BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

PHƯƠNG TRÌNH HÀM
(Phần 1)

Người báo cáo: Th.s Đào Xuân Hưng

Hà nội, 1/2020

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

Phương trình hàm là dạng toán thường gặp trong các đề thi chọn học sinh giỏi và các kỳ Olympic Toán sinh viên. Đây là một dạng toán khó, không có phương pháp giải chung cho một nhóm các bài riêng biệt. Để giải các bài toán về phương trình hàm, đòi hỏi người làm phải có kiến thức sâu, rộng và cần có tư duy sáng tạo, linh hoạt. Trong báo cáo này, tôi sẽ đưa ra các khái niệm cơ bản về phương trình hàm và hướng dẫn sinh viên giải một số bài tập cụ thể. Mục đích của báo cáo này giúp sinh viên có kiến thức để giải được các bài toán tương đối phức tạp đặt ra trong môn học chuyên nghành và đặc biệt nó rất hữu ích cho các bạn sinh viên tham gia kì thi Olympic Toán học.

.

PHƯƠNG TRÌNH HÀM

1. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1.1. Ánh xạ và hàm số

- Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y là một quy tắc đặt tương ứng mỗi phần tử x của X với một và chỉ một phần tử y của Y. Phần tử y tương ứng của x gọi là ảnh của ánh xạ f, kí hiệu $y = f(x)$, x gọi là nghịch ảnh của y:

$$f : X \to : x \mapsto y = f(x)$$

- Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là đơn ánh nếu hai phần tử khác nhau bất kỳ của X đều cho hai ảnh khác nhau của Y: $\forall a,b \in X : a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$

Hay $\forall a,b \in X : f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

- Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là toàn ánh nếu mỗi phần tử Y bất kỳ của Y đều có nghịch ảnh x của X:

$$\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$$

Hay $Y = f(x) = \{y \in Y \mid \exists \in X, y = f(x)\}$.

- Một ánh xạ f từ tập X đến tập Y gọi là song ánh nếu f vừa đơn ánh và toàn ánh, tức là nếu mỗi phân tử y bất kỳ của Y đều có nghịch ảnh duy nhất x của X.

Hai tập hữu hạn có cùng số phần tử khi tồn tại một song ánh giữa chúng. Còn 2 tập vô hạn mà có song ánh giữa chúng thì gọi là cùng lực lượng hay cùng bản số.

- Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu:

$\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$

- Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu:

$\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$

- Hàm số tuần hoàn: $\begin{cases} \exists a \neq 0 \\ f(x+a) = f(x), \forall x, x+a \in D \end{cases}$

Số dương bé nhất nếu có trong các số a thỏa mãn điều kiện trên gọi là chu kỳ T của

hàm số f.

- Hàm phản tuần hoàn : $\begin{cases} \exists a \neq 0 \\ f(x+b) = -f(x), \forall x, x+b \in D \end{cases}$

- Hàm cộng tính: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

- Hàm nhân tính: $f(xy) = f(x).f(y)$

- Điểm bất đồng của hàm f(x) là x = a sao cho f(x) = a

- Nếu hàm số f(x) có $f'(x) = 0$ trên D thì f(x) là hàm hằng trên D.

1.2. Đặc trưng hàm sơ cấp:

- Hàm bậc nhất $f(x) = ax + b, a \neq 0 : f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$

- Hàm tuyến tính $f(x) = ax, a \neq 0 : f(x+y) = f(x)\ .\ f(y)$

- Hàm mũ $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1 : f(x+y) = f(x) + f(y)$

- Hàm lôgarit $f(x) = \log_a |x|, a > 0, a \neq 1 : f(xy) = f(x) + f(y)$

- Hàm $\sin f(x) = \sin : f(3x) = 3f(x) - 4f^3(x)$

- Hàm $\text{cosin} f(x) = \cos x : f(2x) = 2f^2(x) - 1$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

- Hàm $\text{tang} f(x) = \tan x : f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$

- Hàm $\text{cotang} f(x) = \cot x : f(x+y) = \frac{f(x)f(y) - 1}{f(x) + f(y)}$

- Hàm $f(x) = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} : f(3x) = 3f(x) + 4f^3(x)$

- Hàm $f(x) = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{3} : f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$

1.3. Phương trình hàm

- Tính giá trị đặc biệt f(0), f(1),...

