

# Các định lý giá trị trung bình Rolle, Lagrange, Flett, Meyer và một số áp dụng

Nguyễn Thị Lan Hương<sup>(1)</sup>, Vũ Tiến Việt<sup>(2)</sup>

**TÓM TẮT:** Trong chương trình Giải tích Toán học, các định lý về giá trị trung bình đóng một vai trò quan trọng. Dựa trên các định lý Rolle, Lagrange chúng tôi xin giới thiệu các định lý Flett, Meyer được phát triển trong khoảng thời gian 50 năm trở lại đây. Đồng thời chúng tôi nêu ra một số áp dụng các định lý đó cho các bài toán tích phân.

**TỪ KHÓA:** Định lý giá trị trung bình, Flett, Meyer

## 1 Các định lý kinh điển và mới được phát triển

1. Định lý Rolle<sup>(3)</sup>: Năm 1691 Rolle đưa ra định lý sau mang tên ông:

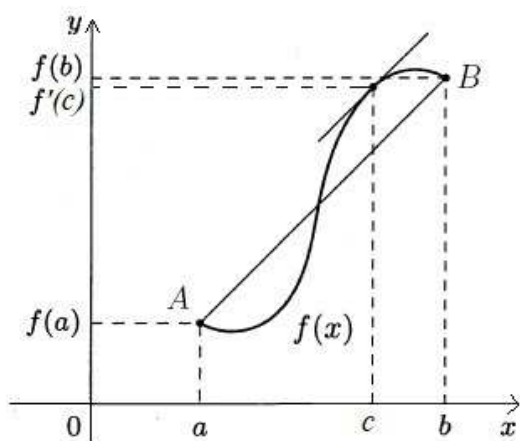
Giả sử hàm  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục trên  $[a, b]$ , khả vi trong  $(a, b)$

và  $f(a) = f(b)$ . Khi đó tồn tại điểm  $c \in (a, b)$  để  $f'(c) = 0$ .

2. Định lý Lagrange<sup>(4)</sup>: Giả sử hàm  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục trên  $[a, b]$ , khả vi trong  $(a, b)$ .

Khi đó tồn tại điểm  $c \in (a, b)$  sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Hình 1: Minh họa hình học cho định lý Lagrange

---

<sup>(1)</sup>Trường Đại học Mở Đại chất.

<sup>(2)</sup>Học viện An ninh nhân dân.

<sup>(3)</sup>Michel Rolle (1652-1719), nhà toán học người Pháp.

<sup>(4)</sup>Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), nhà toán học người Pháp.

3. Định lý Flett<sup>(5)</sup>. Năm 1958 Flett đưa ra định lý sau:

Cho hàm  $f(x)$  khả vi trên  $[a, b]$  và thỏa mãn  $f'(a) = f'(b)$  (hai đạo hàm này được hiểu là đạo hàm một phía). Khi đó tồn tại điểm  $c \in (a, b)$  sao cho

$$f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

*Chứng minh. Cách 1.* Ta có thể giả thiết  $f'(a) = f'(b) = 0$ , vì có thể thay  $f(x)$  bởi  $h(x) = f(x) - xf'(a)$ , lúc đó  $h'(x) = f'(x) - f'(a)$ ,  $h'(a) = h'(b) = 0$  và nếu kết luận đúng với  $h(x)$  thì

$$\begin{aligned} h'(c) &= \frac{h(c) - h(a)}{c - a}, \\ \text{hay } f'(c) - f'(a) &= \frac{f(c) - cf'(a) - f(a) + af'(a)}{c - a}, \\ \text{nên } f'(c) &= \frac{f(c) - cf'(a) - f(a) + af'(a)}{c - a} + f'(a) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}, \end{aligned}$$

tức là kết luận đúng cho  $f(x)$ .

