



TUYỂN TẬP BÁO CÁO HỘI NGHỊ TOÀN QUỐC

KHOA HỌC TRÁI ĐẤT VÀ TÀI NGUYÊN VỚI PHÁT TRIỂN BỀN VỮNG (ERSD 2024)

HÀ NỘI 14 - 11 - 2024

ERSD 2024



NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI

MỤC LỤC

Ban tổ chức hội nghị	i
Mục lục.....	iii
Lời nói đầu	v
Chương trình hội nghị	vii
Tiểu ban Dữ liệu lớn và chuyển đổi số trong khoa học trái đất, tài nguyên môi trường.....	1
Tiểu ban Trí tuệ nhân tạo, IOT, Blockchain và ứng dụng.....	38
Tiểu ban Cơ - Điện.....	71
Tiểu ban Dầu khí tích hợp.....	114
Tiểu ban Địa chất và tài nguyên du lịch.....	238
Tiểu ban Địa chất công trình - Địa kỹ thuật.....	312
Tiểu ban Địa chất thủy văn và Tài nguyên nước.....	430
Tiểu ban Tài nguyên địa chất và Quản lý bền vững.....	516
Tiểu ban Quản lý tài nguyên và Môi trường.....	597
Tiểu ban Công nghệ mới trong xử lý môi trường.....	730
Tiểu ban Phát triển bền vững khoa học công nghệ Mỏ và Môi trường.....	818
Tiểu ban Phát triển bền vững công nghiệp khai thác và Quản lý an toàn.....	899
Tiểu ban Những tiến bộ trong chế biến khoáng sản và tái chế.....	971
Tiểu ban Xây dựng công trình với phát triển bền vững.....	1039
Tiểu ban Kỹ thuật Trắc địa - Bản đồ và Hệ thống thông tin địa lý.....	1301
Tiểu ban Vật lý, Hóa học và ứng dụng.....	1384
Tiểu ban Toán, Cơ học và ứng dụng.....	1512
Tiểu ban Ngôn ngữ học.....	1634

TIỂU BAN TOÁN HỌC, CƠ HỌC VÀ ỨNG DỤNG

MỤC LỤC

Rèn luyện tư duy sáng tạo cho sinh viên thông qua lớp bài toán tìm vết của mặt phẳng <i>Hoàng Văn Tài, Đỗ Việt Anh</i>	1515
Áp dụng mô hình A-SIR đánh giá dịch covid-19 ở Việt Nam <i>Lê Thị Hương Giang</i>	1521
Ứng dụng các định lý trung bình để chứng minh công thức sai số của phương pháp parabol tính xấp xỉ tích phân xác định <i>Hoàng Ngự Huân</i>	1527
Một vài phương pháp tính định thức ma trận vuông cấp n và ứng dụng <i>Nguyễn Thuỳ Linh</i>	1532
Kiểm định trung bình hai tổng thể trong phần mềm R <i>Phạm Ngọc Anh</i>	1537
Một cách sáng tác bài toán Giải tích cho kỳ thi Olympic Toán sinh viên <i>Phạm Tuấn Cường</i>	1542
Tính toán dao động của ô tô có chứa đạo hàm cấp ba sử dụng phương pháp Newmark <i>Bùi Thị Thúy</i>	1547
Mô phỏng động lực học robot song song Hexel <i>Trần Thị Trâm</i>	1552
Ước lượng xác suất đuôi cho một lớp biến ngẫu nhiên khả vi Malliavin <i>Nguyễn Thu Hằng</i>	1557
Ước lượng xác suất không trả được nợ tín dụng cá nhân bằng mô hình hồi quy logistic <i>Nguyễn Thị Hằng</i>	1561
Error analysis for a fractional Adams method <i>Nguyen Thi Hong, Dao Xuan Hung</i>	1567
Nhóm tự đẳng cấu của mô hình kiểu hữu hạn <i>Nguyễn Thị Lan Hương</i>	1573
Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn <i>Nguyễn Thế Lâm</i>	1578
ChatGPT trong Trường Đại học: Cơ hội và thách thức <i>Lê Bích Phượng</i>	1582
Xấp xỉ phân phối chuẩn: Từ nền tảng lý thuyết đến ứng dụng thực tiễn <i>Lê Bích Phượng</i>	1587
Phương pháp tính và ứng dụng kinh tế của tích phân <i>Nguyễn Thị Kim Sơn</i>	1592
Thuật toán phân tích thành phần chính và ứng dụng trên phần mềm R <i>Hoàng Thuỳ Linh</i>	1598

Bài toán vận tải và ứng dụng trong Python <i>Nguyễn Hà Trang</i>	1604
Định lý Cayley-Hamilton và ứng dụng <i>Dur Thị Hòa Bình</i>	1610
Vai trò của Hình học - Về kỹ thuật đối với các ngành kỹ thuật trong thời đại khoa học công nghệ phát triển <i>Lê Thị Thanh Hằng</i>	1615
A remark on robustness of exponential dichotomy <i>Bui Xuan Quang</i>	1619
Massera-typed theorem for a class of delayed differential equations <i>Nguyen Thi Loan</i>	1624
Hàm sinh mô-men: Một công cụ đặc lực trong phân tích xác suất và thống kê <i>Lê Bích Phượng, Hà Hữu Cao Trình</i>	1629

Rèn luyện tư duy sáng tạo cho sinh viên thông qua lớp bài toán tìm vết của mặt phẳng

Hoàng Văn Tài*, Đỗ Việt Anh
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Mục đích nghiên cứu: Rèn luyện khả năng sáng tạo cho sinh viên.

Phạm vi nghiên cứu: Sinh viên năm nhất và năm hai các ngành Cơ điện, Xây dựng và Mỏ.

Phương pháp nghiên cứu: Nghiên cứu lý thuyết về tư duy sáng tạo và các biểu hiện Tư duy sáng tạo trong quá trình dạy giải bài tập tìm vết của mặt phẳng.

Các kết quả chính: Nêu bật các biểu hiện của Tư duy sáng tạo, qua đó đề xuất biện pháp rèn luyện Tư duy sáng tạo cho sinh viên.

Từ khóa: Tư duy sáng tạo; Hình học Họa hình; Vết.