- Dùng phép thế, đổi biến, các chuyển đổi số học, đại lượng trung bình, biến đổi tịnh tiến và đồng dạng, biến đổi phân tuyến tính,...

- Dùng tính chất đơn ánh, toàn ánh, song án, tuần hoàn,..

- Đánh giá, dự đoán hàm số, quy nạp,...

Phương trình hàm Cauchy: Hàm f(x) xác định và liên tục trên **R** thỏa mãn:

$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x,y \in \mathbb{R}$ thì $f(x) = ax$ với a hằng số tùy ý.

2. CÁC BÀI TOÁN

Bài toán 1: Cho hàm số f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa: $f(x+2xy) = f(x) + 2f(xy), \forall x,y \in \mathbb{R}$

Biết f(201) = a, hãy tính f(202).

Hướng dẫn giải

Thay $x = 0$ ta được: $f(0) = f(0) + 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

Thay $y = -1$ ta được : $f(-x) = f(x) + 2f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$

Thay $y = -\frac{1}{2}$ ta được $f(0) = f(x) + 2f\left(-\frac{x}{2}\right) \Rightarrow f(x) = -2f\frac{(x)}{2}$

Suy ra $f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$

Xét $x \ne, t \in \mathbb{R}$ bất kì. Thay $y = \frac{t}{2x}$ ta được:

$f(x+t) = f(x) + 2f\left(\frac{t}{2}\right) = f(x) + f(t)$

Với $x = 0$ ta cũng có $f(0+t) = f(0) + f(t)$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo k: $f\left(kx\right)=kf\left(x\right),\forall x\in \mathbb{R},\forall k\in \mathbb{N}$

Từ đó rút ra: $a=f\left(201\right)=201.f\left(1\right)\Rightarrow f\left(1\right)=\dfrac{a}{201}$

Do đó $f\left(202\right)=202.f\left(1\right)=\dfrac{202}{201}a$

Bài toán 2: Cho hàm f(x, y) thỏa mãn các điều kiện:

$f\left(0,y\right)=y+1;\ f\left(x+1,0\right)=f\left(x,1\right)$

$f\left(x+1,y+1\right)=f\left(x,f\left(x+1,y\right)\right)$

Với mọi số nguyên không âm x, y. Tìm f(4, 1981)

Hướng dẫn giải

Ta có: $f\left(1,n\right)=f\left(0,f\left(1,n-1\right)\right)=1+f\left(1,n-1\right)$

Do đó: $f\left(1,n\right)=n+f\left(1,0\right)=n+f\left(0,1\right)=n+2$

Ta lại có: $f\left(2,n\right)=f\left(1,f\left(2,n-1\right)\right)=f\left(2,n-1\right)+2$

Do đó: $f\left(2,n\right)=2n+f\left(2,0\right)=2n+f\left(1,1\right)=2n+3$

Bây giờ: $f\left(3,n\right)=f\left(2,f\left(3,n-1\right)\right)=2f\left(3,n-1\right)+3$

Đặt $u_n=2u_{n-1}$ và $u_0=f\left(3,0\right)+3=f\left(2,1\right)+3=0$

Do vậy: $u_n=2^{n+3}f\left(3,n\right)=2^{n+3}-3$

Ta có: $f\left(4,n\right)=f\left(3,f\left(4,n-1\right)\right)=2^{f\left(4,n-1\right)+3}-3$

$f\left(4,0\right)=f\left(3,1\right)=2^4-3=13$

$f\left(4,2\right)=2^{224}-3$

Bằng qui nạp ta chứng minh được $f\left(4,n\right)=2^{22..24}-3$

Trong đó số mũ chứa (n + 2) chữ số 2. Từ đó:

$f\left(4,\ 1981\right)=2^{22..24}-3$ với số mũ chứa 1983 chữ số 2.