Ta xét hàm

$$g(x) = \begin{cases} f'(a) = 0 & \text{khi } x = a \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{khi } a < x \leq b \end{cases}$$

Khi đó  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) = 0 = g(a)$ , nên  $g(x)$  liên tục trên  $[a, b]$ . Rõ ràng  $g(x)$  khả vi trong  $(a, b]$  và

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{x - a} - \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)^2}.$$

Ta thấy: +) Nếu  $g(b) = 0$ , thì theo định lý Rolle  $\exists c \in (a, b)$  sao cho  $g'(c) = 0$ , tức là

$$\frac{f'(c)}{c - a} - \frac{f(c) - f(a)}{(c - a)^2} = 0 \quad \text{hay} \quad f'(c) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

$$+) \text{ Nếu } g(b) > 0, \text{ thì } g'(b) = -\frac{f(b) - f(a)}{(b - a)^2} = -\frac{g(b)}{b - a} < 0.$$

Suy ra  $\exists x_1 \in (a, b)$  để  $g(x_1) > g(b)$  (bởi vì nếu  $g(x) \leq g(b), \forall x \in (a, b)$  thì sẽ dẫn tới  $g'(b) \geq 0$ , mâu thuẫn với  $g'(b) < 0$ ).

Lúc này  $g(a) = 0 < g(b) < g(x_1)$  và do  $g(x)$  liên tục, nên phải tồn tại  $x_2 \in (a, b)$  để  $g(x_2) = g(b)$ . Sử dụng định lý Rolle cho hàm  $g(x)$  trên  $[x_2, b]$  thì tồn tại điểm  $c \in (x_2, b) \subset (a, b)$  sao cho  $g'(c) = 0$ , dẫn tới kết luận như trên.

---

<sup>(5)</sup>T.M. Flett, giáo sư đại học Liverpool, UK.

+) Nếu  $g(b) < 0$  ta chứng minh tương tự.

Cách 2. Ta xét hàm

$$h(x) = \begin{cases} f'(a) & \text{khi } x = a \\ \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{khi } a < x \leq b \end{cases}$$

Dễ thấy  $h(x)$  liên tục trên  $[a, b]$  và khả vi trong  $(a, b)$ . Nếu  $h(x)$  đạt cực trị tại  $c \in (a, b)$  thì theo định lý Fermat  $h'(c) = 0$ , từ đó dẫn đến điều cần chứng minh.

Nếu  $h(x)$  đạt cực trị tại  $a$  hoặc  $b$  thì không giảm tổng quát ta giả thiết  $h(a) \leq h(x) \leq h(b), \forall x \in [a, b]$ . Khi đó  $f(x) \leq f(a) + (x - a)h(b), \forall x \in [a, b]$  và

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = \frac{f(b) - f(x)}{b - x} &\geq \frac{f(b) - f(a) - (x - a)h(b)}{b - x} \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = h(b). \end{aligned}$$

Lấy giới hạn khi  $x \rightarrow b - 0$  ta được  $f'(b) \geq h(b)$ , nên  $h(a) = f'(a) = f'(b) \geq h(b)$ .

Do đó  $h(x)$  là hàm hằng, nên  $h'(x) \equiv 0$  và có kết luận của định lý.  $\square$

4. *Định lý Meyer*<sup>(6)</sup>. Năm 1977 Meyer đưa ra định lý sau:

Giả sử  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm khả vi trên  $[a, b]$  và thỏa mãn  $f'(a) = f'(b)$ . Khi đó tồn tại điểm  $c \in (a, b)$  sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Chứng minh.* Ta xét hàm

$$m(x) = \begin{cases} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} & \text{khi } a \leq x < b \\ f'(b) & \text{khi } x = b \end{cases}$$

Dễ thấy  $m(x)$  liên tục và khả vi. Nếu  $m(x)$  đạt cực trị tại  $c \in (a, b)$  thì theo định lý Fermat  $m'(c) = 0$ , dẫn đến kết luận của định lý.