1. Đặt vấn đề

Ngày nay, cách dạy học Toán nói riêng và các môn Khoa học cơ bản nói chung của một bộ phận giáo viên đã làm giảm đi hứng thú, say mê tìm tòi, khám phá, sáng tạo ở người học. Giảng viên chỉ lo truyền thụ kiến thức cho người học mà chưa chú ý đến việc rèn luyện tư duy sáng tạo cho họ. Nhiều người nghĩ rằng học Toán là để có các kiến thức Toán học ứng dụng trong đời sống hàng ngày và để học các môn học khác, nhất là các môn khoa học tự nhiên và kỹ thuật. Trong thời đại mới, giáo dục đào tạo đòi hỏi có những yêu cầu cao về việc rèn luyện trí thông minh, sáng tạo, tính năng động thích nghi với những thay đổi nhanh của xã hội.

Bài viết này trình bày một số biểu hiện của tư duy sáng tạo và cách rèn luyện tư duy sáng tạo của sinh viên qua dạy học giải bài tập Hình học họa hình tại trường Đại học Mở - Địa chất.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.2. Vết và thuộc tính cơ bản về Vết của mặt phẳng

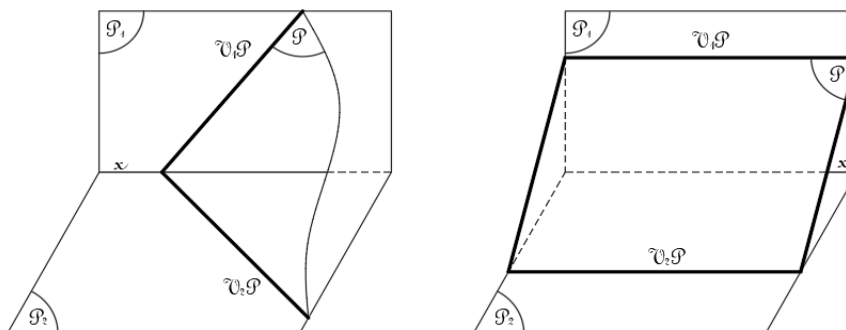
+ Khái niệm vết của mặt phẳng: Vết của mặt phẳng (P) là giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng hình chiếu (P_1), (P_2). (Nguyễn Đình Điện, Đỗ Mạnh Môn, 2006).

Ta kí hiệu:

- x là giao tuyến của hai mặt phẳng hình chiếu (P_1), (P_2).

$(P) \cap (P_1) = V_1P$ -vết đứng.

$(P) \cap (P_2) = V_2P$ - vết bằng (Hình 1)



Hình 1. Minh họa vết đứng và vết bằng của mặt phẳng.

* Tác giả liên hệ

Email: hoangvantai@humg.edu.vn

- Đường bằng b của mặt phẳng (**P**) là đường thẳng thuộc (**P**) và song song với (**P**).
- + Một số (thuộc tính) đặc điểm cơ bản về vết của mặt phẳng (Nguyễn Đình Điện và nnk, 2006).

(1) V_1P, V_2P, x hoặc song song, hoặc đồng quy.

$$(2) \quad M \in V_1P \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 \in V_1P \\ M_2 \in x \end{cases} \quad (3) \quad N \in V_2P \Leftrightarrow \begin{cases} N_1 \in x \\ N_2 \in V_2P \end{cases}$$

(4) Giả sử đường thẳng $d \subset (P) \Rightarrow V_1d \in V_1P, V_2d \in V_2P$.

(5) Đường bằng b có hình chiếu b_1 song song với x, hình chiếu b_2 song song V_2P .

2.2. Nghiên cứu thực nghiệm

- Mục đích thực nghiệm: Chúng tôi thực hiện các phân tích, tổng hợp, đánh giá để thấy được tiềm năng phát triển tư duy sáng tạo cho sinh viên trong dạy học giải bài tập Hình học họa hình, đặc biệt trong lớp các bài toán về vết của mặt phẳng.

- Phương pháp thực nghiệm: Thực nghiệm được chúng tôi sử dụng phương pháp đánh giá định tính. Qua quá trình dạy giải bài tập Hình họa, chúng tôi đưa ra một số thuật toán cơ bản liên quan tới vết của đường thẳng, vết của mặt phẳng, sau đó tích hợp với hai phiếu học tập và phát cho sinh viên. Sau đó, chúng tôi tiến hành thực nghiệm trên 60 sinh viên, Trường ĐH Mỏ - Địa chất (chia làm 4 nhóm, mỗi nhóm 15 sinh viên). Người học được giới thiệu về các thuật toán cơ bản trong Hình họa (Xác định giao điểm, giao tuyến, độ lớn thật của đoạn thẳng). Giảng viên phát lần lượt hai phiếu học tập để sinh viên thực hiện các nhiệm vụ trong mỗi phiếu, các em thực hành khảo sát trên bài toán cụ thể Giảng viên đặt ra và thảo luận để giải quyết vấn đề. Sau khi sinh viên hoàn thành hai phiếu học tập, chúng tôi phát phiếu điều tra, thu thập dữ liệu bằng cách quay phim quá trình sinh viên thực hành, thu lại phiếu học tập của các nhóm và phiếu điều tra của mỗi sinh viên.

- Công cụ nghiên cứu: Các công cụ nghiên cứu bao gồm các bài toán liên quan tới vết của mặt phẳng (Xác định vết; xác định giao điểm, giao tuyến,...) cùng với phiếu học tập với các nhiệm vụ tương ứng; phiếu điều tra, bảng khảo sát thu thập thông tin phản hồi về tầm quan trọng Vết mặt phẳng, về tư duy thuật toán trong quá trình giải bài tập Hình họa. Trong khuôn khổ của bài báo, chúng tôi chỉ trình bày 3 trong 5 biểu hiện của tư duy sáng tạo thông qua các bài toán liên quan tới vết của mặt phẳng.

2.3. Tư duy sáng tạo

Tư duy sáng tạo (TDST) là sự vận dụng các kinh nghiệm giải quyết vấn đề này cho các vấn đề khác, TDST tạo nên các kinh nghiệm mới dựa trên các kinh nghiệm cũ và do đó làm phong phú thêm kinh nghiệm và tạo nên sự thay đổi về chất cho các sự vật mà nó giải quyết. Các nghiên cứu đã chỉ ra: “TDST là một loại tư duy độc lập tạo ra ý tưởng mới, độc đáo và có hiệu quả cao trong giải quyết vấn đề” (Tôn Thân, 1995).

