TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT

BỘ MÔN TOÁN – KHOA KHCB

BÁO CÁO HỌC THUẬT

NHÓM TỰ ĐẲNG CẤU TRONG KHÔNG GIAN C^n

ThS. Nguyễn Thị Lan Hương

Hà Nội, 05/2020

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ ĐỊA CHẤT

BỘ MÔN TOÁN – KHOA KHCB

BÁO CÁO HỌC THUẬT

NHÓM TỰ ĐẲNG CẤU TRONG KHÔNG GIAN C^n

Xác nhận của bộ môn

Hà Nội, 05/2020

MỤC LỤC

1. GIỚI THIỆU

Cho điểm $z = (z_1,\ldots\ldots, z_n) \in C^n$

Ký hiệu $z' = (z_1,\ldots\ldots, z_{n-1})$

Theo tứ tự, lần lượt cho các trọng số: $\frac{1}{2m_1}, \ldots\ldots, \frac{1}{2m_{n-1}}$ tương ứng với các biến $z_1,\ldots,$ z_n.

Đặt: wt(K) : = $\sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{2mj}$ là trọng số của (n-1) thành phần, $K = (k_1,\ldots, k_{n-1}) \in Z_{\geq 0}^{n-1}$.

Định nghĩa. Một đa thức giá trị thực P trên C^{n-1} được gọi là đa thức thuần nhất có trọng số với trọng số $(m_1,\ldots.., m_{n-1})$ (hay còn gọi là $(\frac{1}{m_1}, \ldots\ldots, \frac{1}{m_{n-1}})$-thuần nhất) nếu thỏa mãn điều kiện:

$P\left(t^{\frac{1}{2m_1}} z_1, \ldots., t^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}\right) = t.P(z_1, \ldots., z_{n-1})$ với mọi $z' \in C^{n-1}$ và $t > 0$.

Trong trường hợp $m = m_1 = \ldots. = m_{n-1}$, thì P được gọi là thuần nhất bậc m.

Hơn nữa, chúng ta lưu ý rằng nếu P(z') là đa thức $(\frac{1}{m_1}, \ldots\ldots, \frac{1}{m_{n-1}})$-thuần nhất thì

$P(z') = \sum_{wt(K)+wt(L)=1} a_{KL} z'^K \overline{z'}^K$ (1)

Trong đó $a_{KL} \in C$ với $a_{KL} = \bar{a}_{KL}$. (xem hệ quả 1 trong phần 3).

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập một dạng hiện của nhóm tự đẳng cấu kiểu hữu hạn (theo Catlin) trong C^n xác định bởi:

$M_P = \{z \in C^n$: $\mathrm{Re} z_n + P(z') < 0\}$

Trong đó P là đa thức đa điều hòa dưới thuần nhất có trọng, nhận giá trị thực trong C^{n-1} mà không có số hạng điều hòa. Siêu mặt đa kiểu hữu hạn ∂M_P được xác định như là siêu mặt liên kết với điểm đa kiểu Catlin hữu hạn.

Thêm nữa, tất cả mầm đại số Lie của các tự đẳng cấu không hữu hạn của ∂M_P tại 0 đã được mô tả trong Kolar [17].

Đa kiểu Catlin thu hút được nhiều sự chú ý, bởi vì tính bất biến đối với các ánh xạ song chỉnh hình và tính chất toàn cục thông thường của bài toán $\bar{\partial}$-Neumann [5, 6]. Để so sánh với các điều kiện kiểu hữu hạn nổi tiếng khác, chúng tôi khuyên các độc giả tìm đọc [7, 25, 26] và các tài liệu tham khảo trong đó.

Để tìm hiểu kỹ thêm về trọng tâm nghiên cứu của chúng tôi về các song chỉnh hình tương đương với bài toán của mô hình M_P, chúng tôi lựa chọn cách trình bày theo bối cảnh lịch sử như sau: từ một kết quả địa phương của Bedford và Pinchuk [2], tiếp đến là kết quả nổi tiếng của Gaussier [10] chỉ ra rằng: nếu miền $\Omega \subset C^n$ là lồi theo kiểu hữu hạn của D'Angelo quanh quỹ đạo điểm biên, thì Ω là song chỉnh hình tương đương với miền đa thức rigid (xem [10], định lý 1).

Gần đây, đặc trưng của mô hình đa kiểu hữu hạn cũng được thiết lập bởi Rong và Zhang trong [21]. Trong trường hợp nếu Ω là giả lồi chặt, Wong và Rosay [22] chỉ ra rằng mọi miền giả lồi chặt bị chặn trong C^n với nhóm tự đẳng cấu non-compact là song chỉnh hình với cầu đơn vị phức. Thêm nữa, khi n = 2, nhóm tự đẳng cấu của mô hình M_P cũng đã hoàn toàn được xác định trong [19].

Chúng ta cũng quan tâm đến hai nhóm miền đặc biệt D_P và Q_P trong C^n ($n \geq 2$) được xác định lần lượt như sau:

$D_P := \{(z', z_n) \in C^n: |z_n|^2 + P(z') < 1\}$;

$Q_P : = \{(z', z_n) \in C^n: \mathrm{Re} z_n + P(z') < 0\}$.