Nếu  $m(x)$  đạt cực trị tại  $a$  hoặc  $b$  thì không giảm tổng quát ta giả thiết  $m(a) \leq m(x) \leq m(b), \forall x \in [a, b]$ . Khi đó  $f(x) \leq f(b) - (b - x)m(a), \forall x \in [a, b]$  và

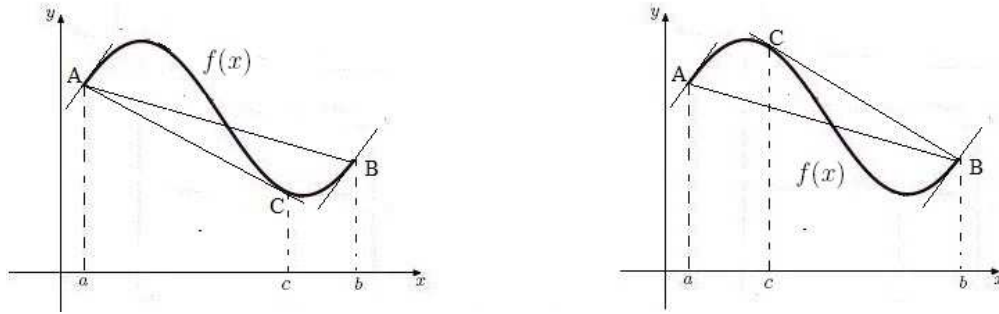
$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &\leq \frac{f(b) - f(a) - (b - x)m(a)}{x - a} \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m(a). \end{aligned}$$

---

<sup>(6)</sup>R.E. Meyer (1919-2008), giáo sư đại học Wisconsin-Madison, USA.

Lấy giới hạn khi  $x \rightarrow a+0$  ta được  $f'(a) \leq m(a)$ , nên  $m(b) = f'(b) = f'(a) \leq m(a)$ .

Dẫn tới  $m(x)$  là hàm hằng, do đó  $m'(x) \equiv 0$  và ta có kết luận của định lý.  $\square$



Hình 2: Minh họa hình học cho định lý Flett và định lý Meyer

*Nhận xét.* Định lý Meyer là một cách bổ sung cho đầy đủ của định lý Flett và chứng minh của định lý Meyer dựa theo cách chứng minh thứ hai của định lý Flett.

Định lý Lagrange nói rằng tồn tại tiếp tuyến của đồ thị hàm  $f(x)$  song song với đường thẳng  $AB$ .

Định lý Flett nói rằng tồn tại tiếp tuyến của đồ thị hàm  $f(x)$  đi qua điểm  $A$ , định lý Meyer nói rằng tồn tại tiếp tuyến của đồ thị hàm  $f(x)$  đi qua điểm  $B$ .

## 2 Một số bài toán áp dụng

1. Cho  $0 < a < b$  và hàm  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục.

Chứng minh rằng tồn tại  $c \in (a, b)$  sao cho

$$2f(c) = \frac{1}{\sqrt{c}} \left[ \frac{\sqrt{a} + \sqrt{c}}{a - c} + \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{b - c} \right] \int_a^c f(x) dx.$$

Lời giải. Xét hàm

$$g(x) = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{b}) \int_a^x f(t) dt, x \in [a, b].$$

Ta thấy  $g(a) = g(b) = 0$  và

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left[ (\sqrt{x} - \sqrt{a}) + \sqrt{x} - \sqrt{b} \right] \int_a^x f(t) dy + (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} - \sqrt{b}) f(x).$$

Theo định lý Rolle tồn tại  $c \in (a, b)$  sao cho  $g'(c) = 0$ , tức là

$$\frac{1}{2\sqrt{c}} \left[ (\sqrt{c} - \sqrt{a}) + (\sqrt{c} - \sqrt{b}) \right] \int_a^c f(x) dx + (\sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} - \sqrt{b}) f(c) = 0.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2f(c) &= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{c}) + (\sqrt{b} - \sqrt{c})}{(\sqrt{a} - \sqrt{c})(\sqrt{b} - \sqrt{c})} \int_a^c f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{c}} \left[ \frac{\sqrt{a} + \sqrt{c}}{a - c} + \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{b - c} \right] \int_a^c f(x) dx. \end{aligned}$$

2. Cho  $f(x), g(x)$  là các hàm dương, liên tục trên  $[a, b]$  và cho số thực  $\alpha$ .

Chứng minh rằng tồn tại  $c \in (a, b)$  sao cho

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x) dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x) dx} = \alpha.$$

