








Trụ sở chính

-  Số 3, phố Cầu Giấy, phường Láng Thượng, quận Đống Đa, tp Hà Nội
-  (84.24) 37663311
-  (84.24) 37669613
-  www.utc.edu.vn
-  dhgtvt@utc.edu.vn

Phân hiệu tại thành phố Hồ Chí Minh

-  Số 450-451, đường Lê Văn Việt, phường Tăng Nhơn Phú A, tp Thủ Đức, tp Hồ Chí Minh
-  (84.28) 38966798
-  (84.28) 38964736
-  phanhieu.utc.edu.vn
-  info@utc2.edu.vn



KỶ YẾU HỘI THẢO KHOA HỌC

GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CƠ BẢN NĂM 2025



KỶ YẾU
HỘI THẢO KHOA HỌC

GIẢNG DẠY VÀ
NGHIÊN CỨU
KHOA HỌC CƠ BẢN
NĂM 2025



NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI**



**KỶ YẾU HỘI THẢO KHOA HỌC
GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU
KHOA HỌC CƠ BẢN
NĂM 2025**

**NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI
HÀ NỘI - 2025**

BAN TỔ CHỨC HỘI THẢO

PGS.TS. Nguyễn Thị Mai	Trưởng BTC
TS. Ngô Đức Chinh	Ủy viên TT
TS. Mai Nam Phong	Ủy viên
PGS.TS. Trần Văn Long	Ủy viên
PGS.TS. Nguyễn Thị Hòa	Ủy viên
TS. Nguyễn Thị Hồng Tuyền	Ủy viên
TS. Nguyễn Thế Vinh	Ủy viên
TS. Nguyễn Trường Giang	Ủy viên
TS. Phạm Minh Phúc	Ủy viên
TS. Nguyễn Quang Anh	Ủy viên
ThS. Nguyễn Diệu Thúy	Ủy viên
TS. Lại Thị Hoan	Ủy viên
ThS. Hoàng Thiệu Anh	Ủy viên

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

TT	NỘI DUNG	Trang
1	ĐỔI MỚI PHƯƠNG PHÁP GIẢNG DẠY TOÁN HỌC BẰNG TRÍ TUỆ NHÂN TẠO - AI <i>Nguyễn Thị Hồng Hoa</i>	11
2	GIẢI SỐ PHƯƠNG TRÌNH TRUYỀN NHIỆT VỚI ĐẠO HÀM PHẦN THỨ THEO BIẾN THỜI GIAN <i>Nguyễn Mạnh Hùng, Bùi Việt Hương</i>	20
3	KHOẢNG CÁCH BIẾN PHÂN TOÀN PHẦN VỚI SỰ XẤP XỈ CỦA MỘT SỐ PHÂN PHỐI THƯỜNG GẶP <i>Nguyễn Thu Hằng, Nguyễn Thị Hằng, Phạm Ngọc Anh</i>	27
4	MỘT LỚP MÃ BCH VỚI ĐỘ DÀI $q^7 - 1$ <i>Nguyễn Huy Hoàng</i>	34
5	MỘT SỐ GIỚI THIỆU VỀ PHƯƠNG PHÁP MONTE CARLO <i>Vũ Thị Hương</i>	47
6	MỘT SỐ LỚP ĐỒ THỊ CÓ SỐ GHÉP CẶP BẰNG SỐ GHÉP CẶP THỨ TỰ <i>Mai Phước Bình</i>	59
7	NGHIÊN CỨU ỨNG DỤNG MÔ HÌNH HỌC SÂU NHẬN DẠNG GIỌNG NÓI <i>Nguyễn Đức Dư</i>	65
8	PHÂN TÍCH GIÁ TRỊ KỶ DỊ VÀ PHÂN TÍCH QR TRONG BÀI TOÁN BÌNH PHƯƠNG TỐI THIỂU <i>Cao Minh Nam</i>	72
9	SỬ DỤNG THUẬT TOÁN DI TRUYỀN GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TUYẾN PHƯƠNG TIỆN VỚI HẠN CHẾ THỜI GIAN <i>Nguyễn Minh Hoàng Sơn</i>	82
10	TRỰC QUAN HOÁ DỮ LIỆU CÓ SỐ CHIỀU LỚN KÍCH THUỐC NHỎ BẰNG HỆ TOẠ ĐỘ HƯỚNG TÂM <i>Trần Văn Long</i>	92

