Trụ sở chính

Số 3, phố Cầu Giấy, phường Láng Thượng, quận Đống Đa, tp Hà Nội

(84.24) 37663311

(84.24) 37669613

www.utc.edu.vn

dhgtvt@utc.edu.vn

Phân hiệu tại thành phố Hồ Chí Minh

Số 450-451, đường Lê Văn Việt, phường Tăng Nhơn Phú A,
tp Thủ Đức, tp Hồ Chí Minh

(84.28) 38966798

(84.28) 38964736

phanhieu.utc.edu.vn

info@utc2.edu.vn

ISBN 978-604-76-3092-9

9 786047 630929

SÁCH KHÔNG BÁN

KỶ YẾU HỘI THẢO KHOA HỌC

GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CƠ BẢN NĂM 2025

15/11
1945-2025

KỶ YẾU
HỘI THẢO KHOA HỌC

GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CƠ BẢN NĂM 2025

NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

KỶ YẾU HỘI THẢO KHOA HỌC
GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CƠ BẢN NĂM 2025

NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI

HÀ NỘI - 2025

BAN TỔ CHỨC HỘI THẢO

PGS.TS. Nguyễn Thị Mai	Trưởng BTC
TS. Ngô Đức Chinh	Ủy viên TT
TS. Mai Nam Phong	Ủy viên
PGS.TS. Trần Văn Long	Ủy viên
PGS.TS. Nguyễn Thị Hòa	Ủy viên
TS. Nguyễn Thị Hồng Tuyến	Ủy viên
TS. Nguyễn Thế Vinh	Ủy viên
TS. Nguyễn Trường Giang	Ủy viên
TS. Phạm Minh Phúc	Ủy viên
TS. Nguyễn Quang Anh	Ủy viên
ThS. Nguyễn Diệu Thúy	Ủy viên
TS. Lại Thị Hoan	Ủy viên
ThS. Hoàng Thiệu Anh	Ủy viên

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Nhận thức rõ tầm quan trọng của công tác nghiên cứu khoa học trong việc nâng cao chất lượng đội ngũ giảng viên, đồng thời nâng cao chất lượng giảng dạy, trong những năm gần đây, việc đẩy mạnh nghiên cứu khoa học đã được Khoa Khoa học Cơ bản xác định là một trong những hoạt động trọng tâm trong các chương trình công tác của Khoa.

Khoa Khoa học Cơ bản hiện có 84 cán bộ, giảng viên và 14 giảng viên thỉnh giảng, hợp đồng thuộc 08 bộ môn: Giải tích, Đại số & Xác suất thống kê, Vật lý, Hóa học, Anh văn, Nga-Pháp, Hình họa-Vẽ kỹ thuật và Cơ lý thuyết; trong đó có: 06 Phó Giáo sư, 25 Tiến sĩ, 48 Thạc sỹ, 05 Cử nhân. Hàng năm, Khoa chủ trì hàng chục đề tài cấp Trường; chủ trì và tham gia các đề tài cấp Bộ và đề tài Quỹ Nafosted. Trong 5 năm gần đây, các giảng viên của Khoa đã công bố 107 công trình trên các tạp chí quốc tế thuộc danh mục ISI và Scopus, góp phần tạo nên thương hiệu của Nhà trường.

Ngoài giảng dạy các môn khoa học cơ bản, từ năm học 2018-2019, Khoa KHCB được Nhà trường giao nhiệm vụ đào tạo chuyên ngành Toán - Tin ứng dụng thuộc ngành đào tạo Toán ứng dụng. Hiện đã có 3 khóa sinh viên tốt nghiệp ra trường, tỉ lệ sinh viên có việc làm ngay rất cao và với mức thu nhập cao. Đặc biệt từ năm học 2024 - 2025 khoa KHCB tiếp tục mở chuyên ngành đào tạo thứ 2, ngành Ngôn ngữ Anh chính thức tuyển sinh. Việc tiếp tục mở các ngành đào tạo mới, theo hướng chuyên môn mà Khoa đang quản lý là hướng phát triển tiếp theo của Khoa trong thời gian tới.

Để đạt được những thành quả trong giảng dạy và nghiên cứu, thời gian qua, Khoa đã luôn khuyến khích đội ngũ giảng viên chủ động đổi mới, cải tiến phương pháp giảng dạy, tích cực tham gia các Hội nghị, Hội thảo trong nước và quốc tế về các lĩnh vực chuyên môn, tăng cường các công bố quốc tế để nâng cao chất lượng nghiên cứu khoa học.

