)f(4) - 1996 => f(1) + 1 = (f(1) + d) - 1996$

$\Rightarrow d = 1997$. Vậy ta có: $f(n)=\begin{cases} 1 \text{ khi } n=2k \\ a + (k-1)1997 \text{ khi } n = 2k-1 \end{cases}$ a là số nguyên dương tùy ý.

2) $f(3) - f(1) = 0, f(4) - f(2) \neq 0$. Lập luận như trên ta có kết quả:

$f(n)=\begin{cases} 1 \text{ khi } n=2k-1 \\ a + (k-1)1997 \text{ khi } n = 2k \end{cases}$ với a là sô nguyên dương tùy ý.

3) $f(3) - f(1) = 0, f(4) - f(2) = 0$

Khi đó $f(2k) = a, f(2k-1) = b$ với mọi $k \in N*$ và a, b nguyên dương tùy ý.

Với $n = 1$ ta có:

$f(1) + f(2) = f(3)f(4) - 1996 \Rightarrow b + a = ab - 1996$

$\Rightarrow (a-1)(b-1) = 1997$

Vì 1997 là số nguyên tố nên hoặc $a = 2, b = 1998$ hoặc a = 1998, b = 2. Ta có hai hàm số thỏa mãn yêu cầu bài toán là:

$f(n)\begin{cases} 2 \text{ khi } n = 2k \\ 1998 \text{ khi } n = 2k-1 \end{cases}$ và $f(n)=\begin{cases} 2 \text{ khi } n = 2k-1 \\ 1998 \text{ khi } n = 2k \end{cases}$

Bài toán 22.Tìm tất cả các hàm f: $N* \to N*$ thoả mãn

i) $f(x+22) = f(x)$ với mọi $x \in N*$

ii) $f(x^2 y) = (f(x))^2$ với mọi $x, y \in N*$

Hướng dẫn giải

Ta chỉ cần xác định giá trị hàm số tại $x \in \{1, 2, 3,..., 22\}$

Cho $x = y = 1$ ta tính được $f(1) = 1$

Với mỗi x nguyên $(2 \le x \le 21)$ luôn có $k \in N^*$ sao cho $1 + 22k \vdots x$

Suy ra với x như trên ta có

$1 + 22k = mx => mx^2 = x + 22kx$ với k là số tự nhiên.

Từ đó: $f(x) = f(x + 22kx) = f(x^2 m) = (f(x))^2 f(m) => f(x)f(m) = 1$

$\Rightarrow f(x) = 1$. Ta tính f(11) và f(22)

Ta có $f(22) = f(44) = f(2^2.11) = (f(2))^2 . f(11) = f(11) = 1$

Mặt khác $f(11^2.2) = (f(11))^2 . f(2) = (f(11))^2$

Và $f(11^2.2) = f(22 + 10.22) = f(22) = f(11)$

Vậy: $f(x) = 1$ với mọi $x \in N$

Bài toán 23. Tồn tại hay không hàm số f: $N^* \to N^*$ thoả mãn điều kiện:

$f\left(f\left(n\right)\right) + 3n = 2f\left(n\right)$ với mọi $x \in N^*$

Hướng dẫn giải

Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với mỗi $a \in N^*$, xây dựng dãy số $\left(a_n\right)$ như sau:

$a_1 = a, a_{n+i} = f(a_n), n = 1, 2, 3..$

Từ giả thiết ta có:

$$a_{n+1} = f(a_n) = f(a_{n-1}) = f(a_{n-1}) - 3a_{n-1} \Rightarrow a_{n+1} = 2a_n - 3a_{n-1}$$

Từ đó chứng minh được $a_{n+1} + 4a_{n-2} + 3a_{n-3} = 0$ với mọi $n \ge 4$

Do $a_n > 0$ nên đẳng thức trên không thể xảy ra.

Vậy không tồn tại hàm số f.

Bài toán 24. Tìm tất cả các hàm $f : Z \to Z$ thoả mãn điều kiện

$$3f(n) - 2f(f(n)) = n, \forall n, \in Z$$

Hướng dẫn giải

Viết lại phương trình hàm ban đầu $2f(f(n)-2f(n) = f(n) - n$

Đặt $g(n) = f(n) - n$ ta có $g(n) = 2g(f(n)), \forall n \in Z.$

Ta có: $g(n) = 2g(f(n)) = 2^2 g(f(f(n)) = 2^3 g(f(f(f(n)))) = ...$

Suy ra rằng $|g(n)|$ chia hết cho 2^k với mọi số tự nhiên k. Điều này chỉ xảy ra khi

$g(n) = 0 \Rightarrow f(n) = n$. Thử lại đúng.

Vậy $f(n) = n, \forall n \in Z.$

Bài toán 25. Tìm tất cả các hàm số $f: Z \to Z$ thỏa mãn:

i) $f(f(m) - n) = f(m^2) + f(n) - 2nf(m), \forall m, n \in Z$

ii) $f(1) > 0.$

Hướng dẫn giải

Cho $n = 0$ ta có $f(f(m)) = f(m^2) + f(0)$

Thay n bởi f(m) ta có:

$f(0) = f(m^2) + f(f(m) - 2(f(m))^2 = 2f(m^2) + f(0) - 2(f(m))^2$

Từ đó ta có: $f(m^2) = (f(m))^2, \forall m \in Z$

Suy ra $f(0) = (f(f(0))^2 \Rightarrow f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1$

Giả sử $f(0) = 1$. Cho $m = 0$ thì $f(f(0)) = 2f(0)$ nên $f(1) = 2$

Cho $m = 1$ thì $f(1) = f^2(1) = 4$: vô lý nên $f(0) = 0$

Thay $m = 0$ vào hệ thức đầu bài ta có $f(-n) = f(n), \forall n \in Z$

Thay $m = 1$ vào hệ thức ở đầu bài ta có: $f(1 - n) = 1 + f(n) - 2n$

Hay $f(n - 1) = 1 + f(n) - 2n \Rightarrow f(n) - f(n - 1) = 2n - 1$

Từ đó với mọi $n > 0$ ta có

$f(n) = f(n) - f(n - 1) + f(n - 1) - f(n - 2) + ... + f(1) - f(0) + f(0)$

$= (2n - 1) + (2n - 3) + ... + 3 + 1 = n^2$

Do đó $f(n) = n^2, \forall n \in Z$. Thử lại đúng. Vậy $f(n) = n^2, \forall n \in Z$

KẾT LUẬN

Trong báo cáo này, tiếp theo báo cáo học kì I, tôi tóm tắt lại một số kiến thức cơ bản về phương trình hàm và đưa thêm nhiều dạng bài mới. Với các kiến thức đưa thêm trong báo cáo này, giúp cho toàn bộ lý thuyết về phương trình hàm trở nên hoàn thiện hơn, các dạng bài tập phong phú và đầy đủ hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Tài Chung, Lê Hoành Phó; Chuyên khảo phương trình hàm; Đại Học Quốc Gia Hà Nội

[2]. Nguyễn Tài Chung; Bồi dưỡng phương trình hàm; Đại Học Quốc Gia Hà Nội

[3]. J. Aczei; Lectures on FUNCTIONAL EQUATIONS and Their APPLICATIONS.