TT	NỘI DUNG	Trang
11	ỨNG DỤNG THUẬT TOÁN LAI PSO-SA GIẢI BÀI TOÁN ĐỊNH TUYẾN XE <i>Nguyễn Việt Hưng, Bùi Minh Thảo</i>	102
12	DỰ BÁO GIÁ CHỨNG KHOÁN DƯỚI GIẢ THIẾT GIÁ CHỨNG KHOÁN CÓ PHÂN PHỐI LOGA CHUẨN <i>Trịnh Thị Trang</i>	114
13	ĐÁNH GIÁ TỐC ĐỘ HỘI TỤ CỦA SAI SỐ TRUNG BÌNH BÌNH PHƯƠNG VÀ SAI SỐ TRUNG BÌNH TÍCH PHÂN BÌNH PHƯƠNG TRONG BÀI TOÁN GIẢI CHẬP <i>Võ Thị Bích Trâm</i>	122
14	PHƯƠNG PHÁP DƯỚI GRADIENT CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG <i>Nguyễn Thị Huyền</i>	129
15	ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP 1 TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TIỄN <i>Nguyễn Thùy Linh, Nguyễn Thị Lan Hương, Lê Thị Hương Giang</i>	140
16	ẢNH HƯỞNG CỦA CHỈ SỐ TỈ PHẦN THỂ TÍCH LÊN TẦN SỐ RIÊNG CỦA DẦM CÓ CƠ TÍNH BIẾN ĐỔI HAI CHIỀU <i>Nguyễn Duy Trường, Vũ Thị An Ninh</i>	152
17	CÔNG THỨC RAYLEIGH DAO ĐỘNG DỌC THANH CÓ VẾT NÚT <i>Phạm Thị Ba Liên</i>	163
18	PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG CỦA TẮM CƠ TÍNH BIẾN THIÊN CHIỀU DÀY THAY ĐỔI TUYẾN TÍNH, CÓ LỖ RỖNG <i>Nguyễn Thị Kim Khuê</i>	175
19	XÁC ĐỊNH CÔNG CỦA TRỌNG LỰC TRONG CHUYỂN ĐỘNG QUAY QUANH TRỤC CỐ ĐỊNH THEO PHƯƠNG PHÁP MÔ-MEN <i>Huỳnh Văn Quân, Lê Hữu Đạt</i>	183
20	ĐỀ XUẤT VÀ PHÂN TÍCH TÍNH HIỆU QUẢ CỦA CÁC PHƯƠNG PHÁP GIẢNG DẠY TỪ VÙNG TIẾNG ANH CHUYÊN NGÀNH CHO SINH VIÊN NGÀNH KỸ THUẬT XÂY DỰNG CÔNG TRÌNH GIAO THÔNG <i>Bùi Thị Mai Hương</i>	192

TT	NỘI DUNG	Trang
21	MỘT SỐ GỢI Ý THIẾT KẾ BÀI GIẢNG NGỮ PHÁP TIẾNG ANH BẰNG PHẦN MỀM POWERPOINT <i>Nguyễn Thị Quyên</i>	208
22	MỘT SỐ KỸ THUẬT VÀ PHƯƠNG PHÁP DẠY TIẾNG ANH CHUYÊN NGÀNH CÔNG TRÌNH TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI TRONG BỐI CẢNH TOÀN CẦU HOÁ <i>Hoàng Thanh Thuý, Hồ Anh Cường</i>	216
23	QUAN ĐIỂM CỦA GIÁNG VIÊN VỀ TƯƠNG TÁC TRONG LỚP HỌC CHUYÊN NGÀNH BẰNG TIẾNG ANH TẠI MỘT TRƯỜNG ĐẠI HỌC KỸ THUẬT Ở VIỆT NAM <i>Nguyễn Thị Thu Hà</i>	226
24	TÌM HIỂU CHIẾN LƯỢC HỌC TỪ VỰNG TIẾNG ANH CỦA SINH VIÊN NĂM THỨ NHẤT KHOA ĐÀO TẠO QUỐC TẾ TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI <i>Bạch Thị Thanh</i>	238
25	THỰC TRẠNG KỸ NĂNG VIẾT TIẾNG ANH CỦA SINH VIÊN CHUYÊN NGÀNH KỸ THUẬT ĐIỆN TỬ VIỄN THÔNG, ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI <i>Vũ Thị Minh Phương</i>	249
26	CẢI THIỆN KỸ NĂNG ĐỌC HIỂU VÀ DỊCH THUẬT VĂN BẢN TIẾNG PHÁP CHUYÊN NGÀNH KIẾN TRÚC - XÂY DỰNG BẰNG CÁCH PHÂN TÍCH CẤU TRÚC CÂU NHIỀU THÀNH PHẦN <i>Nguyễn Diệu Thuý</i>	261
27	ĐỔI MỚI PHƯƠNG PHÁP GIẢNG DẠY TIẾNG PHÁP CHO SINH VIÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI: CÔNG CỤ SỐ VÀ PHƯƠNG PHÁP TIẾP CẬN PHÙ HỢP <i>Lê Nguyễn Thanh Hương</i>	271
28	SỰ TƯƠNG ĐỒNG NGÔN NGỮ TRONG TIẾNG PHÁP, TIẾNG ANH VÀ TIẾNG VIỆT <i>Nguyễn Thị Cúc</i>	282