*Tiếp nối thành công của Hội thảo các năm 2018, năm 2020, năm 2022 và năm 2024, Khoa Khoa học Cơ bản tổ chức **"Hội thảo về giảng dạy và nghiên cứu Khoa học Cơ bản năm 2025".** Hội thảo là diễn đàn để các giảng viên, các nhà khoa học trao đổi, học hỏi, chia sẻ kinh nghiệm nghiên cứu và giảng dạy trong các lĩnh vực: Toán học, Vật lý, Hóa học, Ngoại ngữ, Cơ lý thuyết và Hình họa - Vẽ kỹ thuật và các lĩnh vực khác liên quan. Những công trình nghiên cứu có giá trị của Hội thảo được biên tập và xuất bản trong cuốn **"Kỷ yếu Hội thảo về giảng dạy và nghiên cứu Khoa học Cơ bản năm 2025".***

Khoa Khoa học cơ bản trân trọng gửi lời cảm ơn tới các tác giả trong và ngoài Trường đã dành sự quan tâm và gửi đến Hội thảo các bài viết có chất lượng. Xin cảm ơn các nhà giáo, các nhà khoa học từ các Trường đại học, các Viện nghiên cứu đã dành thời gian và công sức đọc phản biện các bài báo, giúp Ban tổ chức lựa chọn các báo cáo tiêu biểu để đăng trong Kỷ yếu của Hội thảo. Những kết quả từ Hội thảo sẽ là cơ sở quan trọng để Khoa tiếp tục đổi mới, cải tiến phương pháp giảng dạy, định hướng nghiên cứu khoa học cũng như triển khai mở mới các ngành đào tạo.

Trong quá trình biên tập Kỷ yếu, không tránh khỏi những hạn chế, thiếu sót, Ban Tổ chức mong nhận được sự chia sẻ và các ý kiến góp ý của độc giả.

Xin trân trọng cảm ơn!

BAN TỔ CHỨC HỘI THẢO

KHOẢNG CÁCH BIẾN PHÂN TOÀN PHẦN VỚI SỰ XẤP XỈ CỦA MỘT SỐ PHÂN PHỐI THƯỜNG GẶP

Nguyễn Thu Hằng*, **Nguyễn Thị Hằng, Phạm Ngọc Anh**

Trường Đại học Mỏ - Địa chất, 18 Phố Viên, Bắc Từ Liêm, Hà Nội

*Email: nguyenthuhangbmtoan@humg.edu.vn

Tóm tắt: Trong báo cáo này, chúng tôi tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa một số phân phối thường gặp và sử dụng một số ước lượng đã biết để đưa ra một ước lượng cho khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson. Chúng tôi cũng tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa hai phân phối này trong một số trường hợp cụ thể.

Từ khóa: khoảng cách biến phân toàn phần, phân phối nhị thức, phân phối Poisson.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Khoảng cách biến phân toàn phần (total variation distance) là một trong những khoảng cách cơ bản trong lý thuyết xác suất. Nó là một trong những tiêu chuẩn đầu tiên xét đến khi nghiên cứu về khoảng cách cũng như sự hội tụ của các biến ngẫu nhiên. Với vai trò quan trọng, khoảng cách biến phân toàn phần giữa các biến ngẫu nhiên được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Đầu tiên phải kể đến là những nghiên cứu cơ bản nhất về khoảng cách biến phân toàn phần như tính toán về khoảng cách biến phân toàn phần đối với một số biến ngẫu nhiên thường gặp; những tính chất cơ bản và mối liên hệ giữa khoảng cách biến phân toàn phần đến sự hội tụ của biến ngẫu nhiên [1, 2]. Tiếp theo là rất nhiều các công trình nghiên cứu về tính toán và ước lượng khoảng cách biến phân toàn phần giữa các biến ngẫu nhiên khác nhau, chẳng hạn như cho phân phối là tích các phân phối 0-1 [3], bất đẳng thức Le Cam cho ước lượng khoảng cách biến phân toàn phần giữa tổng các phân phối nhị thức và phân phối Poisson [4], cho mô hình Markov,… Các nghiên cứu cũng được mở rộng sang phân phối nhiều chiều [5]. Bên cạnh đó, việc so sánh giữa các khoảng cách (metric) cũng được chú ý [6].