Bài toán 3: Cho hàm f: $¢^{+} \to ¢^{+}$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) $f(n+1) > f(n); \forall n \in ¢^{+}$

(ii) $f(f(n)) = 3n, \forall n \in Z^{+}$. Hãy tính f(2003).

Hướng dẫn giải

Từ (i) và (ii) $\Rightarrow f(1) < \mathrm{f}(f(1)) = 3 \Rightarrow f(1) = 2$

Ta có: $f(2) = f(f(1)) = 3.1 = 3$

$f(3) = f(f(3)) = 3.2$

$f(2.3) = f(f(3)) = 3.3 = 3^2$

....

Suy ra $f(2.3^n) = 3^{n+1}, \forall n \in ¢^{+}; f(3^n) = 2.3^n; \forall n \in Z^{+}$

Nên có $f(3^{n+1}) = f(f(2.3^n)) = 2.3^{n+1}$

$f(2.3^{n+1}) = f(f(3^{n+1})) = 3.3^{n+1} = 3^{n+2}$

Do đó khẳng định đúng với mọi n

Ta có $(3^n - 1)$ số nguyên m nằm giữa 3^n và 2.3^n và do giả thiết (i) $f(n+1) > f(n)$

nên có $(3^n - 1)$ số nguyên m nằm giữa f(3^n) và f(2. 3^n) suy ra $0 < m < 3^n$

$\Rightarrow f(3^n + m) = 2.3^n + 3n$. Do giả thiết (ii) suy ra.

$f(2.3^n + m) = f(f(3^n + m)) = 3(3^n + m)$

Vậy $f(2.3^n + m) = 3(3^n + m)$ với $0 < m < 3^n$

Suy ra: $n = 2003 = 2.3^6 + 545 \Rightarrow f(2003) = 3(3^6 + 545) = 3822$

Bài toán 4: Cho f(n) là hàm số xác định với mọi $n \in \mathrm{N}^*$ và lấy giá tị không âm thỏa mãn tính chất:

1. $\forall n, m \in \mathrm{N}^* : f(m+n) - f(m) - f(n)$ lấy giá trị 0 hoặc 1

2. $f(2)=0$ và $f(3)>0$

3. $f(9999)=3333$. Tính $f(2000)$.

Hướng dẫn giải

Vì $f(m+n)-f(m)-f(n)$ lấy giá trị 0 hoặc 1 nên ta suy ra:

$$f(m+n)\geq f(m)+f(n)$$

$\Rightarrow f(2)\geq 2f(1)\Rightarrow f(1)=0\Rightarrow f(3)=1$

Ta có: $f(6)\geq f(3)+f(3)=2$

$$f(9)\geq f(6)+f(3)\geq 3$$

....

$f(9999)\geq f(9996)+f(3)\geq 3333$

Vì giả thiết cho $f(9999)=3333$ nên ta có dấu "=" ở các bất đẳng thức trên xảy ra, tức là $f(3n)=n,\forall n=1,2,...,3333$

$\Rightarrow f(1998)=666, f(2001)=667$

Mặt khác nếu a $a,b\in \mathbb{N}^*$ và $a>b\Rightarrow f(a)\geq f(b)+f(a-b)\geq f(b)$

$\Rightarrow 666\leq f(2000)\leq 667\Rightarrow f(2000)=666$ hoặc 667

Giả sử $f(2000=667)$

$\Rightarrow f(4000)\geq 1334\Rightarrow f(6000)\geq 1334+667=2001$

mà $f(6000)=2000$ (mâu thuẫn). Vậy: $f(2000)=666$

Bài toán 5: Cho f và g là các hàm xác định trên R thỏa:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x).g(y),\forall x,y\in ¡$$

Chứng minh rằng:

Nếu $f(x)\neq 0$ và $|f(x)|\leq 1,\forall x\in ¡$ thì $|g(y_0)|=a>1$

Hướng dẫn giải

Ta dùng phương pháp phản chứng

Giả sử lại một điểm $y_0 \in \mathbb{R} : \left|g\left(y_0\right)\right| = a > 1$

