BÁO CÁO HỌC THUẬT

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ KHÔNG GIAN VECTO TOPO

ThS. Nguyễn Thị Lan Hương

1. Định nghĩa tập lồi, tập cân đối, tập hấp thụ, không gian lồi địa phương, không gian vecto tôpô (và các tính chất cơ bản nhất).

- ĐN1: Tập A trong KGVT E được gọi là *tập lồi* nếu $\forall x, y \in A$ thì $\lambda x + \mu y \in A$, trong đó $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ và $\lambda + \mu = 1$.

- ĐN2: Tập A được gọi là *tập cân đối* nếu $\forall\, x \in A$ thì $\lambda x \in A$, $\forall\, \lambda$ mà $|\lambda| \leq 1$.

- ĐN3: Tập A trong KGVT E được gọi là *tập hấp thụ* nếu $\forall\, x \in E$, $\exists\, \lambda > 0$ sao cho $x \in \mu A$, $\forall \mu$: $|\mu| \geq \lambda$.

- ĐN4: Không gian vecto trên trường K, trên đó có trang bị một tô pô tương thích với cấu trúc đại số được gọi là *không gian vecto tô pô*.

- ĐN5: Không gian vecto tô pô E gọi là *không gian lồi địa phương* nếu E có 1 cơ sở lân cận gồm các tập lồi.

1. Định nghĩa tập lồi, tập cân đối, tập hấp thụ, không gian lồi địa phương, không gian vecto tôpô (và các tính chất cơ bản nhất).

* Tính chất 1: Mọi lân cận của $x \in E$ nhận được bởi sự tịnh tiến lân cận nào đó của $0 \in E$. Tức là, U là một lân cận của $x \in E \Leftrightarrow$ tồn tại lân cận V của $0 \in E$ sao cho $U = x + V$.

* Tính chất 2: Bội vô hướng khác 0 của một 0-lân cận là một 0-lân cận.

* Tính chất 3: Mọi 0-lân cận U là hút, nghĩa là với mọi $x \in E$, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $\lambda x \in U$ với mọi $|\lambda| < \varepsilon$, và có một 0-lân cận V để $V + V \subset U$.

*Tính chất 4: Mọi 0-lân cận chứa một 0-lân cận cân. (0-lân cận U gọi là cân nếu $\lambda x \in U$ $\forall \lambda$: $|\lambda| \leq 1$ $\forall x \in U$).

2. Chứng minh bao đóng của tập lồi là tập lồi, bao đóng của tập cân đối là cân đối.

+Giả sử A là tập lồi, $\bar{A}$ là bao đóng của A.

Xét x, y $\in \bar{A}$, ta có $\begin{cases} \exists U \in V(x): x \quad U \quad A \\ \exists V \in V(y): y \quad V \quad A \end{cases}$

$\forall$ $\alpha \in$ [0, 1], dễ thấy (αU + (1-α)V) $\in$V(αx + (1-α)y)

Mà (αU + (1-α)V) $\subset$ (αA + (1-α)A) = A (do A lồi)

Vậy: (αx + (1-α)y) $\in$ $\bar{A}$ $\forall$ $\alpha \in$ [0, 1], $\forall$ x, y $\in \bar{A}$.

2. Chứng minh bao đóng của tập lồi là tập lồi, bao đóng của tập cân đối là cân đối.

+Giả sử B là tập cân đối. Xét x $\in \bar{B}$. Xét λ: $0 < |\lambda| \leq 1$.

Với $\forall U \in V(\lambda x) \Rightarrow \frac{1}{\lambda}U \in V(x) \Rightarrow \frac{1}{\lambda}U \cap B \neq \phi$.

Suy ra $\exists y \in \frac{1}{\lambda}U \cap B \Rightarrow \begin{cases} \lambda y \in U \\ \lambda y \in B \end{cases}$ (do B cân đối và $|\lambda| \leq 1$)

Do đó, $U \cap B \neq \phi$ $\forall$ $U \in V(\lambda x) \Rightarrow \lambda x \in \bar{B}$ $\forall$ λ thỏa mãn: $0 < |\lambda| \leq 1$.

Nếu $\lambda = 0 \Rightarrow \forall$ x $\in \bar{B}$: $0 = \lambda x \in B \subset \bar{B}$.