TT	NỘI DUNG	Trang
29	TÌM HIỂU CÁC CÁCH DIỄN ĐẠT SO SÁNH TRONG TIẾNG PHÁP <i>Nguyễn Phương Lan</i>	290
30	VAI TRÒ TRÍ TUỆ NHÂN TẠO TRONG VIỆC THỨC ĐẨY PHƯƠNG PHÁP CÁ NHÂN HÓA HỌC TẬP <i>Nguyễn Quang Anh</i>	299
31	VIỆC HỌC TỪ VỰNG TIẾNG PHÁP CỦA SINH VIÊN CÁC LỚP PHÁP NGỮ TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI: THỰC TRẠNG VÀ GIẢI PHÁP <i>Trần Thị Chanh</i>	309
32	CẤU TRÚC ĐÔ MEN TỬ CỦA VẬT LIỆU MÀNG MỎNG YTTRIUM IRON GARNET <i>Quách Duy Trường</i>	316
33	CẤU TRÚC TINH THỂ, TÍNH CHẤT QUANG HỌC VÀ TÍNH CHẤT TỬ CỦA VẬT LIỆU $\text{BaTi}_{1-x}\text{Fe}_x\text{O}_3$ ($x = 0 \div 0,5$) <i>Đào Việt Thắng, Nguyễn Mạnh Hùng</i>	321
34	CHẾ TẠO NANO BÁN DẪN ZnS:Mn BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÓA LÝ VÀ ĐỊNH HƯỚNG ỨNG DỤNG <i>Chu Tiến Dũng</i>	328
35	KHẢO SÁT ĐẶC TÍNH NHẠY KHÍ NH_3 CỦA VẬT LIỆU LAI HÓA NANOCOMPOSITE CNT@WO_3 <i>Nguyễn Tuấn Sơn</i>	335
36	TRẠNG THÁI NGỪNG TỤ POLARITON TRONG VI HỐC BÁN DẪN <i>Nguyễn Thị Hậu, Đỗ Thị Hồng Hải</i>	345
37	CẤU TRÚC HÓA HỌC CỦA MỘT SỐ HỢP CHẤT ĐƯỢC PHÂN LẬP TỪ CÂY CỎ XƯỚC (<i>Achyranthes Aspera</i>) <i>Hoàng Thị Tuyết Lan</i>	352
38	MỘT SỐ HỢP CHẤT FLAVONE C-GLYCOSIDE ĐƯỢC PHÂN LẬP TỪ LÁ CỦA LOÀI DÂY ĐAU XƯƠNG (<i>Tinospora sinensis</i>) VÀ HOẠT TÍNH KHÁNG VIÊM CỦA CHÚNG <i>Phạm Hồng Thoa, Bùi Thị Mai Anh</i>	360

TT	NỘI DUNG	Trang
39	NGHIÊN CỨU HẤP PHỤ Ni^{2+} BẰNG BỘT HYDROXYAPATIT TỔNG HỢP <i>Lê Thị Phương Thảo, Vũ Kim Thu, Công Tiến Dũng, Bùi Hoàng Bắc, Lê Thị Duyên</i>	366
40	QUY TRÌNH TỔNG HỢP VẬT LIỆU NANO VONFRAMAT MWO_4 (M = Ca,Zn) PHA TẬP NGUYÊN TỐ ĐẤT HIẾM BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÓA ƯỚT VÀ BƯỚC ĐẦU KHẢO SÁT TÍNH CHẤT QUANG <i>Vũ Thị Xuân, Nguyễn Văn Hải, Lê Minh Đức</i>	375
41	RỦI RO TRONG VẬN TẢI LNG ĐƯỜNG BỘ Ở NƯỚC TA <i>Khuất Quang Sơn, Vũ Thị Kim Liên</i>	386
42	TÌM HIỂU QUY TRÌNH TỔNG HỢP VẬT LIỆU HẤP PHỤ TỪ BIẾN TÍNH QUẶNG PYROLUSITE VÀ BƯỚC ĐẦU KHẢO SÁT XỬ LÝ Ô NHIỄM MÔI TRƯỜNG NƯỚC <i>Vũ Thị Xuân, Vũ Tùng Lâm, Phạm Thị Thu Giang</i>	395
43	THỰC TRẠNG GHI NHÃN HÀNG HÓA NGUY HIỂM TRÊN MỘT SỐ PHƯƠNG TIỆN VẬN TẢI ĐƯỜNG BỘ Ở NƯỚC TA <i>Khuất Quang Sơn</i>	404
44	XÁC ĐỊNH CẤU TRÚC MỘT SỐ HỢP CHẤT ĐƯỢC PHÂN LẬP TỪ LOÀI HẸ TA (<i>Allium ramosum</i>) <i>Nguyễn Thị Mai</i>	412
45	XÂY DỰNG BÀI TẬP ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC HỌC CHUƠNG ĐẠI CƯƠNG VỀ KIM LOẠI, HÓA HỌC 12 CỦA HỌC SINH THEO HƯỚNG ĐỔI MỚI TRONG KỲ THI TỐT NGHIỆP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG TỪ NĂM 2025 <i>Phạm Thị Thu Hiền</i>	418
46	NGHIÊN CỨU ẢNH HƯỞNG CỦA TRO BAY VÀ XỈ LÒ CAO ĐẾN CƯỜNG ĐỘ VÀ HỆ SỐ GIÃN NỖ NHIỆT CỦA BÊ TÔNG HẠT NHỎ TÍNH NĂNG CAO <i>Ngô Đức Chinh, Nguyễn Minh Hiếu, Lê Hữu Kiên</i>	429