Ta lấy $x_0 : f\left(x_0\right) \neq 0$ và xây dựng dãy $x_k\left(k = 0,1,2....\right)$ như sau:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + y_0, \text{khi} \left|f\left(x_k + y_0\right)\right| \geq \left|f\left(x_k - y_0\right)\right| \\ x_k - y_0, \text{khi} \left|f\left(x_k + y_0\right)\right| < \left|f\left(x_k - y_0\right)\right| \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có:

$$2\left|f\left(x_{k+1}\right)\right| > \left|f\left(x_k + y_0\right)\right| + \left|f\left(x_k - y_0\right)\right| \geq \left|f\left(x_k + y_0\right)\right| + \left|f\left(x_k - y_0\right)\right|$$

$$= 2\left|f\left(x_k\right)\right|\left|g\left(y_0\right)\right| = 2a\left|f\left(x_k\right)\right|$$

Nên $\left|f\left(x_{k+1}\right)\right| \geq a\left|f\left(x_k\right)\right|$ với $a > 1; k = 1,2,3...$

Do đó ta có: $\left|f\left(x_k\right)\right| \geq a^k\left|f\left(x_0\right)\right|$. Nhưng vì $\left|f\left(x_0\right)\right| \neq 0$ và $a > 1$ nên có thể chọn k sao cho $a^k\left|f\left(x_0\right)\right| > 1$ dó đó $\left|f\left(x_k\right)\right| > 1$

Mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\left|g\left(y\right)\right| \leq 1, \forall y \in R$

Bài toán 6: Cho hàm số f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa 2 điều kiện:

i) $f\left(x\right) \geq 1 + x; \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $f\left(x + y\right) \geq f\left(x\right).f\left(y\right); \forall x, y \in \mathbb{R}$

Chứng minh rằng không thể tồn tại hai số $a; b \in \mathbb{R}$ mà $f\left(a\right).f\left(b\right) \leq 0$

Hướng dẫn giải

Ta sẽ chứng minh: $f\left(x\right) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Thật vậy: với $|x| < 1$ thì theo điều kiện (i) ta có ngay $f\left(x\right) > 0$

Với $|x| < 1$, trước hết ta sẽ chứng minh bất đẳng thức:

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ thì $f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^n} \right) \right]^{2^n}$ (1)

Với n = 0: công thức (1) đúng.

Giả sử công thức (1) đúng với $n - k > 0$ tức $f(x) \geq \left[f\left(\frac{x}{2^k} \right) \right]^{2^k}$ (2)

Ta có: $\left[f\left(\frac{x}{2^k} \right) \right]^{2^k} = f\left(\frac{x}{2^{k+1}} + \frac{x}{2^{k+1}} \right) \geq \left[f(\frac{x}{2^{k+1}}) \right]^{2^k.2} = f\left(k + 1\frac{x}{2} \right)^{2^{k+1}}$ tức (1) đúng với $n = k + 1$

Theo nguyên lý quy nạp toán học bất đẳng thức (1) đúng.

Bây giờ chọn n đủ lớn để $|x| < 2^n, x \in \mathbb{R}$ tùy ý, khi đó $\left| \frac{x}{2^n} \right| < 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{2^n} \right) > 0$

Do đó $\left[f\left(\frac{x}{2^n} \right) \right]^{2^n} > 0$ tức $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Như vậy không thể tồn tại $a, b \in \mathbb{R}$ mà $f(a).f(b) \leq 0$

Bài toán 7: Đặt $f(x) = \frac{1}{1+x}$ với x là số thực dương, và với mọi số nguyên dương n, ta đặt: $g_n(x) = x + f(x) + f(f(x)) + ... + f(f(...\text{f}(x)))$, f được lấy n lần ở số hạng cuối cùng. Chứng minh rằng:

a) $g_n(x) > g_n(y)$ nếu $x > y > 0$

b) $g_n(1) = \frac{F_1}{F_2} + \frac{F_2}{F_3} + ... + \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}$

với $F_1 = F_2 = 1$ và $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ với $n \geq 1$.