Lời giải. Xét  $h(x) = e^{-\alpha x} \int_a^x f(t) dt \int_x^b g(t) dt, x \in [a, b]$ . Ta có  $h(a) = h(b) = 0$  và

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\alpha e^{-\alpha x} \int_a^x f(t) dt \int_x^b g(t) dt + e^{-\alpha x} f(x) \int_x^b g(t) dt - e^{-\alpha x} g(x) \int_a^x f(t) dt \\ &= -e^{-\alpha x} \left[ \alpha \int_a^x f(t) dt \int_x^b g(t) dt - f(x) \int_x^b g(t) dt + g(x) \int_a^x f(t) dt \right] \end{aligned}$$

Sử dụng định lý Rolle thì tồn tại  $c \in (a, b)$  để  $h'(c) = 0$ .

Chú ý  $e^{-\alpha x}$ ,  $f(x)$ ,  $g(x)$  là các hàm dương, ta suy ra

$$\alpha \int_a^c f(t)dt \int_c^b g(t)dt - f(x) \int_x^c g(t)dt + g(x) \int_a^c f(t)dt = 0,$$

hay là

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx} = \alpha.$$

3. Cho hàm  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục thỏa mãn  $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$ .

Chứng minh rằng tồn tại  $c \in (0, 1)$  sao cho  $\int_0^c xf(x)dx = 0$ .

Lời giải. Xét hàm  $h(t) = t \int_0^t f(x)dx - \int_0^t xf(x)dx$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Ta thấy  $h(0) = h(1) = 0$  và  $h'(t) = \int_0^t f(x)dx$ .

Theo định lý Rolle tồn tại  $b \in (0, 1)$  sao cho  $h'(b) = 0$ .

Do  $h'(0) = h'(b) = 0$ , nên theo định lý Flett tồn tại  $c \in (0, b) \subset (0, 1)$  sao cho

$$h'(c) = \frac{h(c) - h(0)}{c - 0} = \frac{h(c)}{c}, \quad \text{hay} \quad ch'(c) = h(c).$$

Tức là

$$c \int_0^c f(x)dx = c \int_0^c f(x)dx - \int_0^c xf(x)dx,$$

suy ra điều phải chứng minh.

4. (OLP-Romania-2006). Cho hàm  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục và thỏa mãn  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ .

Chứng minh rằng tồn tại  $\xi \in (0, 1)$  sao cho  $\int_0^\xi xf(x)dx = 0$ .

Lời giải. Xét hàm  $g(t) = t \int_0^t f(x)dx - \int_0^t xf(x)dx$  khả vi trên  $[0, 1]$ .

Dễ dàng tính được  $g'(t) = \int_0^t f(x)dx$  và ta có  $g'(0) = g'(1) = 0$ .

Theo định lý Flett tồn tại  $\xi \in (0, 1)$  sao cho

$$g'(\xi) = \frac{g(\xi) - g(0)}{\xi - 0} = \frac{g(\xi)}{\xi}.$$

Như vậy ta được  $\xi g'(\xi) = g(\xi)$ , hay là

$$\xi \int_0^\xi f(x)dx = \xi \int_0^\xi f(x)dx - \int_0^\xi xf(x)dx$$

5. Cho  $f$  là hàm liên tục trên  $[0, 1]$  và thỏa mãn  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ .

Chứng minh rằng tồn tại  $c \in (0, 1)$  sao cho

$$c^2 f(c) = \int_0^c (x + x^2) f(x) dx.$$

Lời giải 1. Xét hàm

$$g(x) = \int_0^x [t^2 + (1-x)t] f(t) dt, \quad x \in [0, 1].$$

Ta thấy  $g(x)$  khả vi trên  $[0, 1]$  và

$$g'(x) = [x^2 + (1-x)x] f(x) - \int_0^x t f(t) dt = x f(x) - \int_0^x t f(t) dt.$$

Ta sẽ chứng minh tồn tại  $a, b \in [0, 1]$  sao cho  $g'(a) > 0$  và  $g'(b) < 0$ . Khi đó do tính liên tục của  $g'$  sẽ tồn tại  $d \in (a, b)$  hoặc  $d \in (b, a)$  để  $g'(d) = 0$ . Kết hợp với  $g'(0) = 0$ , theo định lý Flett sẽ  $\exists c \in (0, d)$  để

$$g'(c) = \frac{g(c) - g(0)}{c - 0} = \frac{g(c)}{c},$$

$$\text{hay } c^2 f(c) - c \int_0^c t f(t) dt = \int_0^c [t^2 + (1-c)t] f(t) dt,$$

dẫn đến điều cần chứng minh.