Trong báo cáo này, với mục đích phục vụ nghiên cứu, giảng dạy, chúng tôi tổng hợp một số tính chất cơ bản của khoảng cách biến phân toàn phần sau đó chúng tôi tính toán khoảng cách biến phân toàn phần cho một số biến ngẫu nhiên thường gặp. Chúng tôi cũng ước lượng về khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson, từ đó đưa ra một công thức ước lượng đơn giản để minh họa cho sự xấp xỉ được giữa hai phân phối này. Cuối cùng, chúng tôi cũng dùng phần mềm Python để tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson trong một số trường hợp cụ thể.

Báo cáo của chúng tôi chia làm hai phần:

Phần 1. Nêu một số kiến thức cơ bản về khoảng cách biến phân toàn phần.

Phần 2. Một số kết quả và thảo luận.

4. NỘI DUNG

4.1. Một số kiến thức cơ sở về khoảng cách biến phân toàn phần

Theo [7], khoảng cách biến phân toàn giữa hai biến ngẫu nhiên được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 2.1. Xét không gian đo $(\Omega, \mathcal{F})$ và P, Q là hai độ đo xác suất trên $(\Omega, \mathcal{F})$ thì khoảng cách biến phân toàn phần được định nghĩa bởi

$$d_{TV}(P, Q) = \sup_{A \in \mathcal{F}} |P(A) - Q(A)|. \tag{1}$$

Nói cách khác, nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên thì

$$d_{TV}(X, Y) = \sup_{D \in \mathcal{B}(\mathbb{R})} |P(X \in D) - P(Y \in D)|. \tag{2}$$

Người ta cũng chứng minh được rằng

$$d_{TV}(X,Y) = \frac{1}{2} \sup_{\|h\|_\infty \le 1} \left| E(h(X)) - E(h(Y)) \right|, \tag{3}$$

Trong đó: $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)| \le 1.$

Nếu X, Y có hàm mật độ lần lượt là $f(x)$ và $g(x)$ thì

$$d_{TV}(X,Y) = \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - g(x) \right| dx. \tag{4}$$

Nếu X, Y là các biến ngẫu nhiên rời rạc nhận giá trị trong $\mathbb{Z}$ thì

$$d_{TV}(X,Y) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| P(X = k) - P(Y = k) \right|. \tag{5}$$

Chúng tôi tổng hợp một số tính chất quan trọng sau đây của khoảng cách biến phân toàn phần.

Từ định nghĩa, ta dễ dàng có được những tính chất sau đây:

Mệnh đề 2.2. Khoảng cách biến phân toàn phần là một Metric đủ.

Mệnh đề 2.3. Xét không gian đo $(\Omega, \mathcal{F})$ và P, Q là hai độ đo xác suất trên $(\Omega, \mathcal{F})$ thì $0 \le d_{TV}(P,Q) \le 1$. Hơn nữa, $d_{TV}(P,Q) = 0$ khi và chỉ khi $P = Q$ và $d_{TV}(P,Q) = 1$ khi và chỉ khi tồn tại $A \in \mathcal{F}$ sao cho $P(A) = 1, Q(A) = 0$ hoặc $P(A) = 0, Q(A) = 1$.

Mệnh đề 2.4. Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên thì $d_{TV}(X,Y) \le P(X \ne Y)$.

Mệnh đề 2.5. Cho dãy biến ngẫu nhiên liên tục $\{F_i\}_{i=1}^n$ và biến ngẫu nhiên liên tục và F_∞. Khi đó, $d_{TV}(F_n, F_\infty) \to 0$ tương đương $F_n \xrightarrow{L_1} F_\infty$.

Mệnh đề 2.6. Cho dãy biến ngẫu nhiên $\{F_i\}_{i=1}^n$ và biến ngẫu nhiên F_∞. Nếu $d_{TV}(F_n, F_\infty) \to 0$ thì $F_n \xrightarrow{\text{law}} F_\infty$.

Điều ngược lại nói chung là không đúng. Ta lấy ví dụ F_n là dãy biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ $\frac{2}{\pi}\cos^2(nx)\mathbf{1}_{[0,\pi]}(x)$ và F_∞ là biến ngẫu nhiên có phân phối đều liên tục trên $[0,\pi]$ Khi đó, $F_n \xrightarrow{\text{law}} F_\infty$. Tuy nhiên

$$\begin{aligned} d_{TV}(F_n, F_\infty) &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{1}{\pi}\left|2\cos^2(nx)-1\right|dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \left|\cos(2nx)\right|dx \\ &= \frac{4n}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4n}} \cos(2nx)dx = 1 > 0,\ \forall n. \end{aligned} \tag{6}$$

Mệnh đề 2.7. Nếu $\{X_i\}_{i=1}^n$ và $\{Y_i\}_{i=1}^n$ là hai dãy biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối, có kì vọng và phương sai hữu hạn. Khi đó

$$d_{TV}\left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i\right) \le \sum_{i=1}^n d_{TV}(X_i, Y_i). \tag{7}$$

Chi tiết chứng minh của Mệnh đề 2.6 và Mệnh đề 2.7 có thể tìm trong [7, 8].