Trong đó: $P(z') = \sum_{wt(K)+wt(L)=1/2} a_{KL} z'^K \overline{z}'^K$ (2)

Với $a_{KL} \in C$, $a_{KL} = \overline{a_{KL}}$

Chúng ta lưu ý rằng D_P là bị chặn khi và chỉ khi $P(z') > 0$ với mọi $z' \in C^{n-1}\backslash\{0\}$ (xem [13], bổ đề 6). Hơn nữa, nếu D_P bị chặn, nhóm tự đẳng cấu $\mathrm{Aut}(D_p)$ là non-compact thì nó chứa $\{\phi_{a,\theta}: a \in \Delta, \theta \in R\}$, trong đó $\phi_{a,\theta}$ xác định bởi:

$$(z', z_n) \mapsto \left(\frac{(1-|a|^2)^{1/2m1}}{(1-\bar{a}z_n)^{1/m1}} z_1, \dots\dots, \frac{(1-|a|^2)^{\frac{1}{2m_{n-1}}}}{(1-\bar{a}z_n)^{\frac{1}{m_{n-1}}}} z_{n-1}, e^{i\theta} \frac{z_n - a}{1-\bar{a}z_n} \right),$$

Trong đó $a \in \Delta := \{z \in C: |z| < 1\}$ và $\theta \in R$ (xem bổ đề 7 trong Sect4).

Như ta đã thấy trong chứng minh của bổ đề 7, các trọng thuần nhất của P và dạng đặc biệt (2) cho phép chúng ta thu được kết quả là $\phi_{a,\theta} \in Aut(D_P)$.

Mục đích đầu tiên của chúng ta là chứng minh rằng $Aut(D_P)$ là sự tổng quát của tập các tự đẳng cấu ở trên và G_P, trong đó G_P là tập tất cả các tự đẳng cấu có dạng $(z', z_n) \mapsto (Az', z_n)$, trong đó $A = diag(A_1, \ldots, A_k)$ là ma trận khối đường chéo với điều kiện là mỗi A_j $(1 \le j \le k)$ là ma trận khả nghịch cỡ $(i_j - i_{j-1}) \times (i_j - i_{j-1})$ và $P(Az') \equiv P(z')$, với các số nguyên dương $i_1, \ldots, i_k$ thỏa mãn

$$m_1 = \ldots = m_{i_1} > \ldots\ldots > m_{i_{j-1}+1} = \ldots = m_{i_j} > \ldots > m_{i_{k-1}+1} = m_{i_k} = m_{n-1}.$$

Kết quả chính đầu tiên của chúng tôi là định lý sau đây:

Định lý 1. Cho P là đa thức đa điều hòa dưới thuần nhất có trọng, giá trị thực trong C^{n-1} cho bởi (2) với giả thiết thêm rằng $P(z') > 0$ với mọi $z' \in C^{n-1}\backslash\{0\}$. Khi đó, $Aut(D_P)$ đặc trưng bởi G_P và $\{\phi_{a,\theta} : a \in \Delta, \theta \in R\}$.

Chúng ta mô tả một cách ngắn gọn chứng minh cho định lý 1 như sau: Từ giả thiết P dương trên tập $C^{n-1}\backslash\{0\}$ suy ra rằng D_P là bị chặn và $|z_n| < 1$ trên D_P; do đó, thành phần thứ n của $\phi_{a,\theta}$ được chứa trong hình cầu đơn vị C. Thêm nữa, chúng ta lưu ý rằng mọi tự đẳng cấu của D_P có thể thác triển trơn tới biên (xem trong [3]). Khi đó, từ 2 kết quả trên suy ra rằng với mọi $f \in Aut(D_p)$, ánh xạ hạn chế $f|_{D_P \cap \{z'=0\}} \in Aut(\Delta)$, trong đó Δ là hình cầu đơn vị C.

Hơn nữa, thành phần thứ n của f có dạng sau:

$f_n(z) = f_n(0', z_n) = e^{i\theta_n}\frac{z_n - a}{1 - \bar{a}z_n}$, trong đó $a \in \Delta$ và $\theta_n \in R$.

Thay f bởi $\varphi_{-a,-\theta_n} o f$, chúng ta có thể giả thiết rằng $f(0) = 0$.

Khi đó, theo bổ đề 8 trong sect 4, với P là đa thức thuần nhất có trọng, suy ra rằng $f \in Aut(D_P)$ với $f(0) = 0$ là tuyến tính, tức là, $f \in G_P$; do đó ta kết luận được điều cần chứng minh trong định lý 1.

Thêm nữa, chúng ta cần lưu ý rằng D_p là song chỉnh hình tương đương với Q_p, trong đó:

$Q_P : = \{(z', z_n) \in C^n: Rez_n + P(z') < 0\}$

chỉ ra rằng P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng $(m_1,\ldots., m_{n-1})$ cho bởi (2) thỏa mãn $P(z') > 0$ với mọi $z' \in C^{n-1}\setminus\{0\}$ (xem định lý 5 trong sect4).

