

CÁC DẠNG ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

NGUYỄN THỊ HIỀN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT
Ngày 24 tháng 5 năm 2019

1 MỞ ĐẦU

2 NỘI DUNG

- Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ
 - 1.1. Đồ thị và phân loại đồ thị
 - 1.2. Các thuật ngữ cơ bản
 - 1.3. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông
 - 1.4. Một số dạng đồ thị đơn đặc biệt
 - 1.5. Biểu diễn đồ thị
- Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT
 - 2.1. Đồ thị EULER
 - 2.2. Đồ thị HALMILTON
 - 2.3. Tô màu đồ thị

3 KẾT LUẬN

1 MỞ ĐẦU

2 NỘI DUNG

- Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ
 - 1.1. Đồ thị và phân loại đồ thị
 - 1.2. Các thuật ngữ cơ bản
 - 1.3. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông
 - 1.4. Một số dạng đồ thị đơn đặc biệt
 - 1.5. Biểu diễn đồ thị
- Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT
 - 2.1. Đồ thị EULER
 - 2.2. Đồ thị HALMILTON
 - 2.3. Tô màu đồ thị

3 KẾT LUẬN

Lý thuyết đồ thị là một lĩnh vực được phát triển từ rất lâu, được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu nó có vai trò hết sức quan trọng trong nhiều lĩnh vực. Nó đã được nghiên cứu từ lâu và có nhiều ứng dụng trong nhiều ngành khoa học nói chung và khoa học máy tính nói riêng. Bài viết này nghiên cứu lý thuyết đồ thị nói chung và các dạng đồ thị đặc biệt.

1 MỞ ĐẦU

2 NỘI DUNG

- Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ
 - 1.1. Đồ thị và phân loại đồ thị
 - 1.2. Các thuật ngữ cơ bản
 - 1.3. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông
 - 1.4. Một số dạng đồ thị đơn đặc biệt
 - 1.5. Biểu diễn đồ thị
- Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT
 - 2.1. Đồ thị EULER
 - 2.2. Đồ thị HALMILTON
 - 2.3. Tô màu đồ thị

3 KẾT LUẬN

Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

A. Định nghĩa

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh đó. Ký hiệu $G = (V, E)$ trong đó V là tập các đỉnh và E là tập các cạnh.

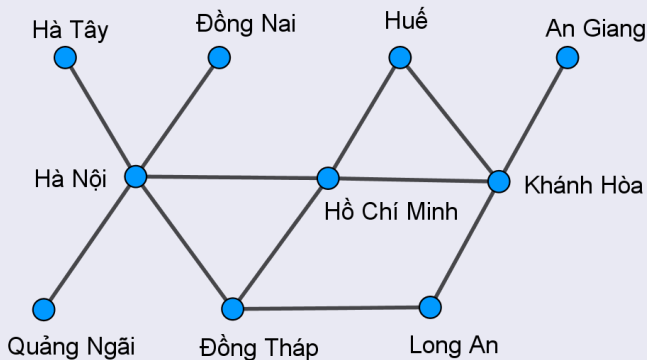
B. Phân loại:

- Đơn đồ thị vô hướng
- Đa đồ thị vô hướng
- Giả đồ thị
- Đơn đồ thị có hướng
- Đa đồ thị có hướng

Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

a) Đơn đồ thị vô hướng

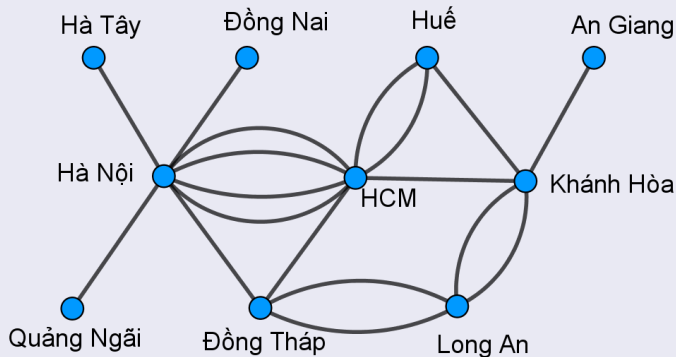
Một đơn đồ thị $G = (V, E)$ gồm V tập các đỉnh, E là **tập** các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh.



Hình: Sơ đồ mạng máy tính là **đơn đồ thị vô hướng**

b) Đa đồ thị vô hướng

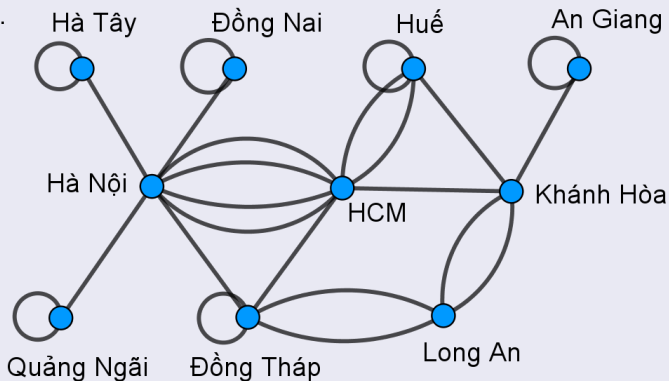
Một đa đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ gồm một tập các đỉnh V , E là **họ** các cặp không có thứ tự hai phần tử khác nhau của V . Các cạnh e_1 và e_2 được gọi là cạnh lặp nếu cùng tương ứng với 1 cặp đỉnh.