4.2. Kết quả và thảo luận

Trong phần này, chúng tôi tính toán và ước lượng khoảng cách biến phân toàn phần cho một số biến ngẫu nhiên thường gặp.

Mệnh đề 2.8. Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên có phân phối đều liên tục $X \sim U[0,a]$ và $Y \sim U[0,b]$ với $0 < a < b$ thì

$$d_{TV}(X,Y) = \frac{b-a}{b}. \tag{8}$$

Chứng minh. Áp dụng công thức (4) ta được

$$d_{TV}(X,Y) = \frac{1}{2}\left(\int_0^a \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)dx + \int_a^b \frac{1}{b}dx\right) = \frac{b-a}{b}.$$

Mệnh đề 2.9. Nếu X có phân phối 0-1 với tham số p và Y có phân phối 0-1 với tham số $q > p$ thì

$$d_{TV}(X,Y) = q - p. \tag{9}$$

Chứng minh. Bảng phân phối xác suất của X và Y là

X	0	1
P	$1-p$	p

Y	0	1
P	$1-q$	q

Theo công thức (5), ta có

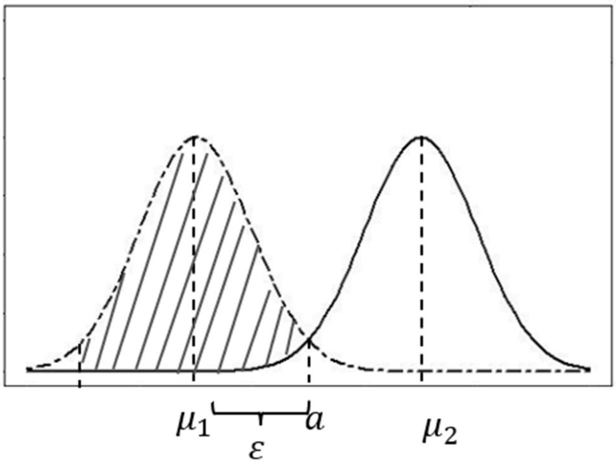
$$d_{TV}(X,Y) = \frac{1}{2}\big(1-p-(1-q)+q-p\big) = q-p.$$

Mệnh đề 2.10. Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn, $X \sim N(\mu_1, 1)$ và $Y \sim N(\mu_2, 1)$ với $\mu_2 > \mu_1$, thì

$$d_{TV}(X,Y) = 2\phi_0(\varepsilon), \tag{10}$$

Trong đó: ϕ_0 là hàm Laplace và $\varepsilon = \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{2}$.

Chứng minh.



Đặt $a = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2}$. Theo công thức (4), ta có

$$d_{TV}(X,Y) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left| e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2}} - e^{\frac{-(x-\mu_2)^2}{2}} \right| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{a}\left(e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2}} - e^{\frac{-(x-\mu_2)^2}{2}} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mu_1-\varepsilon}^{\mu_1+\varepsilon} e^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2}} dx = 2\phi_0(\varepsilon).$$

Tiếp theo, chúng tôi quan tâm đến khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson. Trước hết, ta xét trường hợp đơn giản.

Mệnh đề 2.11. Nếu X có phân phối 0-1 với tham số p và Y có phân phối Poisson tham số p thì

$$d_{TV}(X,Y) = p(1-e^{-p}). \tag{11}$$

Chứng minh. Bảng phân phối xác suất của X là

X	0	1
P	$1-p$	p

Và $P(Y=k)=\dfrac{e^{-p}p^k}{k!}$. Mặt khác, theo công thức khai triển Maclaurin ta có

$$e^p=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{p^i}{i!} \text{ và } e^{-p}=1-p+\frac{e^{-c}}{2!}p^2\ge 1-p;\ 0<c<p.$$

Suy ra, theo công thức (5), ta thu được

$$\begin{aligned} d_{TV}(X,Y)&=\frac{1}{2}\left[e^{-p}-(1-p)+p-pe^{-p}+e^{-p}\left(\frac{p^2}{2!}+\frac{p^3}{3!}+\ldots\right)\right]\\ &=\frac{1}{2}\left[e^{-p}\left(1+p+\frac{p^2}{2!}+\frac{p^3}{3!}+\ldots\right)+2p-2pe^{-p}-1\right]\\ &=\frac{1}{2}\left(e^{-p}e^{p}+2p-2pe^{-p}-1\right)=p(1-e^{-p}). \end{aligned}$$

Mệnh đề được chứng minh xong.