Như là một hệ quả, nhóm Aut(Q_P) chính là sự tổng quát của các phép biến đổi T_t cho bởi: $T_t(z) = (z', z_n + it)$ với $t \in R$, G_P, và tập các song chỉnh hình có dạng sau:

$$(z', z_n) \mapsto \left(\frac{\alpha^{1/2m_1}}{(1+i\beta z_n)^{1/m_1}} z_1, \ldots\ldots, \frac{\alpha^{1/2m_{n-1}}}{(1+i\beta z_n)^{1/m_{n-1}}} z_{n-1}, \frac{\alpha z_n}{1+i\beta z_n}\right).$$

Trong đó $\alpha > 0$, $\beta \in R$.

Tiếp theo, chúng ta sẽ bàn về kết quả chính thứ 2, mô tả về nhóm tự đẳng cấu của mô hình kiểu hữu hạn.

Trước tiên, chúng ta sẽ nhắc lại định nghĩa về miền WB giới thiệu bởi Ahn (xem trong [1]).

Một miền M_P trong C^n được gọi là miền WB (weighted-bumped) nếu:

$M_p = \{z \in C^n: Rez_n + P(z') < 0\}$

Trong đó

i) P là đa thức thuần nhất có trọng, giá trị thực trong C^{n-1} với trọng $(m_1,\ldots,m_{n-1})$;

ii) M_P là giả lồi chặt tại mọi điểm biên bên ngoài tập $\{\partial M_P \cap (\{0'\} \times iR)\}$.

Trong ấn bản [1, hệ quả 4.3] cũng đã chỉ ra rằng mọi điểm biên của miền WB M_P đều thừa nhận hàm peak $O(M_P)$, trong đó $O(M_P) : = \{f: M_P \to C: f$ là song chỉnh hình$\}$. Như là hệ quả, các metric Kobayashi và Bergman lại được hoàn tất (xem trong [1, 11]). Thêm nữa, cũng tồn tại hàm peak tại vô cùng cho $O(M_P)$ (xem nhận xét 1 trong phần 2).

Chúng ta sẽ đặc biệt chú ý tới mô hình generic mà không song chỉnh hình tương đương với bất kỳ mô hình rotational hay tubalur nào (xem định nghĩa 2 và 3 trong phần 5).

Cho S_λ ($\lambda > 0$) và T_s ($s \in R$) là các tự đẳng cấu của M_P, lần lượt định nghĩa bởi:

$S_\lambda(z) = (\lambda^{1/2m_1} z_1, \dots, \lambda^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}, \lambda z_n)$; $T_s(z) = (z', z_n + is)$

Với các ký hiệu như trên, kết quả chính của chúng tôi chính là định lý dưới đây.

Định lý 2. Cho M_P là một mô hình generic thỏa mãn M_P không song chỉnh hình với Q_P và $P(z') > 0$ với mọi $z' \in C^{n-1}\backslash\{0\}$. Nếu M_P là miền WB thì $Aut(M_P)$ đặc trưng bởi:

$\{T_t, S_\lambda: t \in R, \lambda > 0\} \cup G_P.$

Điều kiện P dương trên $C^{n-1}\backslash\{0\}$ đóng vai trò khá nhỏ để phát triển định lý 2, chính là điều kiện cần của định lý 6, được sử dụng như là bổ đề để chứng minh định lý 2. Theo điều kiện này, thành phần thứ n của bất kỳ nhóm tự đẳng cấu nào của M_P có thể viết dưới dạng biến đổi Mobius. Kết nối thực tế này với tính bất biến của $\overline{M_P}$ dưới phép co dãn S_λ với $\lambda > 0$ và so sánh với trọng của các hạng tử, một dạng hiện của $Aut(M_P)$ có thể hoàn toàn được mô tả.

Cách trình bày của bài báo này là như sau: trong sect.2 chúng tôi nhắc lại khái niệm đa kiểu Catlin và sự tồn tại của hàm peak tại vô hạn của $O(M_P)$ cũng được đưa ra; trong sect.3, chúng tôi đưa ra một vài khái niệm cơ bản về đa thức thuần nhất có trọng; sau đó, trong sect.4 chúng tôi đưa ra mô tả dạng hiện cho $Aut(D_P)$ và $Aut(Q_P)$. Cuối cùng, chúng tôi sẽ chứng minh chi tiết định lý 2 và đưa ra một vài ví dụ trong sect5.

2. KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

2.1 Đa kiểu Catlin

Để thuận tiện cho các kết quả nghiên cứu, chúng tôi nhắc lại đa kiểu Caltin (chi tiết hơn, chúng tôi giới thiệu xem trong [6.25]).

Cho Ω là miền trong C^n và ρ là hàm định nghĩa Ω, gần điểm $z_0 \in \partial\Omega$.