TDST được hiểu là sự kết hợp ở đỉnh cao, hoàn thiện nhất của tư duy tích cực và tư duy độc lập, tạo ra những cái mới có tính giải quyết vấn đề một cách hiệu quả và chất lượng. TDST là tư duy độc lập vì nó không bị gò bó, phụ thuộc vào những cái đã có. Tính độc lập của nó được bộc lộ vừa trong việc đạt được mục đích vừa trong việc tìm giải pháp. Mỗi sản phẩm của TDST đều mang đậm dấu ấn của mỗi cá nhân tạo ra nó.

2.4. Một số biểu hiện của Tư duy sáng tạo (TDST)

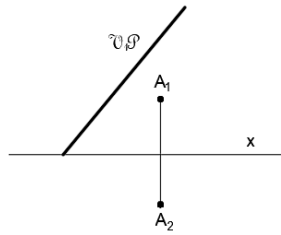
TDST bao gồm 5 thành tố cơ bản (Phan Thị Phương Thảo, 2007): Tính mềm dẻo; Tính nhuần nhuyễn; Tính độc đáo; Tính hoàn thiện và Tính nhạy cảm vấn đề. Trong các thành tố này thì tính mềm dẻo, tính nhuần nhuyễn, tính độc đáo là 3 tính chất cơ bản của TDST.

2.4.1. Tính mềm dẻo

Biểu hiện đầu tiên của TDST là tính mềm dẻo, được hiểu là khả năng thay đổi linh hoạt trật tự của hệ thống tri thức, chuyển từ góc độ quan niệm này sang góc độ quan niệm khác; định nghĩa lại sự vật, hiện tượng, xây dựng phương pháp tư duy mới, tạo ra sự vật mới trong những mối quan hệ mới hoặc chuyển đổi quan hệ và nhận ra bản chất của sự vật và điều phán đoán; làm thay đổi một cách linh hoạt các thái độ đã có cố hữu trong hoạt động trí tuệ của con người. Tính mềm dẻo của TDST có các đặc trưng như:

- Chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác, vận dụng linh hoạt các hoạt động phân tích, tổng hợp, so sánh, trừu tượng hóa, cụ thể hóa và các phương pháp suy luận như quy nạp, suy diễn, tương tự, linh hoạt chuyển từ giải pháp này sang giải pháp khác, điều chỉnh kịp thời hướng suy nghĩ nếu gặp trở ngại.

Ví dụ 1: Xác định V_2P biết V_1P và các hình chiếu A_1, A_2 của điểm $A \in (P)$ (Hình 2)



Hình 2. Điểm A thuộc mặt phẳng (P) – Cho trước vết đứng.

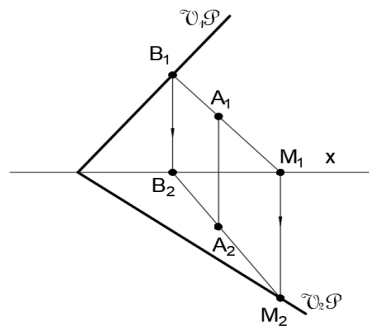
Quy trình 1: Xác định vết bằng của mặt phẳng nhờ lấy thêm một điểm thuộc vết đứng với các bước cụ thể như sau (Hình 3):

Bước 1: Lấy điểm $B \in V_1P \Rightarrow$ có $B_1 \in V_1P$, B_2 là hình chiếu của B trên x (tính chất (2)).

Bước 2: Xác định hình chiếu của đường thẳng AB trên (P_1) và (P_2) (A_1B_1 chính là đường thẳng nối A_1 với B_1 , A_2B_2 chính là đường thẳng nối A_2 với B_2).

Bước 3: Xác định hình chiếu M của giao điểm AB với (P_2) : M_1 là giao điểm của A_1B_1 với x, M_2 là giao điểm của A_2B_2 với đường thẳng qua M_1 và vuông góc với x (tính chất (3)).

Bước 4: Xác định V_2P : là đường thẳng nối M_2 và giao điểm của x với V_1P . (tính chất (1)).



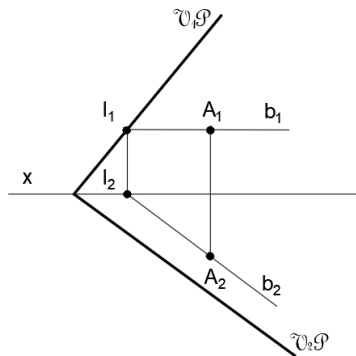
Hình 3. Xác định vết bằng của mặt phẳng thông qua vết bằng của đường thẳng thuộc mp.

Cũng có thể xác định V_2P bằng quy trình 2 nhờ một đường bằng của (P) , với các bước cụ thể như sau (Hình 4):

Bước 1: Xác định một đường bằng b của mặt phẳng (P) , đi qua A, (b_1 qua A_1 và song song x (tính chất (5))).

Bước 2: Xác định đường b_2 : nối A_2 với hình chiếu I_2 của giao điểm I giữa b và V_1P .

Bước 3: Xác định V_2P : là đường thẳng qua giao điểm của V_1P và x, song song b_2 (tính chất (5)).



Hình 4. Xác định vết bằng của mp thông qua phương.

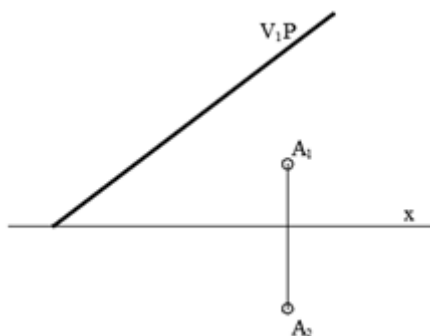
So sánh hai quy trình nêu trên, có thể thấy: quy trình 2 đơn giản hơn quy trình 1.