TT	NỘI DUNG	Trang
47	NGHIÊN CỨU GIẢNG DẠY VỀ KỸ THUẬT ĐỊNH HƯỚNG TƯ DUY KHÔNG GIAN <i>Nguyễn Tuấn Anh</i>	445
48	NGHIÊN CỨU ỨNG DỤNG PHẦN MỀM SHAPR 3D DỰNG CÁC KHỐI HÌNH HỌC VÀ VẬT THỂ NỔI TRONG MÔN HỌC VẼ KỸ THUẬT F1 <i>Lương Đức Chung, Lê Thị Thu Thủy, Ninh Khắc Tôn</i>	457

LỜI NÓI ĐẦU

Nhận thức rõ tầm quan trọng của công tác nghiên cứu khoa học trong việc nâng cao chất lượng đội ngũ giảng viên, đồng thời nâng cao chất lượng giảng dạy, trong những năm gần đây, việc đẩy mạnh nghiên cứu khoa học đã được Khoa Khoa học Cơ bản xác định là một trong những hoạt động trọng tâm trong các chương trình công tác của Khoa.

Khoa Khoa học Cơ bản hiện có 84 cán bộ, giảng viên và 14 giảng viên thỉnh giảng, hợp đồng thuộc 08 bộ môn: Giải tích, Đại số & Xác suất thống kê, Vật lý, Hóa học, Anh văn, Nga-Pháp, Hình họa-Vẽ kỹ thuật và Cơ lý thuyết; trong đó có: 06 Phó Giáo sư, 25 Tiến sĩ, 48 Thạc sĩ, 05 Cử nhân. Hàng năm, Khoa chủ trì hàng chục đề tài cấp Trường; chủ trì và tham gia các đề tài cấp Bộ và đề tài Quỹ Nafosted. Trong 5 năm gần đây, các giảng viên của Khoa đã công bố 107 công trình trên các tạp chí quốc tế thuộc danh mục ISI và Scopus, góp phần tạo nên thương hiệu của Nhà trường.

Ngoài giảng dạy các môn khoa học cơ bản, từ năm học 2018-2019, Khoa KHCB được Nhà trường giao nhiệm vụ đào tạo chuyên ngành Toán - Tin ứng dụng thuộc ngành đào tạo Toán ứng dụng. Hiện đã có 3 khóa sinh viên tốt nghiệp ra trường, tỉ lệ sinh viên có việc làm ngay rất cao và với mức thu nhập cao. Đặc biệt từ năm học 2024 - 2025 khoa KHCB tiếp tục mở chuyên ngành đào tạo thứ 2, ngành Ngôn ngữ Anh chính thức tuyển sinh. Việc tiếp tục mở các ngành đào tạo mới, theo hướng chuyên môn mà Khoa đang quản lý là hướng phát triển tiếp theo của Khoa trong thời gian tới.

Để đạt được những thành quả trong giảng dạy và nghiên cứu, thời gian qua, Khoa đã luôn khuyến khích đội ngũ giảng viên chủ động đổi mới, cải tiến phương pháp giảng dạy, tích cực tham gia các Hội nghị, Hội thảo trong nước và quốc tế về các lĩnh vực chuyên môn, tăng cường các công bố quốc tế để nâng cao chất lượng nghiên cứu khoa học.

Tiếp nối thành công của Hội thảo các năm 2018, năm 2020, năm 2022 và năm 2024, Khoa Khoa học Cơ bản tổ chức **"Hội thảo về giảng dạy và nghiên cứu Khoa học Cơ bản năm 2025"**. Hội thảo là diễn đàn để các giảng viên, các nhà khoa học trao đổi, học hỏi, chia sẻ kinh nghiệm nghiên cứu và giảng dạy trong các lĩnh vực: Toán học, Vật lý, Hóa học, Ngoại ngữ, Cơ lý thuyết và Hình họa - Vẽ kỹ thuật và các lĩnh vực khác liên quan. Những công trình nghiên cứu có giá trị của Hội thảo được biên tập và xuất bản trong cuốn **"Kỷ yếu Hội thảo về giảng dạy và nghiên cứu Khoa học Cơ bản năm 2025"**.