Mệnh đề 2.12. Nếu X có phân phối nhị thức tham số n,p, $\left(X\sim B(n,p)\right)$ và Y có phân phối Poisson tham số λ, $\left(Y\sim P(\lambda)\right)$ thì

$$d_{TV}(X,Y)\le |np-\lambda|+\frac{\lambda^2}{n}.$$

Chứng minh. Vì khoảng cách biến phân toàn phần là Metric nên ta có:

$$\begin{aligned} d_{TV}(X,Y)&=d_{TV}\left(B(n,p),P(\lambda)\right)\\ &\le d_{TV}\left(B(n,p),B\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)\right)+d_{TV}\left(B\left(n,\frac{\lambda}{n}\right),P(\lambda)\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Vì biến ngẫu nhiên $B(n,p)$ có thể coi là tổng của n biến ngẫu nhiên độc lập có cùng phân phối 0-1 với tham số p nên áp dụng ước lượng (7) và công thức (9) ta thu được.

$$d_{TV}\left(B(n,p),B\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)\right)\le n\left|p-\frac{\lambda}{n}\right|. \tag{13}$$

Mặt khác, theo định lí Le Cam [4] ta có:

$$d_{TV}\left(B\left(n,\frac{\lambda}{n}\right),P(\lambda)\right)\le n\left(\frac{\lambda}{n}\right)^2=\frac{\lambda^2}{n}. \tag{14}$$

Thay (13) và (14) vào (12) ta thu được.

$$d_{TV}\left(B(n,p),P(\lambda)\right)\le\left|np-\lambda\right|+\frac{\lambda^2}{n}. \tag{15}$$

Từ ước lượng (15) ta thấy rằng, khi λ cố định và $n\to\infty$ sao cho $np_n\to\lambda$ thì khoảng cách biến phân toàn phần giữa biến ngẫu nhiên $X_n\sim B(n,p_n)$ và $P(\lambda)$ sẽ dần về 0. Từ đó suy ra sự hội tụ theo phân phối giữa $B(n,p_n)$ và $P(\lambda)$. Ta thu được một cách lí giải cho sự xấp xỉ được giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson.

Phần cuối của báo cáo, chúng tôi xét một trường hợp đặc biệt, tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức $B(n,p)$ và phân phối Poisson $P(\lambda)$, trong đó $\lambda=np.$ Theo (5), ta có:

$$\begin{aligned} d\left(B(n,p),P(\lambda)\right)&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|C_n^k p^k(1-p)^{n-k}-\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right|+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right)\\ &=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\left|C_n^k p^k(1-p)^{n-k}-\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right|+1-\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Chúng tôi sử dụng phần mềm Python để tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối này một số trường hợp khác nhau và thu được bảng số liệu sau:

n	p	d_{TV}	n	p	d_{TV}
1	0,5	0,19673467	1	0,02	0,00039602
10	0,5	0,17183508	10	0,02	0,00300340
50	0,5	0,16696519	50	0,02	0,005583409
100	0,5	0,16662262	100	0,02	0,004572241
1	0,1	0,09516258	1	0,01	$9{,}9501662.10^{-5}$
10	0,1	0,02931157	10	0,01	$8{,}6678929.10^{-4}$
50	0,1	0,02595859	50	0,01	$2{,}2932899.10^{-3}$
100	0,1	0,02582856	100	0,01	$2{,}7752947.10^{-3}$
1	0,05	0,00243852	1	0,001	$9{,}99500166.10^{-7}$
10	0,05	0,01185937	10	0,001	$9{,}86082376.10^{-6}$
50	0,05	0,01307091	50	0,001	$4{,}64180741.\ 10^{-5}$
100	0,05	0,012598451	100	0,001	$8{,}60426922.\ 10^{-5}$

Bảng 1. *d_{TV} giữa phân phối chuẩn và phân phối Poisson.*

Từ bảng số liệu trên ta có thể thấy rằng, cùng một λ, nếu n càng lớn (p càng nhỏ) thì d_{TV} càng nhỏ và nếu cùng một n thì p càng nhỏ d_{TV} càng nhỏ. Tuy nhiên, bảng số liệu không thể hiện được rõ ràng sự biến thiên của d_{TV} trong trường hợp cố định p và thay đổi n.