2.4.1. Tính nhuần nhuyễn

Thực tế đã chứng minh khả năng của con người là vô hạn, tùy thuộc vào hoàn cảnh, môi trường giáo dục, môi trường hoạt động,... Khả năng tạo ra một số lượng nhất định các ý tưởng đặc trưng cho tính nhuần nhuyễn của TDST. Số ý tưởng nghĩ ra được càng nhiều thì có nhiều khả năng xuất hiện ý tưởng độc đáo. Trong trường hợp này có thể nói số lượng làm nảy sinh chất lượng. Tính nhuần nhuyễn có các đặc trưng sau:

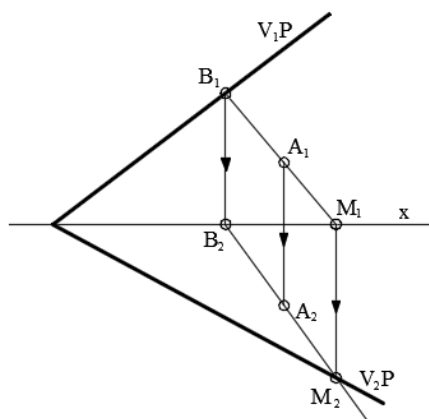
- Tính đa dạng của các cách xử lý khi giải toán, khả năng tìm được nhiều giải pháp trên nhiều góc độ và tình huống khác nhau. Trước một vấn đề cần giải quyết, người có tư duy nhuần nhuyễn sẽ nhanh chóng tìm, đề xuất nhiều phương án khác nhau và từ đó có thể tìm được phương án tối ưu.

Ví dụ 2. Bài toán xác định vết bằng V_2P của mặt phẳng khi đã biết một vết đứng V_1P và có điểm A (A_1, A_2) thuộc (P) . (Hình 5)



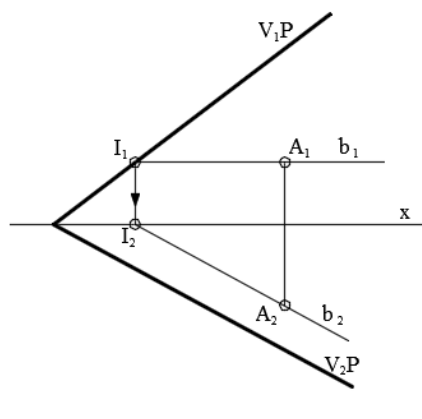
Hình 5. Điểm A thuộc mặt phẳng (P) – Cho trước vết đứng.

Phân tích: Trong bài toán này, giao điểm của V_1P và x là điểm thuộc V_2P (Điểm đồng quy), do vậy lời giải bài toán được thực hiện theo hai cách:



Hình 6a

Xác định V_2P nhờ quan hệ liên thuộc.



Hình 6b

Xác định V_2P nhờ tính chất đặc trưng.

Cách 1. (Hình 6a)

Bước 1. Xác định điểm B thuộc mặt phẳng (P) có $B_1 \in V_1P, B_2 \in x$;

Bước 2. Xác định đường thẳng AB ;

Bước 3. Xác định V_2AB ;

Bước 4. Xác định V_2P .

Cách 2. (Hình 6b)

Bước 1. Qua điểm A , xác định đường bằng b của mặt phẳng (P) ;

Bước 2. Xác định hình chiếu bằng b_2 của đường b ;

Bước 3. Xác định $V_2P \parallel b_2$.

Nhận xét:

- Trong cách giải thứ hai, do sử dụng tính chất vết bằng của mặt phẳng song song với đường bằng, nên cách giải thứ hai ngắn gọn hơn cách giải thứ nhất.

- Trong ví dụ trên, nếu ta thay đổi vị trí mặt phẳng (P) (chẳng hạn cho $(P) \parallel x$) ta sẽ được bài toán tương tự và có thể đặt ra yêu cầu sinh viên thảo luận, đề xuất quy trình thuật toán để giải bài toán này.

2.4.3. Tính độc đáo

Tính độc đáo là khả năng tìm kiếm và quyết định phương thức giải quyết mới lạ hoặc duy nhất. Tính độc đáo của tư duy được đặc trưng bởi:

- Khả năng tìm ra những liên tưởng và kết quả mới.
- Khả năng nhìn ra những mối liên hệ trong những sự kiện bên ngoài tưởng như không có liên quan với nhau.
- Khả năng tìm ra những giải pháp mới lạ tuy đã biết những giải pháp khác.

Ví dụ 3. (Nguyễn Quang Cự, Nguyễn Mạnh Dũng, 2004). Tìm giao điểm của đường cạnh AB với mặt phẳng $(P) = (V_1P, V_2P)$.

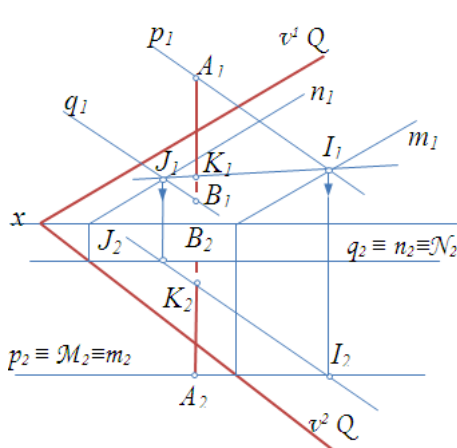
Phương pháp chung:

- Gắn đường AB vào mặt phẳng phụ trợ (R) , xác định giao tuyến phụ g của (R) và (P) .
- Xác định giao điểm K của g và AB, ta được giao điểm K cần tìm.

Cùng tìm hiểu và khai thác lời giải bài toán theo những cách giải khác nhau:

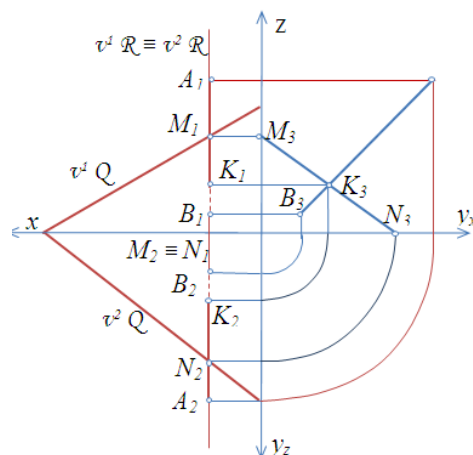
Cách 1: (H7a) Trong cách giải này, mặt phẳng phụ trợ (R) xác định bằng hai đường thẳng song song p và q , với p qua A, q qua B; ở đây ta lấy p và q là hai đường thẳng mặt.