Hướng dẫn giải

a) Kí hiệu $f_n(x) = f(f(...\text{f}(x)))$ (n lần). Kí hiệu $g_0(x)$ là hàm đồng nhất. Chú ý rằng $f_2(x)$ là hàm tăng thực sự khi $x > 0$.

Ta sẽ chứng minh bằng qui nạp theo n rằng $g_n(x)$ là hàm tăng thực sự khi $x>0$.
Dễ dàng kiểm tra được điều này đúng với $g_1(x)$

Giả sử khi $n\ge 2, g_1(x),...,g_{n-1}(x)$ là các hàm tăng thực sự với $x>0$

Cho $x>y>0$. Ta có: $g_n(x)-g_n(y)=$

$$=(x-y)+\left(f(x)-f(y)\right)+\left(f_2(x)-f_2(y)\right)+...+\left(f_n(x)-f_n(y)\right)$$

$$=\left(g_1(x)-g_1(y)\right)+\left(g_{n-2}\left(f_2(x)\right)-g_{n-2}\left(f_2(y)\right)\right)>0$$

Vậy $g_n(x)$ là hàm tăng thực sự khi $x>0$.

b) Để y rằng $\frac{F_1}{F_2}=1$ và $f\left(\frac{F_i}{F_{i+1}}\right)=\frac{F_{i+1}}{F_{i+2}}$. Suy ra:

$$\frac{F_1}{F_2}+\frac{F_2}{F_3}+...+\frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}=g_n(1)$$

Bài toán 8: Cho $f(x,y)=\sqrt{\frac{2003}{2}}\cos 2(x+y)+a\cos(x+y+\alpha)$ với $a,\alpha\in\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $\min\left(f(x,y)\right)^2+\left(\max f(x,y)\right)^2\ge 2003$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(0,0)+f\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)=2\sqrt{\frac{2003}{2}}$

Nên $\max f(x,y)\ge\max\left\{f(0,0),f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right\}\ge\sqrt{\frac{2003}{2}}\,(\forall x,y\in\mathbb{R})$

$$\Rightarrow\left(\max f(x,y)\right)^2>\frac{2003}{2}$$

Ta lại có: $f\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{\frac{2003}{2}}-a.\sin\alpha,\ f\left(-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{\frac{2003}{2}}+a.\sin\alpha$

Nên $f\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)+f\left(-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{\frac{2003}{2}}$. Suy ra:

$$\min f(x,y) \le \min\left\{ f\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right), f\left(-\frac{\pi}{4};-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \le -\sqrt{\frac{2003}{2}} \left(\forall x, y \in \mathbb{R}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\min\left(f(x,y)\right)^2\right) \ge \frac{2003}{2}.$$

Do đó : $\min\left(f(x,y)\right)^2 + \left(\max f(x,y)\right)^2 \ge 2003.$

Bài toán 9: Cho hàm số $f : \mathrm{N}^* \to \mathrm{N}^*$. Giả sử $f(1)=1, f(2n)=f(n)$ và $f(2n+1)=f(2n)+1$ với mọi số tự nhiên n.

a) Tìm giá trị lớn nhất M của $f(n)$ với $n \in \mathrm{N}^*$ thỏa mãn điều kiện $1 \le n \le 1994$

b) Tìm tất cả các số $n \in \mathrm{N}$, với $1 \le n \le 1994$, sao cho $f(n) = M$

Hướng dẫn giải

Có thể dùng quy nạp để chứng minh rằng f(n) là số tất cả các chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của số n.

a) Tồn tại nhiều nhất 10 chữ số 1 trong biểu diễn nhị phân của một số nếu số đó bé hơn hoặc bằng $1994 = \overline{111111001010}_{(2)}$

Suy ra M = 10

b) Với mọi số tự nhiên $n \le 1994$, ta có $f(n) = 10$ nếu và chỉ nếu n là một trong các số:

$1023 = \overline{1111111111}_{(2)}$,

$1535 = \overline{1011111111}_{(2)}, 1791 = \overline{1101111111}_{(2)}$,

$1919 = \overline{1110111111}_{(2)}, 1983 = \overline{1110111111}_{(2)}$.