Khoa Khoa học cơ bản trân trọng gửi lời cảm ơn tới các tác giả trong và ngoài Trường đã dành sự quan tâm và gửi đến Hội thảo các bài viết có chất lượng. Xin cảm ơn các nhà giáo, các nhà khoa học từ các Trường đại học, các Viện nghiên cứu đã dành thời gian và công sức đọc phản biện các bài báo, giúp Ban tổ chức lựa chọn các báo cáo tiêu biểu để đăng trong Kỷ yếu của Hội thảo. Những kết quả từ Hội thảo sẽ là cơ sở quan trọng để Khoa tiếp tục đổi mới, cải tiến phương pháp giảng dạy, định hướng nghiên cứu khoa học cũng như triển khai mở mới các ngành đào tạo.

Trong quá trình biên tập Kỷ yếu, không tránh khỏi những hạn chế, thiếu sót, Ban Tổ chức mong nhận được sự chia sẻ và các ý kiến góp ý của độc giả.

Xin trân trọng cảm ơn!

BAN TỔ CHỨC HỘI THẢO

KHOẢNG CÁCH BIẾN PHÂN TOÀN PHẦN VỚI SỰ XẤP XỈ CỦA MỘT SỐ PHÂN PHỐI THƯỜNG GẶP

Nguyễn Thu Hằng*, Nguyễn Thị Hằng, Phạm Ngọc Anh

Trường Đại học Mở - Địa chất, 18 Phố Viên, Bắc Từ Liêm, Hà Nội

*Email: nguyenthuhangbmtoan@humg.edu.vn

Tóm tắt: Trong báo cáo này, chúng tôi tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa một số phân phối thường gặp và sử dụng một số ước lượng đã biết để đưa ra một ước lượng cho khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson. Chúng tôi cũng tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa hai phân phối này trong một số trường hợp cụ thể.

Từ khóa: khoảng cách biến phân toàn phần, phân phối nhị thức, phân phối Poisson.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Khoảng cách biến phân toàn phần (total variation distance) là một trong những khoảng cách cơ bản trong lý thuyết xác suất. Nó là một trong những tiêu chuẩn đầu tiên xét đến khi nghiên cứu về khoảng cách cũng như sự hội tụ của các biến ngẫu nhiên. Với vai trò quan trọng, khoảng cách biến phân toàn phần giữa các biến ngẫu nhiên được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Đầu tiên phải kể đến là những nghiên cứu cơ bản nhất về khoảng cách biến phân toàn phần như tính toán về khoảng cách biến phân toàn phần đối với một số biến ngẫu nhiên thường gặp; những tính chất cơ bản và mối liên hệ giữa khoảng cách biến phân toàn phần đến sự hội tụ của biến ngẫu nhiên [1, 2]. Tiếp theo là rất nhiều các công trình nghiên cứu về tính toán và ước lượng khoảng cách biến phân toàn phần giữa các biến ngẫu nhiên khác nhau, chẳng hạn như cho phân phối là tích các phân phối 0-1 [3], bất đẳng thức Le Cam cho ước lượng khoảng cách biến phân toàn phần giữa tổng các phân phối nhị thức và phân phối Poisson [4], cho mô hình Markov,... Các nghiên cứu cũng được mở rộng sang phân phối nhiều chiều [5]. Bên cạnh đó, việc so sánh giữa các khoảng cách (metric) cũng được chú ý [6].

Trong báo cáo này, với mục đích phục vụ nghiên cứu, giảng dạy, chúng tôi tổng hợp một số tính chất cơ bản của khoảng cách biến phân toàn phần sau đó chúng tôi tính toán khoảng cách biến phân toàn phần cho một số biến ngẫu nhiên thường gặp. Chúng tôi cũng ước lượng về khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson, từ đó đưa ra một công thức ước lượng đơn giản để minh họa cho sự xấp xỉ được giữa hai phân phối này. Cuối cùng, chúng tôi cũng dùng phần mềm Python để tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson trong một số trường hợp cụ thể.

Báo cáo của chúng tôi chia làm hai phần:

Phần 1. Nêu một số kiến thức cơ bản về khoảng cách biến phân toàn phần.

Phần 2. Một số kết quả và thảo luận.

4. NỘI DUNG

4.1. Một số kiến thức cơ sở về khoảng cách biến phân toàn phần

Theo [7], khoảng cách biến phân toàn giữa hai biến ngẫu nhiên được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2.1. Xét không gian đo (Ω, \mathcal{F}) và P, Q là hai độ đo xác suất trên (Ω, \mathcal{F}) thì khoảng cách biến phân toàn phần được định nghĩa bởi

$$d_{TV}(P, Q) = \sup_{A \in \mathcal{F}} |P(A) - Q(A)|. \quad (1)$$

Nói cách khác, nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên thì

$$d_{TV}(X, Y) = \sup_{D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(X \in D) - P(Y \in D)|. \quad (2)$$

Người ta cũng chứng minh được rằng

$$d_{TV}(X, Y) = \frac{1}{2} \sup_{\|h\|_\infty \leq 1} |E(h(X)) - E(h(Y))|, \quad (3)$$

Trong đó: $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| \leq 1$.