Hình: Sơ đồ mạng máy tính là **đa đồ thị vô hướng**

c) Giả đồ thị:

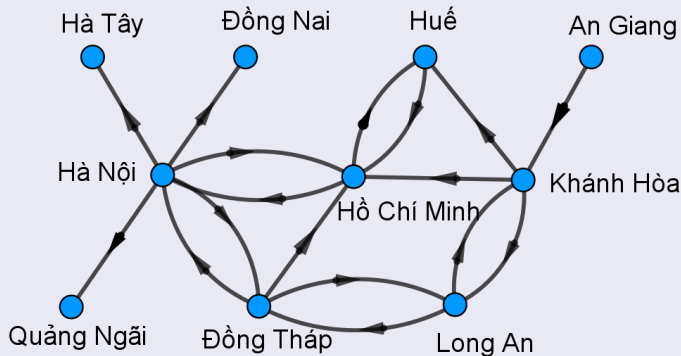
Một giả đồ thị $G = (V, E)$ gồm một tập các đỉnh V , một tập các cạnh E là **họ** các cặp không có thứ tự hai phần tử (không nhất thiết khác nhau) của V . Một cạnh là khuyên nếu nó có dạng $e = (u, u)$ với một đỉnh u nào đó.



Hình: Sơ đồ mạng máy tính là **giả đồ thị vô hướng**

d) Đơn đồ thị có hướng

Một đồ thị có hướng $G = (V, E)$ gồm tập các đỉnh V và E là các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung.



Hình: Sơ đồ mạng máy tính là **đơn đồ thị có hướng**

e) Đa đồ thị có hướng

Một đa đồ thị có hướng $G = (V, E)$ gồm tập các đỉnh V và E là các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung. Hai cung e_1 và e_2 tương ứng với 1 cặp đỉnh gọi là cung lặp.

Ta chỉ làm việc với đơn đồ thị vô hướng và đơn đồ thị có hướng nên ta sẽ bỏ qua từ **đơn** khi nhắc đến.

1.2. Các thuật ngữ cơ bản

a. Định nghĩa 1 (Đỉnh liền kề)

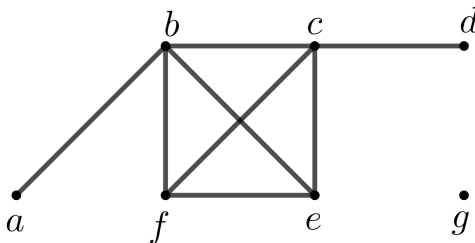
Hai đỉnh u và v trong một đồ thị vô hướng G được gọi là liền kề (hay láng giềng) nếu (u, v) là cạnh của G . Nếu $e = (u, v)$ thì e gọi là cạnh liên thuộc với các đỉnh u và v . Cạnh e cũng được gọi là cạnh nối các đỉnh u và v . Các đỉnh u và v gọi là các đỉnh đầu của cạnh (u, v) .

b. Định nghĩa 2 (Bậc của một đỉnh)

Bậc của một đỉnh trong đồ thị vô hướng là số các cạnh liên thuộc với nó, riêng khuyên tại một đỉnh được tính hai lần cho bậc của nó. Người ta ký hiệu bậc của đỉnh v là $\deg(v)$.

Đỉnh v gọi là đỉnh treo nếu $\deg(v) = 1$ và gọi là đỉnh cô lập nếu $\deg(v) = 0$, cạnh có đỉnh cuối là đỉnh treo gọi là cạnh treo.

Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ



Hình: Đồ thị vô hướng G

c. Định lý 1 (Định lý bắt tay)

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị vô hướng có e cạnh. Khi đó

$$2e = \text{Sum}(\deg(v)).$$

d. Định lý 2

Một đồ thị vô hướng có một số chẵn đỉnh bậc lẻ.

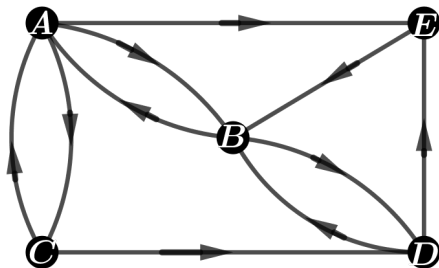
e. Định nghĩa 3

Khi (u, v) là cung của đồ thị có hướng G , thì u được gọi là nôi tới v , và v được gọi là được nôi tới u . Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, đỉnh v gọi là đỉnh cuối của cạnh (u, v) . Đỉnh đầu và đỉnh cuối của khuyên là trùng nhau.

f. Định nghĩa 4

Trong đồ thị có hướng bậc — vào của đỉnh v ký hiệu là $\deg^-(v)$ là số các cạnh có đỉnh cuối là v . Bậc — ra của đỉnh v , ký hiệu là $\deg^+(v)$ là số các cạnh có đỉnh đầu là v .

Đỉnh có bậc vào và bậc ra cùng bằng 0 gọi là đỉnh cô lập. Đỉnh có bậc vào bằng 1 và bậc ra bằng 0 gọi là đỉnh treo, cạnh có đỉnh cuối là đỉnh treo gọi là cạnh treo.