Bài toán 10: Cho $f(x) = \dfrac{x^2+1}{2x}, \forall x \ne 0.$ Giả sử $f_0(x) = x$ và $f_n(x) = f\left(f_{n-1}(x)\right) \forall n \in \mathrm{N}^*, \forall x \ne 0$.

Chứng minh $\forall n \in \mathrm{N}, \forall x \ne -1, 0, 1 \dfrac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)} = 1 + \dfrac{1}{f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2n}}$

Hướng dẫn giải

Đặt $p_n(x)=\frac{1}{2}\left[(x+1)^{2^n}+(x-1)^{2^n}\right]$

$q_n(x)=\frac{1}{2}\left[(x+1)^{2^n}+(x-1)^{2^n}\right] \qquad \forall x,y\in N$

Ta có: $p_{n+1}(x)=p_n^2(x)+q_n^2(x)$

$q_{n+1}(x)=2p_n(x)q_n(x) \qquad \forall x,y\in N$

$f_0(x)=x=\frac{x}{1}=\frac{p_0(x)}{q_0(x)},\forall x\neq 0$

Giả sử: $f_k(x)=\frac{p_k(x)}{q_k(x)}$

$$\Rightarrow f_{k+1}(x)=\frac{\left[\frac{p_k(x)}{q_k(x)}\right]^2+1}{2.\frac{p_k(x)}{q_k(x)}}=\frac{p_k^2(x)+q_k^2(x)}{2p_k(x)q_k(x)}=\frac{p_{k+1}(x)}{q_{k+1}(x)}$$

Do đó: $f_n(x)=\frac{p_n(x)}{q_n(x)} \qquad \forall n\in N,\forall x\neq 0$

Ta có: $\forall n\in N,\ \forall x\neq -1,0,1$ thì có:

$$\frac{f_n(x)}{f_{n+1}(x)}=\frac{\left[(x+1)^{2^n}+(x-1)^{2^n}\right]\left[(x+1)^{2^{n+1}}-(x-1)^{2^n+1}\right]}{\left[(x+1)^{2^n}+(x-1)^{2^n}\right]\left[(x+1)^{2^{n+1}}+(x-1)^{2^n+1}\right]}$$

$$=\frac{\left[(x+1)^{2^n}+(x-1)^{2^n}\right]^2}{(x+1)^{2^{n+1}}+(x-1)^{2^n+1}}=1+\frac{2(x+1)^{2^n}(x-1)^{2^n}}{(x+1)^{2^{n+1}}+(x-1)^{2^n+1}}=1+\frac{1}{f(\frac{x+1}{x-1})^{2^n}}$$

Bài 11: Cho hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thỏa mãn phương trình:
$f(4x)+2005f(2x)=2006f(x)\ \forall x\in\mathbb{R}^+$. Chứng minh tồn tại số thực k để:
$f(x)=f(kx)$

Hướng dẫn giải

Đặt $f\left(2^n x\right)=u_n\left(n\in N^*\right)$

Từ $f\left(4x\right)+2500f\left(2x\right)=2006f\left(x\right)\ \forall x\in\mathbb{R}^+$ bằng quy nạp ta có:

$$f\left(2^{n+2}x\right)+2005f\left(2^{n+1}x\right)=2006f\left(2^n x\right)\left(x\in\mathbb{R}^+\right)$$

Hay $u_{n+2}+2005u_{n+1}-2006u_n=0\left(u_n>0\right)$

Hướng dẫn giải phương trình đặc trưng:

$\lambda^2+2500\lambda-2006=0$ ta được $\lambda=1;\lambda=-2006$

Vậy $u_n=p.1^n+q\left(-2006\right)^n>0,\forall n$

Với $p>0,q=0$ thì $u_n=u_0$

Vậy $f\left(2^n x\right)=f\left(x\right)$ hay $k=2^n\ \forall n\in N^+$

Bài toán 12: Cho ánh xạ $P:\mathrm{N}^*\times\mathrm{N}^*\to\mathbb{Q}$

$$\left(x,y\right)\mapsto\ P\left(x,y\right)=\frac{x^2+y^2+6}{xy}$$

Chứng minh nếu $P\left(z,y\right)!\in\mathrm{N}^*$ thì $\sqrt[3]{P\left(x,y\right)}\in\mathrm{N}^*$.