3. KẾT LUẬN

Báo cáo đã tổng kết một số kiến thức cơ bản về khoảng cách biến phân toàn phần giữa các biến ngẫu nhiên. Từ đó, tính toán khoảng cách biến phân toàn phần giữa một số biến ngẫu nhiên cơ bản. Báo cáo cũng đưa ra ước lượng cho khoảng cách biến phân toàn phần giữa phân phối nhị thức và phân phối Poisson, đồng thời tính toán khoảng cách giữa hai phân phối trong một số trường hợp cụ thể. Kết quả của báo cáo nhằm mục đích làm tài liệu tham khảo và hỗ trợ giảng dạy cho sinh viên ngành toán.

LỜI CẢM ƠN

Nghiên cứu này được tài trợ bởi trường Đại học Mỏ - Địa chất, trong đề tài mã số T25-17.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Patrick Billingsley: Convergence of Probability Measures. Wiley, New York, 1968.

[2]. [2] Svetlozar T. Rachev: Probability metrics and the stability of stochastic models. Wiley, Chichester, 1991.

[3]. Feng, Weiming; Liu, Liqiang; Liu, Tianren. On deterministically approximating total variation distance. Proceedings of the 2024 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), 1766-1791, SIAM, Philadelphia, PA, 2024.

https://doi.org/10.48550/arXiv.2309.14696.

[4]. Le Cam, Lucien. An approximation theorem for the Poisson binomial distribution. Pacific J. Math. 10 (1960), 1181--1197. DOI: 10.2140/pjm.1960.10.1181.

[5]. Feng, Weiming; Guo, Heng; Jerrum, Mark; Wang, Jiaheng. A simple polynomial-time approximation algorithm for the total variation distance between two product distributions. 2023 Symposium on Simplicity in Algorithms (SOSA), 343--347, SIAM, Philadelphia, PA, 2023. http://doi.org/10.46298/theoretics.23.7.

[6]. Chae, Minwoo; Walker, Stephen G. Wasserstein upper bounds of the total variation for smooth densities. Statist. Probab. Lett. 163 (2020), 108771, 6 pp.

https://doi.org/10.1016/j.spl.2020.108771.

[7]. Nourdin, Ivan; Poly, Guillaume. Convergence in law implies convergence in total variation for polynomials in independent Gaussian, gamma or beta random variables. High dimensional probability VII, 381--394, Progr. Probab., 71, Springer, [Cham], 2016.

https://doi.org/10.48550/arXiv.1305.2766.

[8]. Svante Janson, Probability Distance.

https://www2.math.uu.se/~svantejs/papers/sjN21.pdf, truy cập ngày 01 tháng 03 năm 2025.

NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI
Số 8 phố Tăng Bạt Hổ, phường Phạm Đình Hổ, quận Hai Bà Trưng, TP. Hà Nội
ĐT: 024.39423346 - 024.39424620 * Fax: 024.38224784
Website: www.nxbgtvt.vn * Email: nxbgtvt@fpt.vn

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN, NỘI DUNG:
GIÁM ĐỐC - TỔNG BIÊN TẬP: **Nguyễn Minh Nhật**

BIÊN TẬP: **Dương Hồng Hạnh**
THIẾT KẾ: **Trường Đại học Giao thông Vận tải**

ĐỐI TÁC LIÊN KẾT XUẤT BẢN: **Trường Đại học Giao thông Vận tải**

In 200 cuốn khổ 20,5 x 29,5cm tại Xưởng in Trường Đại học Giao thông vận tải.
Địa chỉ: Số 3, phố Cầu Giấy, phường Láng Thượng, quận Đống Đa, TP. Hà Nội.
Số xác nhận đăng ký xuất bản: 923-2025/CXBIPH/1-13/GTVT.
Mã số sách tiêu chuẩn quốc tế - ISBN: 978-604-76-3092-9.
Quyết định xuất bản số: 09 LK/QĐ-XBGT ngày 04 tháng 4 năm 2025.
In xong và nộp lưu chiểu năm 2025.