Thật vậy: Vì  $f$  liên tục trên  $[a, b]$  nên tồn tại  $x_1, x_2 \in [0, 1]$  để

$$m := \min_{x \in [0, 1]} f(x) = f(x_1), \quad M := \max_{x \in [0, 1]} f(x) = f(x_2).$$

Từ giả thiết  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , ta loại trừ trường hợp tầm thường  $f \equiv 0$ , thì phải có  $m < 0$  và  $M > 0$ . Khi đó, nếu  $x_2 > 0$  thì ta lấy  $a = x_2$  và sẽ có

$$g'(a) \geq Ma - M \int_0^a t dt = Ma(1 - \frac{a}{2}) > 0,$$

còn nếu  $x_2 = 0$ , thì do tính liên tục sẽ tồn tại  $a \in (0, 1]$  sao cho  $f(x) \geq \frac{3M}{4}$  với  $x \in [0, a]$  và như thế

$$g'(a) \geq \frac{3M}{4}a - M \int_0^a t dt = \frac{M}{4}a(3 - 2a) > 0.$$

Tương tự, nếu  $x_1 > 0$  thì ta lấy  $b = x_1$  và sẽ có

$$g'(b) \leq mb - m \int_0^b t dt = mb(1 - \frac{b}{2}) < 0,$$

còn nếu  $x_1 = 0$ , thì do tính liên tục sẽ tồn tại  $b \in (0, 1]$  sao cho  $f(x) \leq \frac{3m}{4}$  với  $x \in [0, b]$  và như thế

$$g'(b) \leq \frac{3m}{4}b - m \int_0^b t dt = \frac{3m}{4}b(3 - 2b) < 0.$$

Chứng minh được hoàn thành.

Lời giải 2. Đặt  $F(x) = x \int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$  trên  $[0, 1]$ . Ta có

$F'(x) = \int_0^x f(t)dt$  và  $F'(0) = 0$ . Do  $\int_0^1 f(f)dt = 0$ , nên  $F'(1) = 0$ . Theo định lý

Flett tồn tại  $a \in (0, 1)$  sao cho  $\frac{F(a) - f(0)}{a - 0} = F'(a)$ .

Do đó

$$\int_0^a tf(t)dt = 0, \quad a \in (0, 1). \quad (1)$$

Lại đặt  $G(x) = e^{-x} \int_0^x tf(t)dt$ ,  $x \in [0, 1]$ . Từ (1),  $G(0) = G(a) = 0$ .

Theo định lý Rolle tồn tại  $b \in (0, a)$  sao cho

$$0 = G'(b) = -e^{-b} \int_0^b tf(t)dt + e^{-b}bf(b).$$

Do đó

$$\int_0^b tf(t)dt = bf(b), \quad b \in (0, a). \quad (2)$$

Lại đặt  $H(x) = x \int_0^x tf(t)dt - \int_0^2 (t^2 + t)f(t)dt$ ,  $x \in [0, 1]$ . Khi đó

$$H'(x) = \int_0^x tf(t)dt - xf(x).$$

Sử dụng (2), ta có  $H'(0) = H'(b) = 0$ .

Lại theo định lý Flett tồn tại  $c \in (0, b) \subset (0, 1)$  sao cho

$$\frac{H(c) - H(0)}{c - 0} = H'(c).$$

Do đó

$$c \int_0^c xf(x)dx - \int_0^c (x^2 + x)f(x)dx = c \int_0^c xf(x)dx - c^2f(c).$$

Điều này kéo theo  $c^2f(c) = \int_0^c (x^2 + x)f(x)dx$ .