Hình: Đồ thị có hướng G

g. Định lý 3

Gọi $G = (V, E)$ là một đồ thị có hướng. Khi đó:

$$\text{Sum}(\deg^-(v)) = \text{Sum}(\deg^+(v)) = |E|.$$

1.3. Đường đi, chu trình. Đồ thị liên thông

a. Đường đi; chu trình

Đường đi độ dài n từ đỉnh u tới đỉnh v , với n là số nguyên dương, trong một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ là một dãy các cạnh $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, trong đó với $x_0 = u, x_n = v$.

Đường đi còn có thể biểu diễn dưới dạng dãy các cạnh

$$(x_0, x_1); (x_1, x_2); \dots; (x_{n-1}, x_n).$$

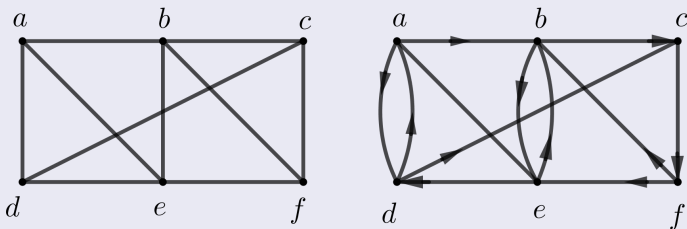
Đỉnh u gọi là đỉnh đầu; v là đỉnh cuối của đường đi.

Đường đi được gọi là **một chu trình** nếu nó bắt đầu và kết thúc tại cùng một đỉnh, tức $u = v$.

Đường đi hoặc chu trình được gọi là đơn nếu nó không chứa cùng một cạnh quá hai lần.

1.3. Đường đi, chu trình. Đồ thị liên thông

a. Đường đi; chu trình



Hình: Đường đi trên đồ thị

Khái niệm đường đi và chu trình trên đồ thị có hướng hoàn toàn tương tự, chỉ có điều ta chú ý đến hướng trên các cung.

1.3. Đường đi, chu trình. Đồ thị liên thông

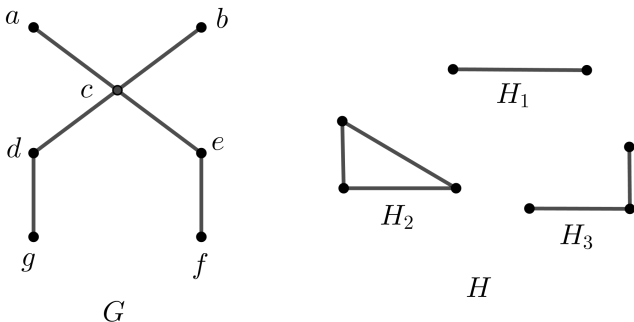
b) Tính liên thông trong đồ thị

- Tính liên thông trong đồ thị vô hướng:

Một đồ thị vô hướng được gọi là liên thông nếu có đường đi giữa mọi cặp đỉnh phân biệt của đồ thị.

- Ta gọi đồ thị con của đồ thị (V, E) là đồ thị $(W; F)$ trong đó V chứa W và E chứa F .
- Trong trường hợp đồ thị không liên thông, nó sẽ rã ra thành 1 số đồ thị con liên thông đôi một không có đỉnh chung. Những đồ thị con liên thông như vậy gọi là các **thành phần liên thông** của đồ thị.

1.3. Đường đi, chu trình. Đồ thị liên thông



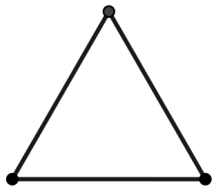
Hình: Đồ thị liên thông G và đồ thị H gồm 3 thành phần liên thông H_1 , H_2 , H_3 .

- Tính liên thông trong đồ thị có hướng:

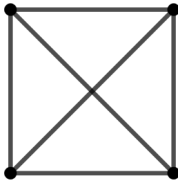
- Đồ thị có hướng được gọi là **liên thông mạnh** nếu có đường đi từ a tới b và từ b tới a với mọi đỉnh a và b của đồ thị.
- Đồ thị có hướng được gọi là **liên thông yếu** nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là đồ thị vô hướng liên thông.
- Nếu đồ thị là liên thông mạnh thì nó sẽ là liên thông yếu. Nhưng ngược lại không đúng.

1.4. Một số dạng đồ thị đơn đặc biệt

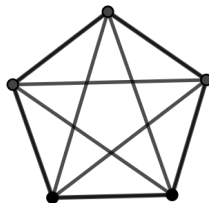
1.4.1. Đồ thị đầy đủ: Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu bởi K_n là đơn đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh của nó luôn luôn có cạnh nối.