Cách 2: (H7b) Dựng mặt phẳng phụ trợ (R) là mặt phẳng cạnh: $v^1R \equiv v^2R \equiv A_1B_1 \equiv A_2B_2$.



Hình 7a

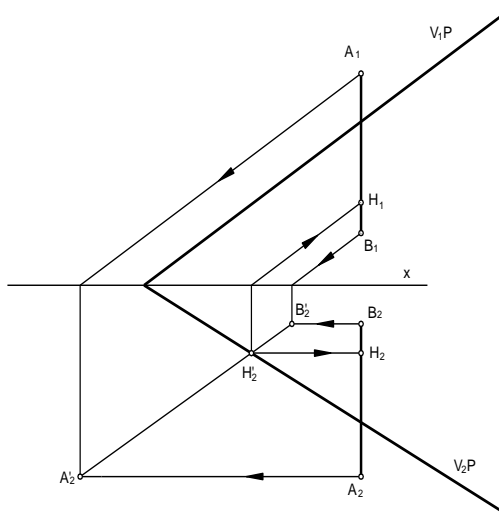
PP xác định giao điểm của đt và mp.



Hình 7b

Vận dụng hình chiếu cạnh để tìm giao điểm đt và mp.

Cách 3: Dùng phép chiếu phụ chiếu mặt phẳng P và đường cạnh AB lên mặt phẳng P theo hướng V_1P xuống mặt phẳng P_2 (Hình 8).



Hình 8. Minh họa sử dụng phép chiếu phụ tìm giao điểm.

Nhận xét: Cùng một bài toán đặt ra với 3 cách giải khác nhau, có thể nhận thấy việc sử dụng phép chiếu phụ cho ta lời giải ngắn gọn, độc đáo trong lời giải thứ 3.

3. Đề xuất biện pháp rèn luyện tư duy sáng tạo cho sinh viên thông qua dạy giải bài tập Hình học họa hình

Ấn tàng trong mỗi lời giải hầu hết các bài toán Hình họa là cơ hội để rèn luyện, phát triển tư duy cho người học, đặc biệt là tư duy thuật toán và tư duy sáng tạo. Tuy vậy qua quá trình giảng dạy, chúng tôi nhận thấy người học chưa thực sự biết cách vận dụng tư duy thuật toán một cách linh hoạt để giải quyết các vấn đề đặt ra và điều đó cản trở rất nhiều tính sáng tạo của người.

Qua nghiên cứu lí thuyết và thực tế giảng dạy, nhóm tác giả đề xuất giải pháp nhằm giúp người học nhận thức đúng đắn về vai trò, tầm quan trọng của TDST, qua đó góp phần nâng cao chất lượng giảng dạy môn học.

Giải pháp được chia thành các bước:

Bước 1: Trao đổi, phân tích các biểu hiện của TDST qua lời giải của mỗi bài toán, dạng toán.

Bước 2: Đề xuất các bài toán, dạng toán tương tự, hoặc tổng quát hóa bài toán để người học tìm tòi.

Bước 3: Người học báo cáo lại sản phẩm, phân tích ngược để tìm ra ưu điểm cũng như hạn chế trong sản phẩm.

4. Kết luận

Các tính chất cơ bản của TDST không tách rời nhau mà trái lại, chúng có mối quan hệ mật thiết, hỗ trợ và bổ sung cho nhau. Khả năng linh hoạt chuyển từ hoạt động trí tuệ này sang hoạt động trí tuệ khác (tính mềm dẻo) tạo điều kiện cho việc tìm được nhiều giải pháp trên nhiều góc độ, tình huống khác nhau (tính nhuần nhuyễn) và nhờ đề xuất được nhiều phương án khác nhau mà có thể tìm được phương án mới lạ và đặc sắc (tính độc đáo).

Qua việc phân tích, chỉ rõ các biểu hiện của TDST thông qua các bài toán cụ thể, người học được trải nghiệm, tìm tòi nhiều lời giải cho cùng một bài toán, biết vận dụng linh hoạt các kiến thức đã học để giải quyết vấn đề đặt ra. Sinh viên thấy được kiến thức không được truyền một chiều từ giáo viên sang người học và nhận thức đúng đắn vai trò của mình trong quá trình lĩnh hội tri thức.

Trên thực tế, không chỉ lớp bài toán về Vết mới chứa đựng trong đó cơ hội để rèn luyện và phát triển TDST, mà các bài toán Hình học họa hình đều có các thuộc tính đó (Bài toán về vị trí, bài toán về lượng, bài toán giao hai mặt,...). Do vậy, trong quá trình giảng dạy, với vai trò là người hướng dẫn, điều khiển quá trình nhận thức của người học, người Giảng viên cần biết và quan tâm tới các biểu hiện của tư duy sáng tạo của người học thì sẽ bồi dưỡng TDST của các em, từ đó hiệu quả của việc giảng dạy sẽ được nâng cao hơn rất nhiều.

Tài liệu tham khảo

Nguyễn Quang Cự, Nguyễn Mạnh Dũng, 2004. *Hướng dẫn giải bài toán hình học họa hình*. NXB Xây dựng.

Nguyễn Đình Điện, Đỗ Mạnh Môn, 2006. *Hình học Họa hình – Tập 1*. NXB Giáo Dục.

Tôn Thân, 1995. *Xây dựng hệ thống câu hỏi và bài tập nhằm bồi dưỡng một số yếu tố của TDST cho HS khá và giỏi toán ở trường THCS Việt Nam. Luận án Phó Tiến sĩ khoa học Sư phạm – Tâm lí, Viện Khoa học Giáo dục*

Phan Thị Phương Thảo, 2007. *Phát triển tư duy sáng tạo cho HS THPT qua dạy học hình học không gian lớp 11*. Luận văn Thạc sĩ Khoa học giáo dục.

ABSTRACT

Fostering Creative Thinking in Students through Plane Trace Problems

Hoang Van Tai, Do Viet Anh
Hanoi University of Mining and Geology

Research purpose: Cultivate students' creative abilities.