6. Cho hàm  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục và thỏa mãn  $f(1) = 0$ .

Chứng minh rằng tồn tại  $c \in (0, 1)$  sao cho  $f(c) = \int_0^c f(x)dx$ .

Lời giải. Xét hàm

$$g(t) = te^{-t} \int_0^t f(x)dx, \quad t \in [0, 1].$$

Hàm  $g(t)$  khả vi và

$$g'(t) = e^{-t} \left[ \int_0^t f(x)dx + tf(t) - t \int_0^t f(x)dx \right].$$

Ta thấy  $g'(0) = g'(1) = 0$ , nên theo định lý Flett tồn tại  $c \in (0, 1)$  sao cho

$$g'(c) = \frac{g(c) - g(0)}{c - 0} = \frac{g(c)}{c}, \quad \text{hay} \quad cg'(c) = g(c).$$

Tức là

$$ce^{-c} \left[ \int_0^c f(x)dx + cf(c) - c \int_0^c f(x)dx \right] = ce^{-c} \int_0^c f(x)dx,$$

suy ra điều phải chứng minh.

7. Cho  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm khả vi liên tục thỏa mãn  $f(1) = 0, f'(1) = 1$ .

Chứng tỏ rằng tồn tại  $c \in (0, 1)$  sao cho

$$f(c) = f'(c) \int_0^c f(x)dx.$$

Lời giải. Xét hàm  $g(x) = xe^{-f(x)} \int_0^x f(t)dt$ , ta có

$$g'(x) = e^{-f(x)} \left[ \int_0^x f(t)dt - xf'(x) \int_0^x f(t)dt + xf(x) \right].$$

Ta thấy  $g'(0) = g'(1) = 0$ , nên theo định lý Flett tồn tại  $c \in (0, 1)$  sao cho

$$g'(c) = \frac{g(c) - g(0)}{c - 0} = \frac{g(c)}{c}, \quad \text{tức là} \quad f(c) = f'(c) \int_0^c f(x)dx.$$

8. Cho các hàm  $f, g$  liên tục trên  $[0, 1]$ . Chứng minh rằng tồn tại  $c \in (0, 1)$  sao cho

$$\int_0^1 f(x)dx \int_0^c xg(x)dx = \int_0^1 g(x)dx \int_0^c xf(x)dx.$$

Lời giải. Xét các hàm

$$h(t) = g(t) \int_0^1 f(x)dx - f(t) \int_0^1 g(x)dx, \quad t \in [0, 1],$$
$$H(s) = \int_0^s \left( \int_0^x h(t)dt \right) dx, \quad s \in [0, 1].$$

Ta có

$$H'(s) = \int_0^s h(t)dt \quad \text{nên} \quad H'(0) = \int_0^0 h(t)dt = 0,$$
$$\text{và} \quad H'(1) = \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(t)dt - \int_0^1 g(x)dx \int_0^1 f(t)dt = 0.$$

Theo định lý Flett tồn tại  $c \in (0, 1)$  sao cho

$$H'(c) = \int_0^c h(t)dt = \frac{H(c) - H(0)}{c - 0} = \frac{H(c)}{c}$$
$$\Rightarrow c \int_0^c h(t)dt = H(c) = \int_0^c \left( \int_0^x h(t)dt \right) dx.$$

Do đó

$$\begin{aligned} \int_0^c th(t)dt &= \int_0^c td \left( \int_0^t h(x)dx \right) dt \\ &= \left[ t \int_0^t h(x)dx \right] \Big|_0^c - \int_0^c \left( \int_0^t h(x)dx \right) dt \\ &= c \int_0^c h(x)dx - \int_0^c \left( \int_0^t h(x)dx \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \int_0^c th(t)dt &= \int_0^c \left[ tg(t) \int_0^1 f(x)dx - tf(t) \int_0^1 g(x)dx \right] dt \\ &= \int_0^1 f(x)dx \int_0^c tg(t)dt - \int_0^1 g(x)dx \int_0^c tf(t)dt = 0 \end{aligned}$$

và ta được hệ thức cần phải chứng minh.