K_3



K_4

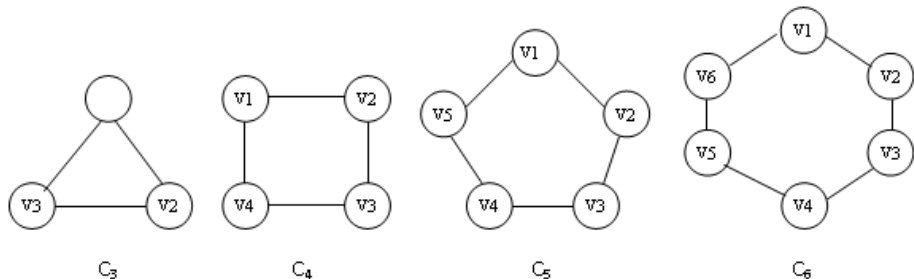


K_5

Hình: Đồ thị đầy đủ

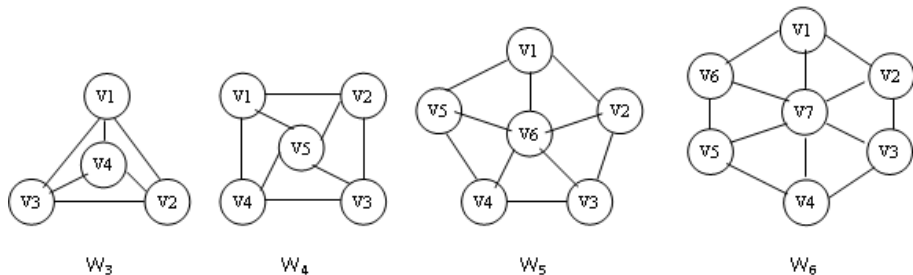
1.4. Một số dạng đồ thị đơn đặc biệt

Đồ thị vòng: Đồ thị vòng C_n ; $n \geq 3$ gồm n đỉnh $v_1; v_2; \dots; v_n$; và các cạnh $(v_1; v_2); (v_2; v_3); \dots; (v_{n-1}; v_n); (v_n; v_1)$. Đồ thị vòng cho bởi hình vẽ:



Hình: Đồ thị vòng

1.4.2. Đồ thị hình bánh xe: Đồ thị W_n thu được từ C_n bằng cách bổ sung vào 1 đỉnh mới nối tất cả các đỉnh của C_n .



Hình: Đồ thị bánh xe

Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

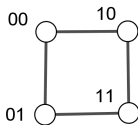
Đồ thị lập phương: Đồ thị lập phương n đỉnh Q_n là đồ thị với các đỉnh biểu diễn 2^n xâu nhị phân độ dài n . Hai đỉnh của nó là kề nhau nếu như 2 xâu nhị phân tương ứng chỉ khác nhau 1 bit. Trên hình vẽ là Q_n với $n = 0; 1; 2; 3; 4$.



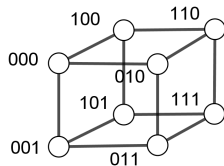
$n = 0$



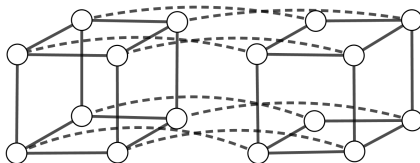
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$

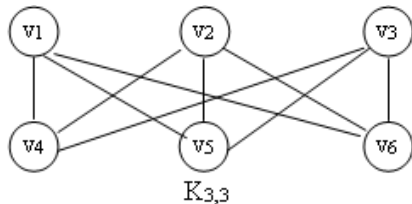
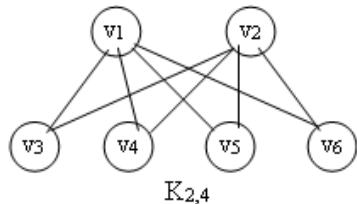
Hình: Đồ thị lập phương

1.4.3. Đồ thị phân đôi

a. Định nghĩa 5:

Một đơn đồ thị G được gọi là đồ thị phân đôi nếu tập các đỉnh V có thể phân làm hai tập con không rỗng, rời nhau V_1 và V_2 sao cho mỗi một cạnh của đồ thị nối một đỉnh của V_1 với một đỉnh của V_2 .

b. Ví dụ:



1. 5. Biểu diễn đồ thị

1.5.1. Biểu diễn đồ thị:

Một cách biểu diễn đồ thị là liệt kê tất cả các cạnh của đồ thị. Nói cách khác để biểu diễn đồ thị ta dùng danh sách liền kề. Danh sách này chỉ rõ các đỉnh nối với mỗi cạnh của đồ thị.

1.5.2. Ma trận liền kề:

a. Định nghĩa:

Cho đồ thị $G = (V, E)$ (vô hướng hoặc có hướng), với $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Ma trận liền kề của G ứng với thứ tự các đỉnh v_1, v_2, \dots, v_n là ma trận

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M(n, Z),$$

trong đó a_{ij} là số cạnh hoặc cung nối từ v_i tới v_j .

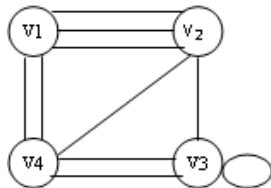
Như vậy, ma trận liền kề của một đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng, nghĩa là $a_{ij} = a_{ji}$, trong khi ma trận liền kề của một đồ thị có hướng không có tính đối xứng.