Hướng dẫn giải

Đặt $P\left(x,y\right)=z$. Xét phương trình: $x^2-xyz+y^2+6=0\qquad(1)$

Gọi $\left(x_0,y_0,z\right)$ là nghiệm sao cho x_0+y_0 bé nhất. Vai trò x_0,y_0 như nhau nên giả sử $x_0\geq y_0$.

Xét phương trình $x^2-zy_0x+y_0^2+6=0\qquad(2)$

Gọi nghiệm thứ hai là x_1 thì $x_0\leq x_1$

Ta có: $x_0+x_1=zy_0\ (3)\quad x_0x_1=y_0^2+6=0\qquad(4)$

1) Nếu $y_0=x_0$ từ $(1)\Rightarrow z=2+\dfrac{6}{x_0^2}\in\mathrm{N}^*$

$\Rightarrow x_0 = y_0 = 1,\ z = 8$ (thỏa đề bài)

2) Nếu $x_0 = x_1$ từ $(4) \Rightarrow (x_0 + y_0)(x_0 - y_0) = 6$, vô lý vì $(x_0 + y_0)$ và $(x_0 - y_0)$ cùng chẵn hay cùng lẻ

3) Nếu $y_0 < x_0 < x_1 \Rightarrow x_0 \ge y_0 + 1$ và $x_1 \ge y_0 + 2$

Từ $(4) \Rightarrow y_0^2 + 6 \ge (y_0 + 1)(y_0 + 2) \Rightarrow y_0 \le \dfrac{4}{3} \Rightarrow y_0 = 1 \Rightarrow z_0 z_1 = 7$

$\Rightarrow x \le y_0^2$ mà $y_0 = 1 \Rightarrow x_0 x_1 = 7$

$x_0 = 1$ và $x_1 = 7$, vô lý vì $x_0 = y_0$

Vậy $z = 2^3 \Rightarrow \sqrt{p(x,y)} = 2 \in \mathrm{N}^*$

Bài 13: Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục và giảm sao cho với mọi $x, y \in \mathbb{R}^+ : f(x+y)\, f(f(x) + f(y)) + f(y + f(x))$

Chứng minh rằng $f(f(x)) = x$

Hướng dẫn giải

Cho $y = x$ ta được: $f(2x) + f(2f(x)) = f(2f(x + f(x)))$

Thay x bằng f(x) ta có: $f(2f(x)) + f(2f(f(x))) = f(2f(f(x) + f(f(x))))$

Trừ hai phương trình trên ta suy ra:

$$f(2f(f(x))) - f(2x) = f(2f(f(x) + f(f(x)))) - f(2f(x + f(x)))$$

Nếu $f(f(x)) > x$, vế trái của phương trình trên âm, do đó:

$$f(f(x) + f(f(x))) > f(x + f(x)) \text{ và } f(x) + f(f(x)) < x + f(x)$$

là điều mâu thuẫn.

Tương tự, ta cũng có điều mâu thuẫn xảy ra khi $f(f(x)) < x$

Vậy $f(f(x)) = x$, điều phải chứng minh.

Bài toán 14: Cho song ánh $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Chứng minh rằng: Tồn tại vô số bộ (a,b,c) với $a,\mathrm{b},\mathrm{c}\in\mathbb{N}$ thỏa: $a<b<c$ và $2f(b)=f(a)+f(c)$

Hướng dẫn giải

Ta xây dựng dãy $\{a_n\}$ như sau:

Trong các số từ 0, 1, 2,..., m chọn số a_1 sao cho $f(a_1)>f(i)\quad \forall i=\overline{0;a_1}\ (m\in\mathbb{N})$