Nếu X, Y có hàm mật độ lần lượt là $f(x)$ và $g(x)$ thì

$$d_{TV}(X, Y) = \int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx. \quad (4)$$

Nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị trong \mathbb{Z} thì

$$d_{TV}(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |P(X = k) - P(Y = k)|. \quad (5)$$

Chúng tôi tổng hợp một số tính chất quan trọng sau đây của khoảng cách biến phân toàn phần.

Từ định nghĩa, ta dễ dàng có được những tính chất sau đây:

Mệnh đề 2.2. Khoảng cách biến phân toàn phần là một Metric đủ.

Mệnh đề 2.3. Xét không gian đo (Ω, \mathcal{F}) và P, Q là hai độ đo xác suất trên (Ω, \mathcal{F}) thì $0 \leq d_{TV}(P, Q) \leq 1$. Hơn nữa, $d_{TV}(P, Q) = 0$ khi và chỉ khi $P = Q$ và $d_{TV}(P, Q) = 1$ khi và chỉ khi tồn tại $A \in \mathcal{F}$ sao cho $P(A) = 1, Q(A) = 0$ hoặc $P(A) = 0, Q(A) = 1$.

Mệnh đề 2.4. Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên thì $d_{TV}(X, Y) \leq P(X \neq Y)$.

Mệnh đề 2.5. Cho dãy biến ngẫu nhiên liên tục $\{F_i\}_{i=1}^n$ và biến ngẫu nhiên liên tục và F_∞ . Khi đó, $d_{TV}(F_n, F_\infty) \rightarrow 0$ tương đương $F_n \xrightarrow{L_1} F_\infty$.

Mệnh đề 2.6. Cho dãy biến ngẫu nhiên $\{F_i\}_{i=1}^n$ và biến ngẫu nhiên F_∞ . Nếu $d_{TV}(F_n, F_\infty) \rightarrow 0$ thì $F_n \xrightarrow{\text{law}} F_\infty$.

Điều ngược lại nói chung là không đúng. Ta lấy ví dụ F_n là dãy biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $\frac{2}{\pi} \cos^2(nx) \mathbf{1}_{[0,\pi]}(x)$ và F_∞ là biến ngẫu nhiên có phân phối đều liên tục trên $[0, \pi]$ Khi đó, $F_n \xrightarrow{\text{law}} F_\infty$. Tuy nhiên

$$\begin{aligned} d_{TV}(F_n, F_\infty) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{1}{\pi} |2 \cos^2(nx) - 1| dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |\cos(2nx)| dx \\ &= \frac{4n}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4n}} \cos(2nx) dx = 1 > 0, \forall n. \end{aligned} \quad (6)$$

Mệnh đề 2.7. Nếu $\{X_i\}_{i=1}^n$ và $\{Y_i\}_{i=1}^n$ là hai dãy biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, có kì vọng và phương sai hữu hạn. Khi đó

$$d_{TV}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n d_{TV}(X_i, Y_i). \quad (7)$$

Chi tiết chứng minh của Mệnh đề 2.6 và Mệnh đề 2.7 có thể tìm trong [7, 8].

4.2. Kết quả và thảo luận

Trong phần này, chúng tôi tính toán và ước lượng khoảng cách biến phân toàn phần cho một số biến ngẫu nhiên thường gặp.

Mệnh đề 2.8. Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên có phân phối đều liên tục $X \sim U[0, a]$ và $Y \sim U[0, b]$ với $0 < a < b$ thì

$$d_{TV}(X, Y) = \frac{b-a}{b}. \quad (8)$$

Chứng minh. Áp dụng công thức (4) ta được

$$d_{TV}(X, Y) = \frac{1}{2} \left(\int_0^a \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) dx + \int_a^b \frac{1}{b} dx \right) = \frac{b-a}{b}.$$

Mệnh đề 2.9. Nếu X có phân phối 0-1 với tham số p và Y có phân phối 0-1 với tham số $q > p$ thì

$$d_{TV}(X, Y) = q - p. \quad (9)$$

Chứng minh. Bảng phân phối xác suất của X và Y là

X	0	1
P	$1-p$	p

Y	0	1
P	$1-q$	q

Theo công thức (5), ta có

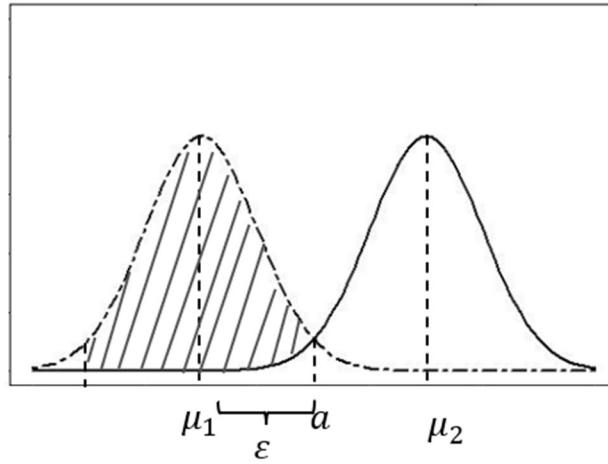
$$d_{TV}(X, Y) = \frac{1}{2}(1 - p - (1 - q) + q - p) = q - p.$$

Mệnh đề 2.10. Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn, $X \sim N(\mu_1, 1)$ và $Y \sim N(\mu_2, 1)$ với $\mu_2 > \mu_1$, thì

$$d_{TV}(X, Y) = 2\phi_0(\varepsilon), \quad (10)$$

Trong đó: ϕ_0 là hàm Laplace và $\varepsilon = \frac{\mu_2 - \mu_1}{2}$.