1.5.2. Ma trận liên kề:

b. Ví dụ:

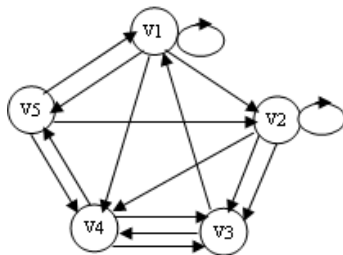
Ví dụ 1: Ma trận liên kề với thứ tự các đỉnh v_1, v_2, v_3, v_4 là:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$



Ví dụ 2: Ma trận liên kề với thứ tự các đỉnh v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 là:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



1.5.3 Ma trận liên thuộc:

a. Định nghĩa:

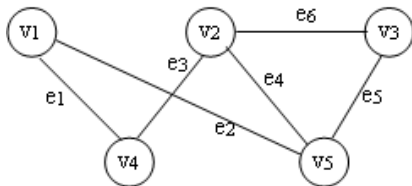
Cho đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, v_1, v_2, \dots, v_n là các đỉnh và e_1, e_2, \dots, e_m là các cạnh của G . Ma trận liên thuộc của G theo thứ tự trên của V và E là ma trận

$$M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m} \in M(n \times m, \mathbb{Z}),$$

m_{ij} bằng 1 nếu cạnh e_j nối với đỉnh v_i và bằng 0 nếu cạnh e_j không nối với đỉnh v_i .

b. Ví dụ: Ma trận liên thuộc theo thứ tự các đỉnh v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 và các cạnh $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ là:

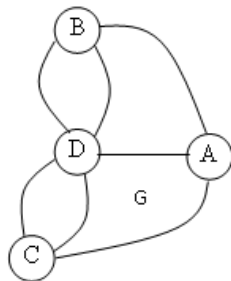
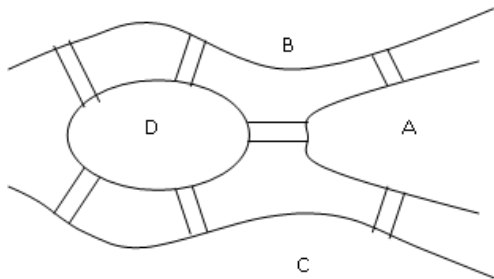
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



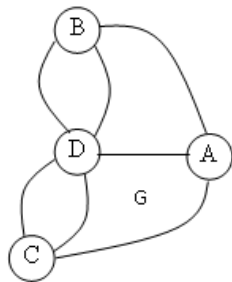
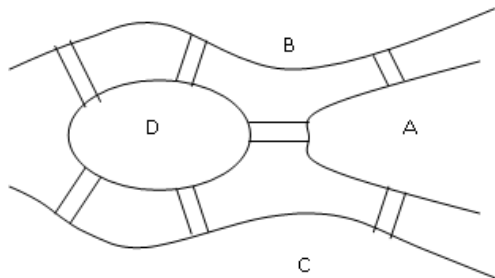
Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

2.1. Đồ thị EULER:

Có thể coi năm 1736 là năm khai sinh lý thuyết đồ thị, với việc công bố lời giải “bài toán về các cầu ở Königsberg” của nhà toán học lỗi lạc Euler (1707-1783). Thành phố Königsberg thuộc Phổ (nay gọi là Kaliningrad thuộc Nga) được chia thành bốn vùng bằng các nhánh sông Pregel, các vùng này gồm hai vùng bên bờ sông, đảo Kneiphof và một miền nằm giữa hai nhánh của sông Pregel. Vào thế kỷ 18, người ta xây bảy chiếc cầu nối các vùng này với nhau.



Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT



Dân thành phố từng thắc mắc: “Có thể xuất phát từ một điểm nào đó trong thành phố đi qua tất cả bảy cầu, mỗi cầu chỉ một lần thôi không? Và có thể quay về điểm xuất phát được không?”. Nếu ta coi mỗi khu vực A, B, C, D như một đỉnh và mỗi cầu qua lại hai khu vực là một cạnh nối hai đỉnh thì ta có sơ đồ của Königsberg là một đa đồ thị G như hình trên.

Bài toán tìm đường đi qua tất cả các cầu, mỗi cầu chỉ qua một lần có thể được phát biểu lại bằng mô hình này như sau: Có tồn tại một chu trình đơn trong đa đồ thị G chứa tất cả các cạnh hay không?

Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

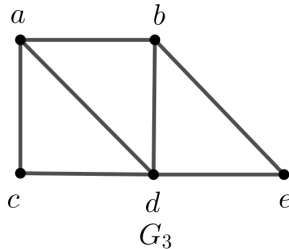
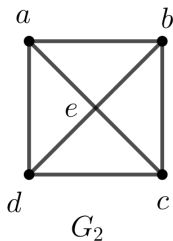
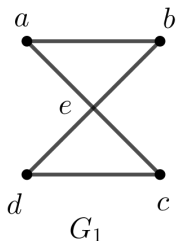
a) Định nghĩa:

Chu trình đơn trong G đi qua mỗi cạnh của nó 1 lần của đồ thị (vô hướng hoặc có hướng) được gọi là chu trình Euler.

Đường đi đơn trong G đi qua mỗi cạnh của nó 1 lần của đồ thị được gọi là chu trình Euler.

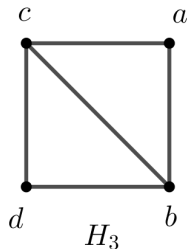
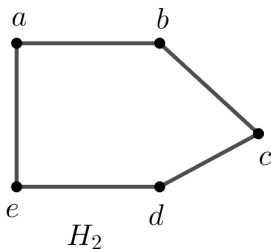
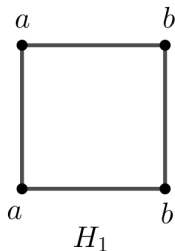
Một đồ thị có chu trình Euler được gọi là đồ thị Euler. Đồ thị có chứa đường đi Euler gọi là đồ thị nửa Euler.