9. Cho hàm  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục thỏa mãn

$$\int_a^t f(x)dx \int_b^t f(x)dx \neq 0, \quad \forall t \in [a, b].$$

Chứng minh rằng tồn tại  $c \in (a, b)$  sao cho

$$(c - a)f(c) \left[ \int_c^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \right] = \frac{1}{2} \int_a^c f(x)dx \int_c^b f(x)dx.$$

Lời giải. Xét hàm  $g(t) = \left[ \int_a^t f(x)dx \int_t^b f(x)dx \right]^2, t \in [a, b]$ , ta có

$$g'(t) = 2f(t) \left[ \int_t^b f(x)dx - \int_a^t f(x)dx \right] \int_a^t f(x)dx \int_t^b f(x)dx.$$

Ta thấy  $g'(a) = g'(b) = 0$ , nên theo định lý Flett tồn tại  $c \in (a, b)$  sao cho

$$g'(c) = \frac{g(c) - g(a)}{c - a},$$

hay là

$$\begin{aligned} 2f(c) \left[ \int_c^b f(x)dx - \int_a^c f(x)dx \right] \int_a^c f(x)dx \int_c^b f(x)dx \\ = \frac{\left[ \int_a^c f(x)dx \int_c^b f(x)dx \right]^2}{c - a}. \end{aligned}$$

Chú ý tới điều kiện đề bài  $\int_a^t f(x)dx \int_b^t f(x)dx \neq 0, \forall t \in [a, b]$ , ta suy ra điều cần chứng minh.

10. Cho  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm khả vi 2 lần với  $f''(a) = f''(b)$ .

Chứng tỏ rằng tồn tại  $c \in (a, b)$  sao cho

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(c) - \frac{c - a}{2} f''(c).$$

Lời giải. Do  $f''(a) = f''(b)$ , áp dụng định lý Flett thì tồn tại  $d \in (a, b)$  sao cho  $(d - a)f''(d) = f'(d) - f'(a)$ .

Xét hàm  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  như sau  $g(x) = (x - a)f'(x) - 2f(x) + xf'(a)$ .

Tính toán đơn giản ta được  $g'(x) = (x - a)f''(x) - f'(x) + f'(a)$ .

Rõ ràng là  $g'(a) = g'(d) = 0$ , nên theo định lý Flett tồn tại  $c \in (a, d) \subset (a, b)$  sao cho  $(c - a)g'(c) = g(c) - g(a)$ , tức là

$$\begin{aligned} (c - a)^2 f''(c) - (c - a)[f'(c) - f'(a)] \\ = (c - a)f'(c) - 2f(c) + cf'(a) + 2f(a) - af'(a), \end{aligned}$$

hay là

$$\begin{aligned} f(c) - f(a) &= (c - a)f'(c) - \frac{(c - a)^2}{2} f''(c), \\ \frac{f(c) - f(a)}{c - a} &= f'(c) - \frac{c - a}{2} f''(c). \end{aligned}$$

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. *Hội Toán học Việt Nam.*  
**Tuyển tập các đề thi Olympic Toán học sinh viên.**  
Từ năm 1993 đến nay.
- [2]. *Vũ Tiến Việt.*  
**Tài liệu ôn tập Olympic Toán sinh viên.**  
Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2017.
- [3]. *Vũ Tiến Việt (chủ biên), Phan Thế Hải.*  
**Một số chuyên đề ôn tập thi Olympic Toán sinh viên.**  
Phần 2 Giải tích. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2021.
- [4]. *Sahoo P. K., Riedel T..*  
**Mean Value Theorems And Functional Equations.**  
World Scientific, 1998.
- [5]. *József Sándor.*  
**Selected Chapters of Geometry, Analysis and Number Theory.**  
Lambert Publishing, 2005.
- [6]. *Radulescu T. L., Radulescu V. D., Andreescu T..*  
**Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis.**  
Springer Verlag, 2009.
- [7]. *Peter R. Mercer.*  
**More Calculus of a Single Variable.**  
© Springer Science and Business Media, New York, 2014.