Chúng ta ký hiệu Λ^n là tập của tất cả các n-chỉ số của các số $\mu = (\mu_1,\ldots, \mu_n)$ sao cho:

i) $1 \leq \mu_1 \leq \ldots \leq \mu_n < +\infty$

ii) Với mỗi j, $\mu_j = +\infty$ hoặc tồn tại tập các số nguyên không âm $k_1, \ldots, k_n$ với $k_j > 0$ sao cho:

$$\sum_{s=1}^{j} \frac{k_s}{\mu_s} = 1$$

Trọng số $\mu \in \Lambda^n$ được gọi là "phân biệt" nếu tồn tại hệ tọa độ chỉnh hình $(z_1,\ldots, z_n)$ quanh z_0 với z_0 gắn với gốc tọa độ sao cho

$$D^{\alpha}\overline{D}^{\beta}\rho(z_0) = 0 \text{ khi } \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i+\beta_i}{\mu_i} < 1.$$

Trong đó, D^{α} và $\overline{D}^{\beta}$ lần lượt là ký hiệu cho các toán tử đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z_1^{\alpha_1}\ldots\partial z_n^{\alpha_n}} \text{ và } \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial \bar{z}_1^{\beta_1}\ldots\partial \bar{z}_n^{\beta_n}}$$

Định nghĩa 1. Đa kiểu $M(z_0)$ được gọi là có trọng nhỏ nhất $M = (m_1,\ldots, m_n)$ trong Λ^n (nhỏ nhất theo quan điểm lexicographic) sao cho $M \geq \mu$ với mọi trọng phân biệt μ.

2.2 Hàm Peak tại vô cùng đối với $O(M_P)$

Gần đây, G. Herbort chứng minh được kết quả sau đây:

Định lý 3. (Bổ đề 3.3. trong [12]) Trên miền WB-M_p, tồn tại hàm zero-free chỉnh hình F_∞ và hằng số $L_* > 0$, $N \in \mathbb{N}$ sao cho

(i) $\quad -\dfrac{\pi}{8} \leq \arg\sqrt[N]{F_\infty} \leq \dfrac{\pi}{8};$

(ii) $\quad L_*^{-1}\sigma(z) \leq |F_\infty(z)| \leq L_*\sigma(z);$

(iii) $\quad \dfrac{1}{2}\left(L_*^{-1}\sigma(z)\right)^{\frac{1}{N}} \leq \dfrac{1}{2}|F_\infty(z)|^{\frac{1}{N}} \leq \operatorname{Re}\sqrt[N]{F_\infty(z)} \leq \left(L_*\sigma(z)\right)^{\frac{1}{N}},$

trong đó $\sigma(z) := \sum_{j=1}^{n-1} |z_j|^{2m_j} + |z_n|$ với mọi $z \in \mathbb{C}^n$.

Nhận xét 1. Hàm $\sigma(z) := \exp\left(-\frac{1}{\sqrt[N]{F_\infty(z)}}\right)$ là hàm peak tại vô cùng đối với $O(M_P)$ với điều kiện là $\varphi \in O(M_P)$, với mọi $z \in M_P$ và $\lim_{M_P \ni z \to \infty} \varphi(z) = 1$.

2.3. Đa thức thuần nhất có trọng

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu một số tính chất cơ bản của đa thức thuần nhất có trọng. Trước hết là bổ đề sau đây (xem trong [8]).

Bổ đề 1. ([8]) Cho $f(x_1, x_2, ..., x_r)$ là hàm số xác định trong lân cận của gốc tọa độ trong R^r. Giả sử tồn tại $k_j \in \mathbb{N}, j = 1, ..., r,$ sao cho:

$$f\left(t^{\frac{1}{k_1}} x_1, ..., t^{\frac{1}{k_r}} x_r\right) = tf(x_1, ..., x_r),$$

Với $1 \le t \le 1 + \varepsilon$.

Khi đó f có dạng như sau:

$$f(x_1, ..., x_r) = \sum_{l_1, ..., l_r} b_{l_1, ..., l_r} x_1^{l_1} ... x_r^{l_r},$$

Trong đó $b_{l_1, ... l_r} \in \mathbb{R}$, các tổng được lấy theo tất cả r-thành phần $(l_1, ..., l_r), l_j \in \mathbb{Z}, l_j \ge 0,$ sao cho $\sum_{j=1}^{r} \frac{l_j}{k_j} = 1$.

Từ bổ đề 1, ta có thể dễ dàng thiết lập hệ quả sau đây:

Hệ quả 1. Nếu P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng $(m_1, ..., m_{n-1})$, thì

$$P(z') = \sum_{wt(K)+wt(L)} a_{KL} z'^K \bar{z}'^L, \forall z' \in \mathbb{C}^{n-1},$$

Trong đó $a_{KL} \in \mathbb{C}$ với $a_{KL} = \bar{a}_{KL}$.

Bây giờ, chúng ta chuẩn bị thêm một bổ đề nữa, được gọi là "Phương pháp Euler" để tìm trọng số của các đa thức thuần nhất, như dưới đây:

Bổ đề 2. Nếu P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng số $(m_1,...,m_{n-1})$, thì

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial P}{\partial z_j}\frac{z_j}{2m_j} = P(z'), \forall z' \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

(3)

Việc chứng minh định lý rất dễ dàng, suy từ các điều kiện về thuần nhất có trọng của đa thức P.