Ví dụ 1:



Hình: Đồ thị G_1, G_2, G_3

Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT



Hình: Đồ thị H_1 , H_2 , H_3

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là đồ thị Euler được Euler tìm ra vào năm 1736 khi ông giải quyết bài toán học búa nổi tiếng thời đó về bảy cây cầu ở Königsberg và đây là định lý đầu tiên của lý thuyết đồ thị.

b) Bổ đề:

Nếu bậc của mỗi đỉnh của đồ thị G không nhỏ hơn 2 thì G chứa chu trình đơn.

c) Định lý:

Đồ thị (vô hướng) liên thông G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

d) Hệ quả:

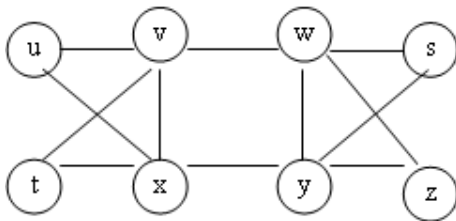
Đồ thị liên thông G là nửa Euler (mà không là Euler) khi và chỉ khi có đúng hai đỉnh bậc lẻ trong G .

e) Chú ý:

Ta có thể vạch được một chu trình Euler trong đồ thị liên thông G có bậc của mọi đỉnh là chẵn theo thuật toán Fleury sau đây.

Xuất phát từ một đỉnh bất kỳ của G và tuân theo hai quy tắc sau:

1. Mỗi khi đi qua một cạnh nào thì xoá nó đi; sau đó xoá đỉnh cô lập (nếu có);
2. Không bao giờ đi qua một cầu, trừ phi không còn cách đi nào khác.



f) Định lý:

Đồ thị có hướng liên thông yếu G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc vào bằng bậc ra.

g) Bổ đề:

Nếu bậc vào và bậc ra của mỗi đỉnh của đồ thị có hướng G không nhỏ hơn 1 thì G chứa chu trình đơn.

h) Hệ quả:

Đồ thị có hướng liên thông yếu G là nửa Euler (mà không là Euler) khi và chỉ khi tồn tại hai đỉnh x và y sao cho:

$$\deg_o(x) = \deg_t(x) + 1, \deg_t(y) = \deg_o(y) + 1, \deg_t(v) = \deg_o(v), \\ \forall v \in V, v \neq x, v \neq y.$$

2. 2 Đồ thị HAMILTON:

Năm 1857, nhà toán học người Ailen là Hamilton (1805-1865) đưa ra trò chơi “đi vòng quanh thế giới” như sau:

Cho một hình thập nhị diện đều (đa diện đều có 12 mặt, 20 đỉnh và 30 cạnh), mỗi đỉnh của hình mang tên một thành phố nổi tiếng, mỗi cạnh của hình (nối hai đỉnh) là đường đi lại giữa hai thành phố tương ứng. Xuất phát từ một thành phố, hãy tìm đường đi thăm tất cả các thành phố khác, mỗi thành phố chỉ một lần, rồi trở về chỗ cũ.

Trước Hamilton, có thể là từ thời Euler, người ta đã biết đến một câu đố học búa về “đường đi của con mã trên bàn cờ”. Trên bàn cờ, con mã chỉ có thể đi theo đường chéo của hình chữ nhật 2×3 hoặc 3×2 ô vuông. Giả sử bàn cờ có 8×8 ô vuông. Hãy tìm đường đi của con mã qua được tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô chỉ một lần rồi trở lại ô xuất phát.

Bài toán này được nhiều nhà toán học chú ý, đặc biệt là Euler, De Moivre, Vandermonde, ...

2. 2 Đồ thị HAMILTON:

Hiện nay đã có nhiều lời giải và phương pháp giải cũng có rất nhiều, trong đó có quy tắc: mỗi lần bố trí con mã ta chọn vị trí mà tại vị trí này số ô chưa dùng tới do nó khống chế là ít nhất.

Một phương pháp khác dựa trên tính đối xứng của hai nửa bàn cờ. Ta tìm hành trình của con mã trên một nửa bàn cờ, rồi lấy đối xứng cho nửa bàn cờ còn lại, sau đó nối hành trình của hai nửa đã tìm lại với nhau.

Trò chơi và câu đố trên dẫn tới việc khảo sát một lớp đồ thị đặc biệt, đó là **đồ thị Hamilton**.

Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

a. Định nghĩa:

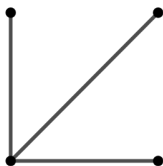
Đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị mỗi đỉnh đúng 1 lần gọi là đường đi Hamilton.

Chu trình bắt đầu từ 1 đỉnh V nào đó qua tất cả các đỉnh còn lại, mỗi đỉnh đúng 1 lần rồi quay trở về V gọi là chu trình Hamilton.

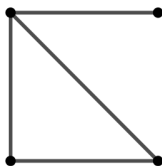
Đồ thị G có chứa một chu trình Hamilton được gọi là đồ thị Hamilton.