Scope of research: First and second year students in the fields of Electrical Engineering, Construction and Mining.

Research method: Research on the theory of creative thinking and the manifestations of creative thinking in the process of teaching and solving exercises on finding traces of planes.

Main results: Highlight the manifestations of Creative Thinking, thereby proposing measures to train Creative Thinking for students.

Keywords: Creative thinking; Descriptive geometry; Trace.

Áp dụng mô hình A-SIR đánh giá dịch covid-19 ở Việt Nam

Lê Thị Hương Giang
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Mô hình SIR là mô hình toán học cơ bản để nghiên cứu tốc độ lan truyền của một dịch bệnh. Tuy nhiên mô hình SIR coi tốc độ nhiễm bệnh và bình phục là các hằng số nên trong thời gian dài, mô hình SIR sẽ không dự đoán được chính xác đường cong dịch bệnh. Trong bài báo này, tôi nghiên cứu một mô hình mới, mô hình A-SIR, ở đó tốc độ nhiễm bệnh và phục hồi thay đổi theo thời gian. Dữ liệu trong bài báo là dữ liệu covid-19 tại các tỉnh Việt Nam được dùng để xác định các chỉ số lây nhiễm bằng phương pháp nghịch đảo, từ đó xây dựng mô hình A-SIR mô phỏng sự lan truyền của dịch bệnh. Bài báo cũng so sánh mô hình SIR cổ điển và mô hình A-SIR, cho thấy mô hình A-SIR mô phỏng đường cong dịch bệnh chính xác hơn.

Từ khóa: phương pháp nghịch đảo; mô hình A-SIR; tốc độ nhiễm bệnh và phục hồi; COVID-19.

1. Đặt vấn đề

Ngày nay, khi khoa học và công nghệ ngày càng phát triển thì con người cũng tác động làm thay đổi môi trường và tự nhiên, dẫn đến xuất hiện các chủng bệnh lạ và mới. Các mô hình toán học phát triển để dự đoán sự lây lan của dịch bệnh. Một trong những mô hình kinh điển, đó là mô hình SIR (Susceptible-Infected-Recovered), bắt nguồn từ nghiên cứu của Kermack và McKendrick (Kermack, W., & McKendrick, A., 1927) vào năm 1921. Mô hình này là cơ sở của tất cả các mô hình hiện tại về sự phát triển của các bệnh truyền nhiễm. Đã có rất nhiều các dẫn xuất của mô hình SIR này, như mô hình SEIR (Kabir, K. A., & Tanimoto, J., 2020), SIUR (Liu và nnk, 2020), A-SIR (Dos Santos, I., Almeida, G., & de Moura, F., 2021). Mô hình A-SIR được xây dựng dựa trên các thông số dịch bệnh thay đổi theo thời gian, và các thông số này được lấy từ dữ liệu có sẵn bằng phương pháp nghịch đảo. Định nghĩa của bài toán nghịch đảo liên quan đến các phương trình vi phân theo (Bellomo, N., & Preziosi, L., 1995) là: “Một bài toán giá trị biên ban đầu là nghịch đảo nếu một số thông tin về điều kiện ban đầu và biên cần thiết cho giải pháp và các thông số đặc trưng cho mô hình bị thiếu và được thay thế bằng thông tin phù hợp về giải pháp của vấn đề toán học”. Bài toán nghịch đảo được gọi là bài toán xác định tham số: điều chỉnh các tham số để tái tạo dữ liệu đo lường. Trong bài báo này, chúng tôi áp dụng mô hình A-SIR để điều tra dịch COVID-19 cho các tỉnh ở Việt Nam. Điều này cung cấp cho chúng ta cái nhìn sâu sắc về mức độ hiệu quả của phương pháp này.

2. Phương pháp nghiên cứu

2.1. Mô hình A-SIR

Mô hình SIR là một mô hình toán học cơ bản về dịch bệnh, được giới thiệu trong bài báo kinh điển của Kermack và McKendrick (Kermack, W., & McKendrick, A., 1927). Trong mô hình này, dân số được chia thành 3 nhóm, dựa theo trạng thái đối với bệnh: 1) những người có khả năng mắc bệnh (Susceptible), 2) những người đang nhiễm bệnh và có thể lây cho người khác (Infected) và 3) những người không còn khả năng mắc bệnh, bao gồm hồi phục và đã chết (Removed hay Recovered). Số người thuộc mỗi nhóm tại một thời điểm t được ký hiệu lần lượt là $S(t)$, $I(t)$ và $R(t)$. Trong mô hình SIR đơn giản, tổng dân số được coi là không đổi, có nghĩa $S(t) + I(t) + R(t) = N$ không phụ thuộc vào t . Trong mô hình SIR cổ điển, tốc độ lây nhiễm β và tốc độ hồi phục γ được giả định không đổi. Tuy nhiên, thực tế các tốc độ này cũng thay đổi theo thời gian do chính phủ thực hiện các chính sách công như cách ly xã hội hay tiêm vắc xin phòng bệnh. Ngoài ra, mô hình SIR cổ điển còn không xét đến các trường hợp nhiễm bệnh không có triệu chứng hay những trường hợp bị tái nhiễm. Chính vì vậy, nếu sử dụng mô hình SIR cổ điển trong thời gian dài sẽ không mô phỏng chính xác đường cong dịch bệnh. Bài báo này sử dụng mô hình A-SIR (Dos Santos, I., Almeida, G., & de Moura, F., 2021) là một biến thể của mô hình SIR, trong đó tốc độ lây nhiễm β và tốc độ hồi phục γ được xét cũng thay đổi theo thời gian, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$. Mô hình A-SIR gồm 3 phương trình:

* Tác giả liên hệ

Email: lethihuonggiang@humg.edu.vn

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta(t)S(t)I(t) \quad (1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta(t)S(t)I(t) - \gamma(t)I(t) \quad (2)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma(t)I(t) \quad (3)$$