Lưu ý rằng mọi miền WB là kiểu hữu hạn D'Angelo. Do đó, biên của nó là biến tự do tại mọi điểm biên, và vì vậy tập {P = 0} chứa tập giải tích không tầm thường đi qua gốc tọa độ. Bổ đề sau đây khẳng định tính không duy nhất của phương pháp Euler cho đa thức thuần nhất có trọng không tổng quát.

Bổ đề 3. Cho P Là đa thức thuần nhất có trọng với trọng $(m_1,...,m_{n-1})$cho bởi (1) sao cho $\{P=0\}$chứa tập giải tích không tầm thường đi qua gốc tọa độ. Nếu tồn tại $\alpha_1,...,\alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$ sao cho

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\frac{\partial P}{\partial z_j}\frac{z_j}{2m_j} = P(z'), \forall z' \in \mathbb{C}^{n-1}.$$

(4)

thì $\alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = 1$.

Bổ đề 4. Cho P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng $(m_1,...,m_{n-1})$. Khi đó

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{n-1} i\frac{\partial P}{\partial z_j}\frac{z_j}{2m_j} = 0, \forall z' \in \mathbb{C}^{n-1},$$

Khi và chỉ khi

$$P(z') = \sum_{wt(K)=wt(L)=1/2} a_{KL} z'^{K} \bar{z}'^{L}, \forall z' \in \mathbb{C}^{n-1},$$

(5)

Trong đó $a_{KL} \in \mathbb{C}$ với $a_{KL} = \bar{a}_{KL}$.

Trường hợp đầu tiên đã biểu thị đúng với kết luận. Tiếp đến, kết luận cũng được suy ra ngay khi ta có I = J ứng với trường hợp sau.

Việc chứng minh điều kiện "đủ" suy từ tính khả vi của 2 vế của (5) theo z_j, $1 \leq j \leq n-1$.

Do đó ta chứng minh xong bổ đề.

Trong phần còn lại, chúng tôi sẽ nhắc lại một số kết quả nổi tiếng về thác triển giải tích của các song chỉnh hình tới lân cận của một điểm biên cho trước, và sau đó chúng tôi sẽ chứng minh ý chính của bổ đề mà được sử dụng trong việc chứng minh định lý 2.

Trước hết, chúng tôi định nghĩa tập chùm như sau: nếu $f : D \to \mathbb{C}^N$ là hàm chỉnh hình trên miền $D \subset \mathbb{C}^n$ và $z_0 \in \partial D,$ ta định nghĩa tập chùm $C(f, z_0)$ là tập các hàm f tại z_0 như sau:

$$C(f, z_0) = \left\{ w \in \mathbb{C}^N : w = \lim f(z_j), z_j \in D, and \ \lim z_j = z_0 \right\}.$$

A.B. Sukhov [23] đã chứng minh bổ đề dưới đây:

Bổ đề 5. (Xem hệ quả 1.4 in [23]) Giả sử D và G là các miền $C^{\infty} -$ trơn trong $\mathbb{C}^n$. Giả sử thêm rằng D và G lần lượt là giả lồi kiểu hữu hạn tại lân cận $z_0 \in \partial D$ và $w_0 \in \partial G,$ Cho f là ánh xạ song chỉnh hình từ D vào G sao cho $w_0 \in C(f, z_0)$. Khi đó f và f^{-1} lần lượt thác triển trơn tới biên ∂D trong một lân cận nào đó của điểm z_0 và $w_0,$

Xét các ánh xạ chỉnh hình giữa các miền bị chặn, chúng tôi nhắc lại định lý sau đây [trong 20, định lý 2].

Định lý 4. Cho $D, D' \subset \mathbb{C}^n, n \geq 2,$ là các miền bị chặn và cho $f : D \to D'$ là ánh xạ chỉnh hình sao cho f thác triển tới lân cận $U \subset \mathbb{C}^n$ của điểm $a \in \partial D.$ Giả sử rằng $\partial D \cap U, \partial D' \cap U'$ là siêu mặt giải tích thực kiểu hữu hạn, trong đó $U' \subset \mathbb{C}^n$ là lân cận của $f(a) \in \partial D'.$ Khi đó, f thác triển chỉnh hình tới một lân cận của $a \in \partial D.$

Như một kết quả tổng quát trong [4, bổ đề 3.2] xét trong $\mathbb{C}^2$, chúng ta có mệnh đề sau đây trong $\mathbb{C}^n$ với thành phần chính đã được chứng minh trong định lý 2.

Mệnh đề 1. Cho M_P và M_Q là hai miền WB. Giả sử $\psi : M_P \to M_Q$ là một song chỉnh hình. Khi đó, tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}$ và $z_0 \in \partial M_Q$ sao cho ψ and ψ^{-1} lần lượt thác triển giải tích tới lân cận của $(0, it_0)$ và $z_0,$.