Chứng minh.



Đặt $a = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}$. Theo công thức (4), ta có

$$\begin{aligned} d_{TV}(X, Y) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2}} - e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2}} \right| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a \left(e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2}} - e^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2}} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mu_1 - \varepsilon}^{\mu_1 + \varepsilon} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2}} dx = 2\phi_0(\varepsilon). \end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng tôi quan tâm đến khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson. Trước hết, ta xét trường hợp đơn giản.

Mệnh đề 2.11. Nếu X có phân phối 0-1 với tham số p và Y có phân phối Poisson tham số p thì

$$d_{TV}(X, Y) = p(1 - e^{-p}). \quad (11)$$

Chứng minh. Bảng phân phối xác suất của X là

X	0	1
P	$1-p$	p

Và $P(Y=k) = \frac{e^{-p} p^k}{k!}$. Mặt khác, theo công thức khai triển Maclaurin ta có

$$e^p = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{p^i}{i!} \text{ và } e^{-p} = 1 - p + \frac{e^{-c}}{2!} p^2 \geq 1 - p; \quad 0 < c < p.$$

Suy ra, theo công thức (5), ta thu được

$$\begin{aligned} d_{TV}(X, Y) &= \frac{1}{2} \left[e^{-p} - (1-p) + p - pe^{-p} + e^{-p} \left(\frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{-p} \left(1 + p + \frac{p^2}{2!} + \frac{p^3}{3!} + \dots \right) + 2p - 2pe^{-p} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} (e^{-p} e^p + 2p - 2pe^{-p} - 1) = p(1 - e^{-p}). \end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh xong.

Mệnh đề 2.12. Nếu X có phân phối nhị thức tham số n, p , ($X \sim B(n, p)$) và Y có phân phối Poisson tham số λ , ($Y \sim P(\lambda)$) thì

$$d_{TV}(X, Y) \leq |np - \lambda| + \frac{\lambda^2}{n}.$$

Chứng minh. Vì khoảng cách biến phân toàn phần là Metric nên ta có:

$$\begin{aligned} d_{TV}(X, Y) &= d_{TV}(B(n, p), P(\lambda)) \\ &\leq d_{TV}\left(B(n, p), B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)\right) + d_{TV}\left(B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right), P(\lambda)\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Vì biến ngẫu nhiên $B(n, p)$ có thể coi là tổng của n biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối 0-1 với tham số p nên áp dụng ước lượng (7) và công thức (9) ta thu được.

$$d_{TV}\left(B(n, p), B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)\right) \leq n \left| p - \frac{\lambda}{n} \right|. \quad (13)$$

Mặt khác, theo định lý Le Cam [4] ta có:

$$d_{TV}\left(B\left(n, \frac{\lambda}{n}\right), P(\lambda)\right) \leq n \left(\frac{\lambda}{n} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{n}. \quad (14)$$

Thay (13) và (14) vào (12) ta thu được.

$$d_{TV}(B(n, p), P(\lambda)) \leq |np - \lambda| + \frac{\lambda^2}{n}. \quad (15)$$

Từ ước lượng (15) ta thấy rằng, khi λ cố định và $n \rightarrow \infty$ sao cho $np_n \rightarrow \lambda$ thì khoảng cách biến phân toàn phần giữa biến ngẫu nhiên $X_n \sim B(n, p_n)$ và $P(\lambda)$ sẽ dần về 0. Từ đó suy ra sự hội tụ theo phân phối giữa $B(n, p_n)$ và $P(\lambda)$. Ta thu được một cách lí giải cho sự xấp xỉ được giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson.

Phần cuối của báo cáo, chúng tôi xét một trường hợp đặc biệt, tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức $B(n, p)$ và phân phối Poisson $P(\lambda)$, trong đó $\lambda = np$. Theo (5), ta có:

$$\begin{aligned} d(B(n, p), P(\lambda)) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \left| C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \left| C_n^k p^k (1-p)^{n-k} - \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right| + 1 - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Chúng tôi sử dụng phần mềm Python để tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối này một số trường hợp khác nhau và thu được bảng số liệu sau:

n	p	d_{TV}	n	p	d_{TV}
1	0,5	0,19673467	1	0,02	0,00039602
10	0,5	0,17183508	10	0,02	0,00300340
50	0,5	0,16696519	50	0,02	0,005583409
100	0,5	0,16662262	100	0,02	0,004572241
1	0,1	0,09516258	1	0,01	$9,9501662 \cdot 10^{-5}$
10	0,1	0,02931157	10	0,01	$8,6678929 \cdot 10^{-4}$
50	0,1	0,02595859	50	0,01	$2,2932899 \cdot 10^{-3}$
100	0,1	0,02582856	100	0,01	$2,7752947 \cdot 10^{-3}$
1	0,05	0,00243852	1	0,001	$9,99500166 \cdot 10^{-7}$
10	0,05	0,01185937	10	0,001	$9,86082376 \cdot 10^{-6}$
50	0,05	0,01307091	50	0,001	$4,64180741 \cdot 10^{-5}$
100	0,05	0,012598451	100	0,001	$8,60426922 \cdot 10^{-5}$