Nếu có người nhiễm bệnh thì $\frac{dI(t)}{dt} > 0$ hoặc $\beta(t)S(t)I(t) - \gamma(t)I(t) > 0$, điều này tương đương với $R_e(t) = \frac{\beta(t)S(t)}{\gamma(t)} > 1$. Biến $R_e(t)$ được gọi là hệ số tái tạo hiệu quả. Dịch bệnh xảy ra nếu $R_e(t) > 1$, nghĩa là, một người bệnh có thể lây nhiễm cho người khác. Khi số lượng người được tiêm chủng tăng lên, thì hệ số $R_e(t) < 1$, Khả năng miễn dịch của dân số sẽ được tạo ra và số ca mắc bệnh sẽ giảm xuống 0. Một đặc điểm quan trọng khác là hệ số tái tạo cơ bản [9] $R_0(t) = \frac{\beta(t)N}{\gamma(t)}$. Trong mô hình SIR cổ điển, số tái tạo cơ bản $R_0(t)$ là hằng số. Tuy nhiên, trong thực tế, hệ số này luôn thay đổi theo thời gian, và chúng ta sẽ coi hệ số này như một hàm số. Bài toán giá trị ban đầu gồm các quan hệ (1)-(3) với các hệ số đã biết $\beta(t)$ và $\gamma(t)$, với các điều kiện rút ra từ dữ liệu đã cho. Việc giải bài toán nghịch đảo sẽ giúp chúng ta xác định chính xác các hệ số từ dữ liệu có sẵn.

2.2. Bài toán nghịch đảo

Giả sử cho $S(t)$ và $I(t)$ tại hai thời điểm, thời điểm bắt đầu $t = T_I$ và thời điểm kết thúc $t = T_F$.

$$S(T_I) = S_I, I(T_I) = I_I \quad (4)$$

$$S(T_F) = S_F, I(T_F) = I_F \quad (5)$$

Mô hình SIR cổ điển giả định rằng tốc độ lây nhiễm và tốc độ phục hồi là không đổi. Các phương trình (1), (2) và điều kiện ban đầu (4) cho phép xác định $I(t)$ và $S(t)$ nếu các hệ số là hằng số đã biết. Tuy nhiên, trong trường hợp này, điều kiện cuối cùng (5) có thể không được thỏa mãn chính xác vì bài toán có thể thay đổi theo thời gian do các điều kiện khách quan. Phương pháp giải bài toán nghịch đảo cho mô hình SIR cổ điển đã được trình bày trong (Kabir, K. A., & Tanimo, J., 2020), trong đó các điều kiện được xác định theo Tikhonov. Bài toán nghịch đảo tiếp cận mô hình thích ứng A-SIR, coi tốc độ lây nhiễm là một tham số phụ thuộc vào thời gian và tốc độ phục hồi là một hàm không đổi với bước nhảy phụ thuộc vào thời gian: $\beta(t) = \beta_k$ và $\gamma(t) = \gamma_k$ với $t_{k-1} < t < t_k$. Một tập dữ liệu các giá trị tại các thời điểm nhất định $t_1, t_2, \dots, D = \{(S(t_k), I(t_k)), k = 1, 2, \dots\}$. Khi đó, các hệ số β_k và γ_k được tính toán bằng hệ các phương trình (1), (2), (4), (5), từ đó suy ra $S_I = S(t_{k-1}), S_F = S(t_k), I_I = I(t_{k-1}), I_F = I(t_k), k = 2, 3, \dots$. Nếu β_k, γ_k là các hằng số chưa biết, thì nghiệm tổng quát của hệ phương trình (1), (2) phụ thuộc vào 4 hằng số: hai hằng số từ phương trình vi phân và hai hằng số là hệ số chưa biết. Tuy nhiên, hệ phương trình (4), (5) bao gồm bốn phương trình với bốn ẩn số là giải được.

3. Kết quả

Tất cả các biểu đồ bên dưới là kết quả của mô hình A-SIR dựa trên số liệu COVID-19 tại Việt Nam trong 2 khoảng thời gian, từ 1/1/2022 đến 31/5/2022 (đợt dịch thứ 4 cao điểm) và từ 21/10/2023 đến 18/12/2023 (giai đoạn Covid đã trong tầm kiểm soát) (Covid-19 data in Vietnam) bằng cách giải các hệ phương trình vi phân bằng phần mềm Microsoft Excel. Tốc độ truyền nhiễm và bình phục được xác định bằng phương pháp nghịch đảo trình bày ở mục 2.2, được thể hiện ở bảng 1-3. Các chỉ số này được tính toán tại các bước nhảy $P=7, 10$ và 14 ngày trong tổng thời gian 220 ngày. Trong mục này, tôi xây dựng mô hình A-SIR cho 3 tỉnh đại diện là Hà Nội, Hồ Chí Minh, và Nghệ An. Ở các Hình 1-3, đường cong liền màu đen biểu diễn số người nhiễm bệnh thực tế, đường cong đứt màu đỏ, xanh lá cây, xanh da trời lần lượt biểu diễn số người nhiễm bệnh theo mô hình A-SIR với bước nhảy $P=7$ ngày, $P=10$ ngày và $P=14$ ngày. Ở các Hình 4-6, đường cong liền màu đen biểu diễn số người nhiễm bệnh thực tế, đường cong liền màu đỏ biểu diễn số người nhiễm bệnh dự đoán theo mô hình A-SIR, còn đường cong liền màu xám biểu diễn số người nhiễm bệnh dự đoán theo mô hình SIR.

Bảng 1. Tốc độ nhiễm bệnh βN , tốc độ bình phục γ , và hệ số tái tạo R_e cho Hà Nội.