2.4. Nhóm tự đẳng cấu D_P và Q_P

Phần này dành cho sự mô tả dạng hiện của các nhóm tự đẳng cấu D_P and Q_P, trong đó D_P and Q_P lần lượt được định nghĩa bởi

$$D_P := \left\{ (z', z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_n|^2 + P(z') < 1 \right\};$$

$$Q_P := \left\{ (z', z_n) \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_n + P(z') < 0 \right\},$$

Với

$$P(z') = \sum_{wt(K) = wt(L) = 1/2} a_{KL} z'^K \bar{z}'^L, \tag{6}$$

và $a_{KL} \in \mathbb{C}$ *with* $a_{KL} = \bar{a}_{KL}.$

Ta đã biết rằng nếu D_P là bị chặn thì $P(z') \geq 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$ (xem trong [13]). Hơn nữa, chúng ta có bổ đề sau đây để tổng quát hóa.

Bổ đề 6. Cho P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng $(m_1,...,m_{n-1})$ cho bởi (1). Khi đó, miền D_P, xác định bởi

$$D_P := \left\{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_n|^2 + P(z') < 1\right\},$$

là bị chặn trong $\mathbb{C}^n$ khi và chỉ khi $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$.

Chúng ta lưu ý rằng Aut (D_P) là non-compact do bổ đề dưới đây.

Bổ đề 7. Cho P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng $(m_1,...,m_{n-1})$ cho bởi (6) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$. Khi đó, $Aut(D_P)$ chứa các tự đẳng cấu $\phi_{a,\theta}$ xác định bởi

$$(z', z_n) \mapsto \left(\frac{\left(1-|a|^2\right)^{1/2m_1}}{\left(1-\bar{a}z_n\right)^{1/m_1}} z_1, ..., \frac{\left(1-|a|^2\right)^{1/2m_{n-1}}}{\left(1-\bar{a}z_n\right)^{1/m_{n-1}}} z_{n-1}, e^{i\theta} \frac{z_n - a}{1-\bar{a}z_n} \right),$$

Trong đó, $a \in \Delta$ và $\theta \in \mathbb{R}$.

Trước khi tiến tới những kết quả tốt hơn, các trọng số được trình bày theo các kỹ thuật chứng minh trong định lý 1 và 2.

Bổ đề 8. *Cho P là đa thức thuần nhất có trọng với các trọng số* $(m_1,...,m_{n-1})$ *cho bởi (1) sao cho* $\{P = 0\}$ *chứa tập giải tích không tầm thường đi qua gốc tọa đ. Cho* $f = (f_1,..., f_{n-1})$ *là song chỉnh hình trong các lân cận của* $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ *với* $f(0) = 0$. *Nếu* $P(f_1(z'),..., f_{n-1}(z')) = P(z')$ *với mọi* z' *trogn lân cận của* $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$, *khi đó* f *có thể thác triển tới ánh xạ tuyến tính trong* $\mathbb{C}^{n-1}$, *và hơn nữa* $f(z', z_n) := (f(z'), z_n)$ *thuộc vào* G_P.

Định lý sau đây cũng rất nổi tiếng (xem trong [2])/

Định lý 5. *Cho P là đa thức thuần nhất có trọng* $(m_1,...,m_{n-1})$ *cho bởi (6) sao cho* $P(z') > 0$ *với mọi* $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$. *Khi đó* D_P *là song chỉnh hình tương đương với* Q_P

Bây giờ chúng ta sẽ tính $\mathrm{Aut}(Q_P)$, trong đó

$$Q_P := \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^n : \mathrm{Re}\, z_n + P(z') < 0\};$$

Với P cho bỏi (6) và $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \backslash \{0\}$.

Chúng ta sẽ dùng bổ đề đầu tiên để thu được các tính toán đơn giản.

Mệnh đề 2. Cho P là đa thức thuần nhất có trọng số với trọng $(m_1, ..., m_{n-1})$ cho bởi (6) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \backslash \{0\}$. Khi đó, $\mathrm{Aut}(Q_P)$ chứa các tự đẳng cấu$f_{\alpha,\beta}, \alpha > 0$ và $\beta \in \mathbb{R}$, xác định bởi

$$(z', z_n) \mapsto \left(\frac{(\alpha)^{1/2m_1}}{(1+i\beta z_n)^{1/m_1}} z_1, ..., \frac{(\alpha)^{1/2m_{n-1}}}{(1+i\beta z_n)^{1/m_{n-1}}} z_{n-1}, \frac{\alpha z_n}{1+i\beta z_n} \right)$$

Ngược lại, nếu $\mathrm{Aut}(M_P)$ chứa các tự đẳng cấu $f_{\alpha,\beta}$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và$\alpha > 0$, $\beta \neq 0$, thì M_P chính là Q_P.