Như vậy, $\lambda x \in \bar{B}$ $\forall \bar{B}$, $\forall$ λ thỏa mãn: $0 < |\lambda| \leq 1$.

Vậy $\bar{B}$ là tập cân đối.

3. Định nghĩa phiếm hàm Minkowski.

Phiếm hàm Minkowski của một tập tuyệt đối lồi, hấp thụ là một nửa chuẩn.

ĐN1: Giả sử E là KGVT trên trường K. Một p: E $\to$ R được gọi là nửa chuẩn trên E nếu nó thỏa mãn các điều kiện:

1) $p(x) \geq 0$,
2) $p(\lambda x) = |\lambda|.p(x), \forall x \in E, \forall \lambda \in K$,
3) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x, y \in E$.

ĐN2: Với mỗi tập tuyệt đối lồi, hấp thụ $A \subset E$, có tương ứng một nửa chuẩn p_A:

$$P_A(x) = \inf\{\lambda : \lambda > 0, x \in \lambda A\}$$

Nửa chuẩn tương ứng với tập hợp tuyệt đối lồi xác định như trên được gọi là phiếm hàm Minkowski của A.

4. Chứng minh:

a) Trong không gian lồi địa phương E, nửa chuẩn p liên tục khi và chỉ khi nó liên tục tại O.

b) Phiếm hàm Minskowski P_u của tập tuyệt đối lồi, hấp thụ U là liên tục khi và chỉ khi U là lân cận của O.

a) Nếu p liên tục tại 0 thì $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ lân cận V sao cho: $\forall x \in V$: $p(x) = |p(x)| = |p(x) - p(0)| < \varepsilon$.

Với a tùy ý $\in E$: $|p(x) - p(a)| \leq p(x - a) < \varepsilon \ \forall \ x \in a + V$.

Vậy p liên tục tại a bất kỳ.

4. Chứng minh:

a) Trong không gian lồi địa phương E, nửa chuẩn p liên tục khi và chỉ khi nó liên tục tại O.

b) Phiếm hàm Minskowski P_u của tập tuyệt đối lồi, hấp thụ U là liên tục khi và chỉ khi U là lân cận của O.

b) + Nếu U là lân cận thì $\forall \varepsilon > 0$: $p_U(x) \leq \varepsilon \ \forall \ x \in \varepsilon U$ là lân cận.

Vậy p_U liên tục tại 0.

+ Giả sử p_U liên tục tại 0: $\{x: p_U(x) < 1\}$ là tập mở $\subset$ U.

$0 \in \{x: p_U(x) < 1\} \Rightarrow$ U là lân cận của 0.

$V = \{ x: p_U(x) < 1\} \Rightarrow \bar{V} = \{ x: p_U(x) \leq 1\}$

$\Rightarrow V \subset U \subset \bar{V}$

$\Rightarrow \dot{U} = V$ và $\bar{U} = \bar{V}$.

5. Trình bày định lý Hahn-Banach về tách tập lồi.

Định lý: Cho E là không gian lồi địa phương, A, B là các tập lồi sao cho $A \cap B = \phi$. Khi đó, nếu A là tập mở thì tồn tại $f \in E'$ sao cho: $f(A) \cap f(B) = \phi$.

Chứng minh

Ta có A – B là lồi, A mở $\Rightarrow$ A – B mở, $A \cap B = \phi$ nên $0 \notin A - B$.

Do đó, tồn tại siêu không gian con đóng $H = f^{-1}(0)$ $(f \in E', f \neq 0)$

Sao cho $0 \in H$, $H \cap (A - B) = \phi$.

Vậy $0 \notin f(A - B)$.

Suy ra $f(A) \cap f(B) = \phi$.

6. Định nghĩa tập gần compact (hoàn toàn bị chặn). Chứng minh tập gần compact là tập bị chặn.

*ĐN: Giả sử U là lân cận tùy ý trong KG lồi địa phương E. $A \subset E$ được gọi là có độ nhỏ cấp U nếu $x - y \in U \ \forall x, y \in A$.

Tập hợp A được gọi là tập gần compact (hoàn toàn bị chặn) nếu với mọi lân cận tuyệt đối lồi $U \subset E$, A có thể phủ được bằng 1 số hữu hạn các tập có độ nhỏ cấp U, tức là $A \subset \cup A_i$, $i = 1,\ldots,n$ và A_i có độ nhỏ cấp U.