Bảng 1. d_{TV} giữa phân phối chuẩn và phân phối Poisson.

Từ bảng số liệu trên ta có thể thấy rằng, cùng một λ , nếu n càng lớn (p càng nhỏ) thì d_{TV} càng nhỏ và nếu cùng một n thì p càng nhỏ d_{TV} càng nhỏ. Tuy nhiên, bảng số liệu không thể hiện được rõ ràng sự biến thiên của d_{TV} trong trường hợp cố định p và thay đổi n .

3. KẾT LUẬN

Báo cáo đã tổng kết một số kiến thức cơ bản về khoảng cách biến phân toàn phần giữa các biến ngẫu nhiên. Từ đó, tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa một số biến ngẫu nhiên cơ bản. Báo cáo cũng đưa ra ước lượng cho khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson, đồng thời tính toán khoảng cách giữa hai phân phối trong một số trường hợp cụ thể. Kết quả của báo cáo nhằm mục đích làm tài liệu tham khảo và hỗ trợ giảng dạy cho sinh viên ngành toán.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi trường Đại học Mở - Địa chất, trong đề tài mã số T25-17.

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Patrick Billingsley: Convergence of Probability Measures. Wiley, New York, 1968.
- [2]. [2] Svetlozar T. Rachev: Probability metrics and the stability of stochastic models. Wiley, Chichester, 1991.
- [3]. Feng, Weiming; Liu, Liqiang; Liu, Tianren. On deterministically approximating total variation distance. Proceedings of the 2024 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 1766-1791, SIAM, Philadelphia, PA, 2024.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.14696>.
- [4]. Le Cam, Lucien. An approximation theorem for the Poisson binomial distribution. Pacific J. Math. 10 (1960), 1181--1197. DOI: 10.2140/pjm.1960.10.1181.
- [5]. Feng, Weiming; Guo, Heng; Jerrum, Mark; Wang, Jiaheng. A simple polynomial-time approximation algorithm for the total variation distance between two product distributions. 2023 Symposium on Simplicity in Algorithms (SOSA), 343--347, SIAM, Philadelphia, PA, 2023. <http://doi.org/10.46298/theoretics.23.7>.
- [6]. Chae, Minwoo; Walker, Stephen G. Wasserstein upper bounds of the total variation for smooth densities. Statist. Probab. Lett. 163 (2020), 108771, 6 pp.
<https://doi.org/10.1016/j.spl.2020.108771>.
- [7]. Nourdin, Ivan; Poly, Guillaume. Convergence in law implies convergence in total variation for polynomials in independent Gaussian, gamma or beta random variables. High dimensional probability VII, 381--394, Progr. Probab., 71, Springer, [Cham], 2016.
<https://doi.org/10.48550/arXiv.1305.2766>.
- [8]. Svante Janson, Probability Distance.
<https://www2.math.uu.se/~svantejs/papers/sjN21.pdf>, truy cập ngày 01 tháng 03 năm 2025.

NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI

Số 8 phố Tăng Bạt Hổ, phường Phạm Đình Hổ, quận Hai Bà Trưng, TP. Hà Nội

ĐT: 024.39423346 - 024.39424620 * Fax: 024.38224784

Website: www.nxbgtvt.vn * Email: nxbgtvt@fpt.vn

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN, NỘI DUNG:

GIÁM ĐỐC - TỔNG BIÊN TẬP:

Nguyễn Minh Nhật

BIÊN TẬP:

Dương Hồng Hạnh

THIẾT KẾ:

Trường Đại học Giao thông Vận tải

ĐỐI TÁC LIÊN KẾT XUẤT BẢN: Trường Đại học Giao thông Vận tải

In 200 cuốn khổ 20,5 x 29,5cm tại Xưởng in Trường Đại học Giao thông vận tải.

Địa chỉ: Số 3, phố Cầu Giấy, phường Láng Thượng, quận Đống Đa, TP. Hà Nội.

Số xác nhận đăng ký xuất bản: 923-2025/CXBIPH/1-13/GTVT.

Mã số sách tiêu chuẩn quốc tế - ISBN: 978-604-76-3092-9.

Quyết định xuất bản số: 09 LK/QĐ-XBGT ngày 04 tháng 4 năm 2025.

In xong và nộp lưu chiểu năm 2025.