Đồ thị G có chứa một đường đi Hamilton được gọi là đồ thị nửa Hamilton.

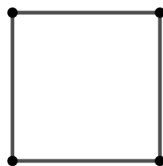
b. Ví dụ:



G_1



G_2



G_3

Hình: Đồ thị Hamilton G_3 , nửa Hamilton G_2 , và G_1

Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Đường đi Hamilton tương tự đường đi Euler trong cách phát biểu: Đường đi Euler qua mọi cạnh (cung) của đồ thị đúng một lần, đường đi Hamilton qua mọi đỉnh của đồ thị đúng một lần. Tuy nhiên, nếu như bài toán tìm đường đi Euler trong một đồ thị đã được giải quyết trọn vẹn, dấu hiệu nhận biết một đồ thị Euler là khá đơn giản và dễ sử dụng, thì các bài toán về tìm đường đi Hamilton và xác định đồ thị Hamilton lại khó hơn rất nhiều. Đường đi Hamilton và đồ thị Hamilton có nhiều ý nghĩa thực tiễn và đã được nghiên cứu nhiều, nhưng vẫn còn những khó khăn lớn chưa ai vượt qua được.

Người ta chỉ mới tìm được một vài điều kiện đủ để nhận biết một lớp rất nhỏ các đồ thị Hamilton và đồ thị nửa Hamilton. Sau đây là một vài kết quả.

c. Định lý (Dirac, 1952):

Nếu G là một đơn đồ thị có n đỉnh và mọi đỉnh của G đều có bậc không nhỏ hơn $\frac{n}{2}$ thì G là một đồ thị Hamilton.

d. Hệ quả:

Nếu G là đơn đồ thị có n đỉnh và mọi đỉnh của G đều có bậc không nhỏ hơn $\frac{n-1}{2}$ thì G là đồ thị nửa Hamilton.

e. Định lý (Ore, 1960):

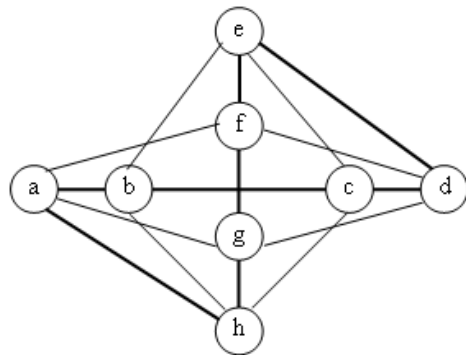
Nếu G là một đơn đồ thị có n đỉnh và bất kỳ hai đỉnh nào không kề nhau cũng có tổng số bậc không nhỏ hơn n thì G là một đồ thị Hamilton.

f. Định lý:

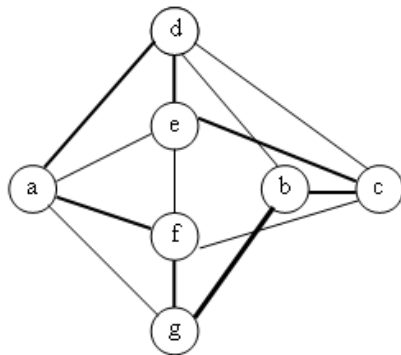
Nếu G là đồ thị phân đôi với hai tập đỉnh là V_1, V_2 có số đỉnh cùng bằng n ($n \geq 2$) và bậc của mỗi đỉnh lớn hơn $\frac{n}{2}$ thì G là một đồ thị Hamilton.

Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

Ví dụ:

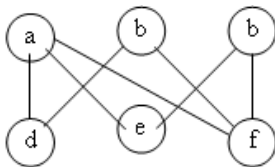


Đồ thị G này có 8 đỉnh, đỉnh nào cũng có bậc 4, nên G là đồ thị Hamilton.



Đồ thị G' này có 5 đỉnh bậc 4 và 2 đỉnh bậc 2 kề nhau nên tổng số bậc của hai đỉnh không kề nhau bất kỳ bằng 7 hoặc 8, nên G' là đồ thị Hamilton.

Ví dụ:

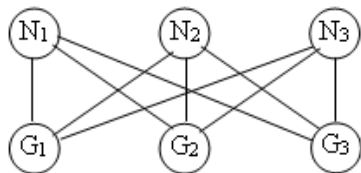


Đồ thị phân đôi này có bậc của mỗi đỉnh bằng 2 hoặc 3 ($> 3/2$), nên theo Định lý 4.2.6, nó là đồ thị Hamilton.

Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT

1. Mở đầu:

Từ xa xưa đã lưu truyền một bài toán cổ “Ba nhà, ba giếng”: Có ba nhà ở gần ba cái giếng, nhưng không có đường nối thẳng các nhà với nhau cũng như không có đường nối thẳng các giếng với nhau. Có lần bất hoà với nhau, họ tìm cách làm các đường khác đến giếng sao cho các đường này đôi một không giao nhau. Họ có thực hiện được ý định đó không?



Bài toán này có thể được mô hình bằng đồ thị phân đôi đầy đủ $K_{3,3}$. Câu hỏi ban đầu có thể diễn đạt như sau: Có thể vẽ $K_{3,3}$ trên một mặt phẳng sao cho không có hai cạnh nào cắt nhau? Trong chương này chúng ta sẽ nghiên cứu bài toán: có thể vẽ một đồ thị trên một mặt phẳng không có các cạnh nào cắt nhau không. Đặc biệt chúng ta sẽ trả lời bài toán ba nhà ba giếng. Thường có nhiều cách biểu diễn đồ thị. Khi nào có thể tìm được ít nhất một cách biểu diễn đồ thị không có cạnh cắt nhau?