6. Định nghĩa tập gần compact (hoàn toàn bị chặn). Chứng minh tập gần compact là tập bị chặn.

*Tập gần compact là tập bị chặn

Chứng minh

A là tập gần compact. U là lân cận bất kỳ tuyệt đối lồi $\Rightarrow \exists\, a_i$, i = 1,…,n sao cho

$$A \subset \cup(a_i + U) \text{ với } i = 1,\ldots,n$$

Do U là tập hấp thụ nên tồn tại $\lambda_i \geq 0$, i = 1,…., n: $a_i \in \lambda_i U$.

Chọn $\lambda \geq \max \lambda_i + 1$

Suy ra $A \subset \cup(a_i + U) \subset \cup(\lambda_i U + U) \subset \lambda U$.

Vậy A bị chặn.

7. Chứng minh nếu A, B là tập cân đối thì A + B là tập cân đối.

Chứng minh hợp, giao của một họ bất kỳ các tập cân đối là tập cân đối.

* Nếu A, B là tập cân đối thì A + B là tập cân đối

Chứng minh

$\forall$ x $\in$ A, $\forall$ y $\in$B, $\forall$ λ $\in$ K thỏa mãn $|\lambda| \leq 1$, ta có:

$\lambda(x + y) = (\lambda x + \lambda y) \in A + B$ vì $\lambda x \in A$ và $\lambda y \in B$.

Vậy A + B là tập cân đối.

7. Chứng minh nếu A, B là tập cân đối thì A + B là tập cân đối.

Chứng minh hợp, giao của một họ bất kỳ các tập cân đối là tập cân đối.

* Hợp, giao của một họ bất kỳ các tập cân đối là tập cân đối

Chứng minh

Xét họ $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in I$ các tập cân đối.

+Đặt $U = \cup U_\alpha$

Lấy $x \in U$ thì tồn tại $\alpha \in I$ sao cho: $x \in U_\alpha$.

Do đó $\forall\ \lambda \in K$ với $|\lambda| \leq 1$: $\lambda x \in U_\alpha \subset U$.

Vậy U là tập cân đối.

+ $V = \cap V_\alpha$

Lấy $x \in V$ thì tồn tại $\alpha \in I$ sao cho: $x \in U_\alpha$.

Do đó $\forall\ \lambda \in K$ với $|\lambda| \leq 1$: $\lambda x \in U_\alpha \subset U \Rightarrow \lambda x \in V = \cap U_\alpha\ \forall \lambda \in K$: $|\lambda| \leq 1$

Vậy V là tập cân đối.

8. Trong không gian C(R) (các hàm liên tục trên R), ta xác định tôpô nhờ metric

$$\boldsymbol{d(f,g) = \sup_{x\in R} \frac{|f(x)-g(x)|}{1+|f(x)-g(x)|}}$$

Không gian C(R) với phép toán tuyến tính thông thường có là KG vecto topo không?

Chứng minh

* Dễ thấy d là metric vì thỏa mãn 3 tính chất của metric.

* Do trong KGVT tô pô, mọi lân cận đều là tập hút nên nếu chứng minh được hình cầu đơn vị B(0, 1) không là tập hút thì ta có ĐPCM.

Xét B(0, 1) = {f ∈ C(R): d(f, 0) < 1}.

Xét hàm số g(x) = x, g ∈ C(R).

Giả sử B(0, 1) là tập hút ⇒∃ λ > 0 để g ∈ λB(0, 1)

⇒ ∃ f ∈ B(0, 1): g = λf ⇔ f= $\frac{1}{\lambda}$g.

Suy ra: $d(f,0) = \sup_{x\in R} \frac{|\frac{1}{\lambda}g|}{1+|\frac{1}{\lambda}g|} = \sup_{x\in R} \frac{|\frac{x}{\lambda}|}{1+|\frac{x}{\lambda}|} = 1.$

Do đó, f ∉ B(0, 1) – mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy B(0, 1) không là tập hút.

Vậy C(R) không là KGVT tô pô.

KẾT LUẬN

Báo cáo học thuật đã cung cấp một số khái niệm và kết quả trong không gian vecto topo, giúp cho người đọc có thể nắm bắt được những nét đặc trưng nhất của không gian này.