Hơn nữa, chúng ta có mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 3. Cho P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng $(m_1, ..., m_{n-1})$ cho bởi sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \backslash \{0\}$. Giả sử $\mathrm{Aut}(M_P)$ chứa các tự đẳng cấu $f_{\alpha,\beta}$ xác định bởi

$$(z', z_n) \mapsto \left(\frac{(\alpha)^{1/2m_1}}{(1+i\beta z_n)^{1/m_1}} z_1, ..., \frac{(\alpha)^{1/2m_{n-1}}}{(1+i\beta z_n)^{1/m_{n-1}}} z_{n-1}, \frac{\alpha z_n}{1+i\beta z_n} \right)$$

Với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và$\alpha > 0$,$\beta \neq 0$. Khi đó, đa thức P luôn có dạng như sau:

$$P(z') = \sum_{wt(K)=wt(L)=1/2} a_{KL} z'^K \bar{z}'^L,$$

Trong đó $a_{KL} \in \mathbb{C}$ với $a_{KL} = \bar{a}_{KL}$.

2. 5. Tự đẳng cấu của mô hình kiểu hữu hạn

Trong phần này, chúng ta chứng minh định lý 2, chính là kết quả nghiên cứu.

Trước tiên, chúng tôi nhắc lại một vài ký hiệu và khái niệm.

Đặt $S_\lambda(\lambda>0), T_s(s\in\mathbb{R})$ là nhóm tự đẳng cấu của of M_P mà lần lượt được xác định bởi

$$S_\lambda(z)=\left(\lambda^{1/2m_1}z_1,...,\lambda^{1/2m_{n-1}}z_{n-1},\lambda z_n\right);\ T_s(z)=(z',z_n+is)$$

Định nghĩa 2. Một mô hình M_P được gọi là *tubular* (resp. *rotational*) nếu M_P là song chỉnh hình tương đương với mô hình M_P, trong đó đa thức thuần nhất có trọng P thỏa mãn

$P(z_1,...,z_{n-1})=P(\operatorname{Im} z_1,z_2,...,z_{n-1})$ (resp.$P(z_1,z_2,...,z_{n-1})=P(|z_1|,z_2,...,z_{n-1})$) với mọi $z'\in\mathbb{C}^{n-1}$.

Định nghĩa 3. Mô hình M_P được gọi là *generic* nếu không song chỉnh hình tương đương với mô hình phân thức hoặc mô hình tabular nào.

Bằng cách khai triển P thành chuỗi Taylor tại $\alpha=(\alpha_1,...,\alpha_{n-1})\in\mathbb{C}^{n-1}$, ta có

$$\begin{aligned}P(z')&=\sum_{wt(K)=wt(L)=1/2} a_{KL} z'^K \bar{z}'^L,\\ &=P(\alpha)+2\operatorname{Re}\sum_{|p|>0}\frac{D^pP(\alpha)}{p!}(z'-\alpha)^p+\sum_{|p|>0,|q|>0}\frac{D^p\overline{D}^qP(\alpha)}{p!q!}(z'-\alpha)^p(\bar{z}'-\bar{\alpha})^q,\end{aligned}$$

Trong đó D^p và $\overline{D}^q$ lần lượt ký hiệu cho các toán tử vi phân

$$\frac{\partial^{|p|}}{\partial z_1^{p_1}...\partial z_{n-1}^{p_{n-1}}} \text{ and } \frac{\partial^{|q|}}{\partial \bar{z}_1^{q_1}...\partial \bar{z}_{n-1}^{q_{n-1}}}$$

Bằng cách đổi biến số

$$\begin{cases} w_n=z_n+P(\alpha)+2\sum_{|p|>0}\dfrac{D^pP(\alpha)}{p!}(z'-\alpha)^p\\ w'=z'-\alpha\end{cases}$$

Khi đó một hàm xác định cho M_P được cho bởi

$$\rho(z) = \operatorname{Re} w_n + \sum_{|p|>0,|q|>0} \frac{D^p \overline{D}^q P(\alpha)}{p!q!}(w')^p (\overline{w}')^q$$

$$= \operatorname{Re} w_n + \sum_{|p|>0,|q|>0; wt(p)+wt(q)<1} \frac{D^p \overline{D}^q P(\alpha)}{p!q!}(w')^p (\overline{w}')^q$$

$$+ \sum_{|p|>0,|q|>0; wt(p)+wt(q)=1} \frac{D^p \overline{D}^q P(\alpha)}{p!q!}(w')^p (\overline{w}')^q$$

Tiếp theo, chúng ta giử thiết rằng M_P là generic.

Hơn nữa, chúng ta đưa ra các ký hiệu sau đây

$P_{2m_1...2m_{n-1}}(\partial M_P) := \{z \in \partial M_P : M \quad (z) = (2m_1, 2m_2, ..., 2m_{n-1}, 1)\}$

$\Gamma := \{(0', it) : t \in \mathbb{R}\}.$

***Bổ đề* 9.** Cho P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng $(m_1,...,m_{n-1})$ cho bởi (1) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$. Giả sử M_P generic. Nếu tồn tại ít nhất một số nguyên trong các số $m_1,...,m_{n-1}$ lớn hơn 2, thì $P_{2m_1,...,2m_{n-1}}(\partial M_P) = \Gamma := \{(0', it) : t \in \mathbb{R}\}$.