2. Tô màu đồ thị:

a. Tô màu bản đồ:

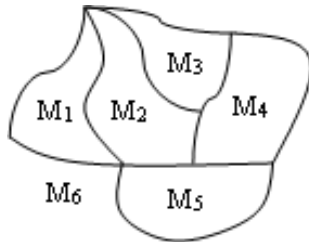
Trong một bản đồ, ta coi hai miền có chung nhau một đường biên là hai miền kề nhau (hai miền chỉ có chung nhau một điểm biên không được coi là kề nhau). Một bản đồ thường được tô màu, sao cho hai miền kề nhau được tô hai màu khác nhau. Ta gọi một cách tô màu bản đồ như vậy là một cách tô màu đúng.

Để đảm bảo chắc chắn hai miền kề nhau không bao giờ có màu trùng nhau, chúng ta tô mỗi miền bằng một màu khác nhau. Tuy nhiên việc làm đó nói chung là không hợp lý. Nếu bản đồ có nhiều miền thì sẽ rất khó phân biệt những màu gần giống nhau. Do vậy người ta chỉ dùng một số màu cần thiết để tô bản đồ. Một bài toán được đặt ra là: xác định số màu tối thiểu cần có để tô màu đúng một bản đồ.

2. Tô màu đồ thị:

a. Tô màu bản đồ:

Ví dụ: Bản đồ trong hình bên có 6 miền, nhưng chỉ cần có 3 màu (vàng, đỏ, xanh) để tô đúng bản đồ này. Chẳng hạn, màu vàng được tô cho M_1 và M_4 , màu đỏ được tô cho M_2 và M_6 , màu xanh được tô cho M_3 và M_5 .



2. Tô màu đồ thị:

b. Tô màu đồ thị:

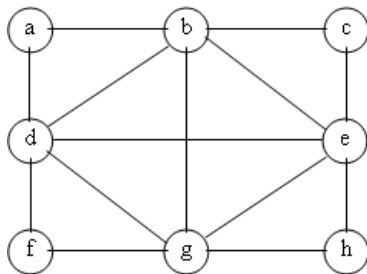
Mỗi bản đồ trên mặt phẳng có thể biểu diễn bằng một đồ thị, trong đó mỗi miền của bản đồ được biểu diễn bằng một đỉnh; các cạnh nối hai đỉnh, nếu các miền được biểu diễn bằng hai đỉnh này là kề nhau. Đồ thị nhận được bằng cách này gọi là đồ thị đối ngẫu của bản đồ đang xét. Rõ ràng mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có đồ thị đối ngẫu phẳng. Bài toán tô màu các miền của bản đồ là tương đương với bài toán tô màu các đỉnh của đồ thị đối ngẫu sao cho không có hai đỉnh liền kề nhau có cùng một màu, mà ta gọi là tô màu đúng các đỉnh của đồ thị.

Số màu ít nhất cần dùng để tô màu đúng đồ thị G được gọi là sắc số của đồ thị G và ký hiệu là $\chi(G)$.

2. Tô màu đồ thị:

b. Tô màu đồ thị:

Ví dụ:



Ta thấy rằng 4 đỉnh b, d, g, e đôi một kề nhau nên phải được tô bằng 4 màu khác nhau. Do đó $\chi(G) \geq 4$. Ngoài ra, có thể dùng 4 màu đánh số 1, 2, 3, 4 để tô màu G như sau: Như vậy $\chi(G) = 4$.

2. Tô màu đồ thị:

c. Mệnh đề:

Nếu đồ thị G chứa một đồ thị con đồng phôi với đồ thị đầy đủ K_n thì $\chi(G) \geq n$.

d. Mệnh đề:

Nếu đơn đồ thị G không chứa chu trình độ dài lẻ thì $\chi(G) = 2$.

1 MỞ ĐẦU

2 NỘI DUNG

- Chương 1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN CỦA LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ
 - 1.1. Đồ thị và phân loại đồ thị
 - 1.2. Các thuật ngữ cơ bản
 - 1.3. Đường đi, chu trình, đồ thị liên thông
 - 1.4. Một số dạng đồ thị đơn đặc biệt
 - 1.5. Biểu diễn đồ thị
- Chương 2. CÁC ĐỒ THỊ ĐẶC BIỆT
 - 2.1. Đồ thị EULER
 - 2.2. Đồ thị HALMILTON
 - 2.3. Tô màu đồ thị

3 KẾT LUẬN

Tôi chỉ đưa ra các cách cơ bản nhất để từ đó học sinh tự nghiên cứu và phát triển thêm. Vì thời gian và trình độ có hạn nên chuyên đề này có thể còn nhiều hạn chế, thiếu sót mong nhận được các ý kiến góp ý của các đồng nghiệp và các em sinh viên.

**XIN CHÂN THÀNH CẢM ƠN QUÝ THẦY CÔ VÀ CÁC BẠN ĐÃ
CHÚ Ý LẮNG NGHE!**