Chọn $a_2>a_1$ sao cho $f(a_2)>f(i),\forall i=\overline{0;a_2}$

Chọn $a_k>a_{k-1}$ sao cho $f(a_k)>f(i),\forall i=\overline{0;a_k}$

Vậy ta có dãy $a_1<a_2<...<a_k<a_{k+1}$ và $f(a_1)<f(a_2)<...<f(a_k)<f(a_{k+1})$

Trong đó $a_i\in\mathbb{N}$ và $f(a_i)>f(j)\ \forall j=0;a_i$

Vì f là song ánh nên $f(a_{k+1})=f(a_k)+p, p\in N^*$

Và $\exists c\in\mathbb{N}$ để $f(c)=f(a_{k+1})+p>f(a_{k+1})$

Mặt khác: $\begin{cases} a_{k+1}>a_i & \forall i=\overline{1,k} \\ f(a_{k+1})>f(i) & \overline{\forall i=1,a_{n+1}} \end{cases}$

Nên $c>a_{k+1}$

$$\Rightarrow\begin{cases} p(a_k)=f(a_{k+1})-p \\ f(c)=f(a_{k+1})+p \end{cases}\Rightarrow 2f(a_{k+1})=f(a_k)+f(c)$$

Do cách xây dựng, dãy $\{a_n\}$là dãy vô hạn nên tồn tại vô số bộ (a, b, c) thỏa điều kiện đã nêu.

Bài toán 15: Chứng minh với mọi hàm $f:¡\to¡$ thì:

$$f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y),\ \forall x,y\in¡$$

$$\Leftrightarrow f(x+y)=f(x)+f(y),\forall x,y\in¡$$

Hướng dẫn giải

- Phần đảo: Cho $f(x+y)=f(x)+f(y), \forall x,y\in R$

thì $f(xy+x+y)=f(xy)+f(x+y)=f(xy)+f(x)+f(y), \forall x,y\in R$

- Phần thuận: Cho $f(xy+x+y)=f(xy)+f(x)+f(y), \forall x,y\in R$

Chọn $x=y=0$ thì $f(0)=0; \forall a,b,c\in R$ ta có :

$$f(a+b+c+ab+bc+ac+abc)=f\left(a(c+b+bc)+a+(c+b+bc)\right)$$

$$=f\left(a(c+b+bc)\right)+f(a)+f(a+b+bc)$$

$$=f(ac+ab+abc)+f(a)+f(c)+f(b)+f(bc)$$

Vì $f(a+b+c+ab+bc+ca+abc) = f(ba+bc+abc) + f(a)+f(b)+f(c) + f(ac)$

Nên $f(bc) + f(ab + ac + abc) = f(ac) + f(ab + bc + abc)$

Lấy $a = 1$: $f(bc) + f(b + c + bc) = f(c) + f(b + bc + bc)$

$\Rightarrow$

Do đó $f(u + 2v) = f(u) + 2f(v), \forall u,\ \mathrm{v}\in R$

Lấy $u=a$ thì $(2v) = 2f(v), \forall v \in R$ nên $f(u + 2v) = f(u) + f(2v)$

Hay: $f(b + 2bc) = f(b) + f(2bc), \forall b,\ c \in R$

Nếu $b=0$ thì $f(0) = 2f(0) = 0$: Đúng

Nếu $b\neq 0$ thì $b=x, c=\dfrac{y}{2b}$ thì có $f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x,\ y \neq 0.$

KẾT LUẬN

Trong báo cáo trên, tôi đã đưa ra một số kiến thức cơ bản về phương trình hàm và một số bài tập cụ thể, Tuy nhiên với thời lượng cho phép của báo cáo không nhiều, do vậy lượng bài tập đưa ra còn ít và chưa đầy đủ các dạng. Trong báo cáo tới, tôi sẽ đưa thêm nhiều bài tập khác và các dang bài tập cũng đầy đủ hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Tài Chung, Lê Hoành Phó; Chuyên khảo phương trình hàm; Đại Học Quốc Gia Hà Nội

[2]. Nguyễn Tài Chung; Bồi dưỡng phương trình hàm; Đại Học Quốc Gia Hà Nội

[3]. J. Aczei; Lectures on FUNCTIONAL EQUATIONS and Their APPLICATIONS.