Bây giờ chúng ta sẽ chuẩn bị để chứng minh một định lý như là một nhánh chính của định lý 2.

***Định lý* 6** Cho P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng $(m_1,...,m_{n-1})$ cho bởi (1) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$. Giả sử M_P là một mô hình generic mà không song chỉnh hình với Q_P. Giả sử $f \in Aut(M_P), f(0) = 0$ và tồn tại các lân cận U_1, U_2 of $0 \in \mathbb{C}^n$ sao cho f thác triển tới diffeomorphism địa phương giữa $U_1 \cap \overline{M_P}$ và $U_2 \cap \overline{M_P}$. Khi đó, sau khi kết hợp với $S_t\,(t>0)$ hoặc với một phần tử của G_P thì điều kiện cần là $f = \mathrm{Id}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ahn, T., Gaussier, H., Kim, K.-T.: Positivity and completeness of invariant metrics. J. Geom. Anal. **26**(2),1173-1185(2016)
2. Bedford, E., Pinchuk, S.: Convex domains with noncompact groups of automorphisms. Math. Sb. **185**(5),3-26(1994) translation in Russian Acad. Sci. Sb. Math. 82(1995), no. 1,1-20
3. Bell, S., Ligocka, E.: A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mapings. Invent. Math. **57**(3), 283-289 (1980)
4. Berteloot, F.: Characterization of models in $\mathbb{C}^2$ by their automorphism groups. Int. J. Math. 5(5), 619-634 (1994)
5. Catlin, D.: Global regularity of the $\overline{\partial}$-Neumann problem. Proc. Sympos. Pure Math. **41**, 39-49 (1984)
6. Catlin, D.:Boundary invariants of pseudoconvex domains. Ann. Math. **120**(3), 529-586 (1984)
7. D'Angelo, J.P.: A remark on finite type conditions, to appear. J. Geom. Anal. **25**(3), 1701-19719
8. Fu, S., Isaev, A., Krantz, S.: Reinhardt domains with non-compact automorphism groups. Math. Res. Lett. **3**(1), 109-122 (1996)
9. Fu, S., Isaev, A., Krantz, S.: Examples of domains with non-compact automorphism groups. Math. Res. Lett**.** **3**(5), 609-617 (1996)
10. Gaussier, H.: Characterization of convex domains with noncompact automorphism group. Michigan Math. J. **44**(2), 375-388 (1997)
11. Gaussier, H.: Tautness and complete hyperbolicity of domains in $\mathbb{C}^n$. Proc. Am. Math. Soc. **127**(1) 105-106 (1999)
12. Herbort, G.: On the Bergman distance on model domains in $\mathbb{C}^n$. Ann. Pol. Math. **116**(1), 1-36 (2016)
13. Isaev, A., Krantz, S.G.: Domains with non-compact automorphism group: a survey. Adv. Math. **146**, 1-38 (1999)
14. Kim, K.-T., Ninh, V.T.: On the tangential holomorphic vector fields vanishing at an infinite type point. Trans. Am. Math. Soc. **367**(2), 867-885 (2015)

15. Kohn, J.J., Nirenberg, L.: A pseudo-convex domain not admitting a holomorphic support function. Math. Ann. **201**, 265-268 (1973)
16. Kolar, M.: The Catlin multitype and biholomorphic equivalence of models.Int. Math. Res. Not. IMRN **18**, 3530-3548(2010)
17. Kolar, M., Meylan, F., Zaitsev, D.: Chern-Moser operators and polynomial models in CR geometry Adv. Math. **263**, 321-356 (2014)
18. Kolar, M., Meylan, F.: Higher order symmetries of real hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ .Proc. Am. Math. Soc. **144**(11), 4807-4818 (2016)
19. Ninh, V.T., Mai, A.D.: On the automorphism groups of models in $\mathbb{C}^2$. Acta Math. Vietnam. **41**(3), 457-470 (2016)
20. Pinchuk, S., Shafikov, R,: Critical sets of proper holomorphic mappings. Proc. Am. Math. Soc**. 143**, 4335-4345 (2015)
21. Rong, F., Zhang, B.: On h-extendible domains and associated models. C. R. Math. Acad. Sci. Paris **354**(9), 901-906 (2016)
22. Rosay, J.P.: Sur une caracterisation de la boule parmi les domains de $\mathbb{C}^n$ par son groupe d'automorphismes. Ann. Inst. Fourier **29**(4), 91-97 (1979)
23. Sukhov, A.B.: On the boundary regularity of holomorphic mappings, (Russian) Mat. Sb. **185** (1984), no. 12, 131-142; translation in Russian Acad. Sci. Sb. Math. **83** (1995), no. 2, 541-551
24. Wong, B.: Characterization of the unit ball in $\mathbb{C}^n$ by its automorphism group. Invent. Math. **41**(3), 253-257 (1997)
25. Yu, J.: Multitypes of convex domains. Indiana Univ. Math. J. **41**(3), 837-849 (1992)
26. Yu, J.: Peak functions on weakly pseudoconvex domains. Indiana Univ. Math. J. **43**(4), 1271-1295 (1994)