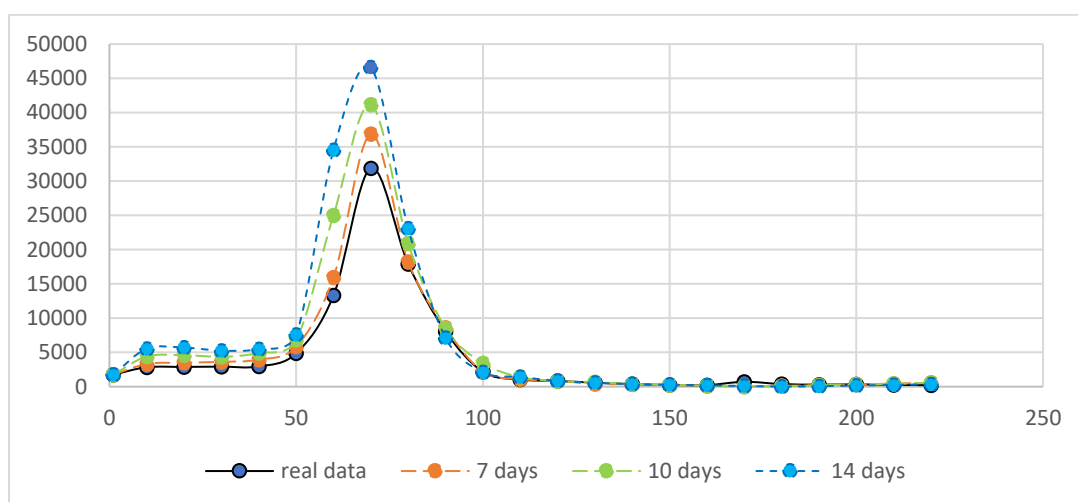
Số ngày	βN	γ	R_e
7	0.0188256	0.0185147	1.0012964
10	0.0191726	0.0188515	1.0015377
14	0.0184895	0.0187628	0.9704194

Bảng 2. Tốc độ nhiễm bệnh βN , tốc độ bình phục γ , và hệ số tái tạo R_e cho TP. Hồ Chí Minh.

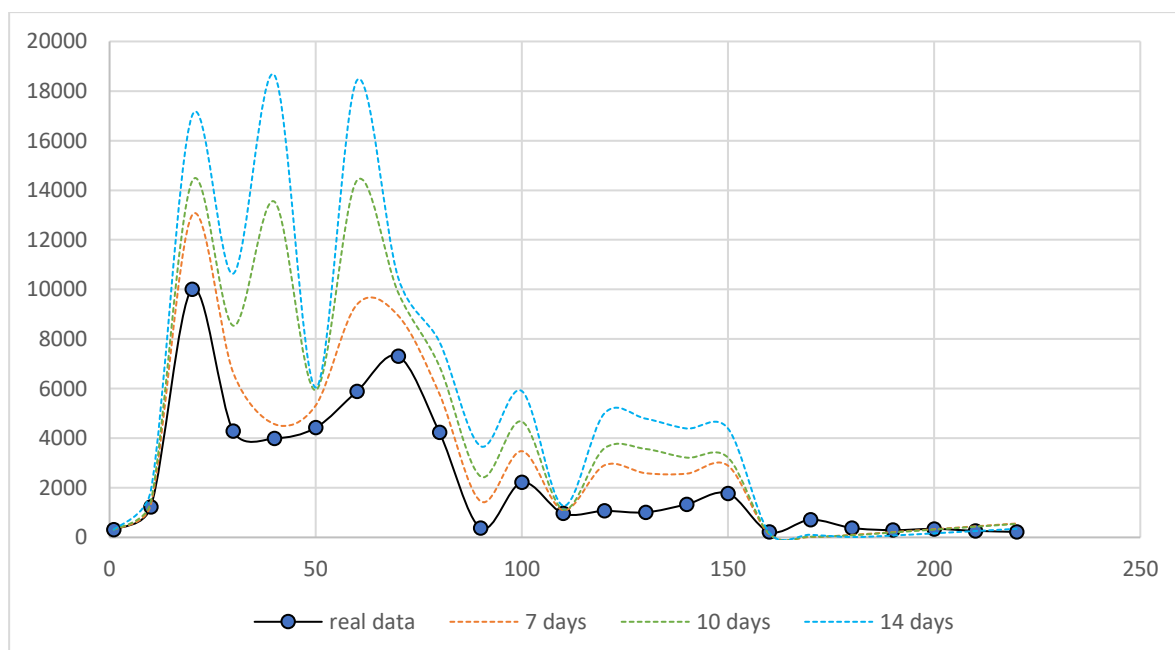
Số ngày	βN	γ	R_e
7	0.0741	0.0458993	1.5301279
10	0.0721	0.0529085	1.2914299
14	0.0717	0.0495303	1.3717887

Bảng 3. Tốc độ nhiễm bệnh βN , tốc độ bình phục γ , và hệ số tái tạo R_e cho Nghệ An.

Số ngày	βN	γ	R_e
7	0.0407199	0.0391513	0.9903510
10	0.0420083	0.0387259	1.0329091
14	0.0406791	0.0382816	1.0118355

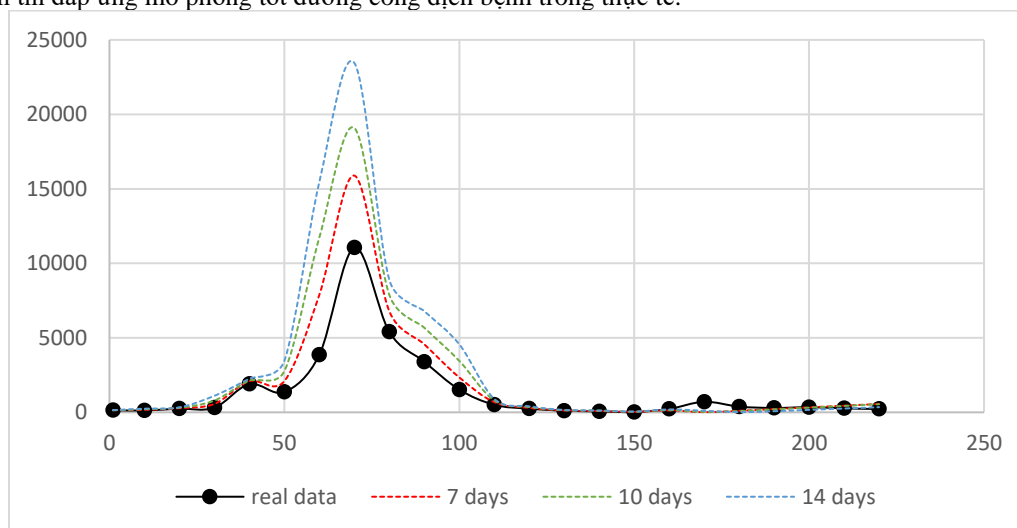


Hình 1. Mô hình A-SIR cho Hà Nội với khoảng cách $P = 7, 10, 14$ ngày.

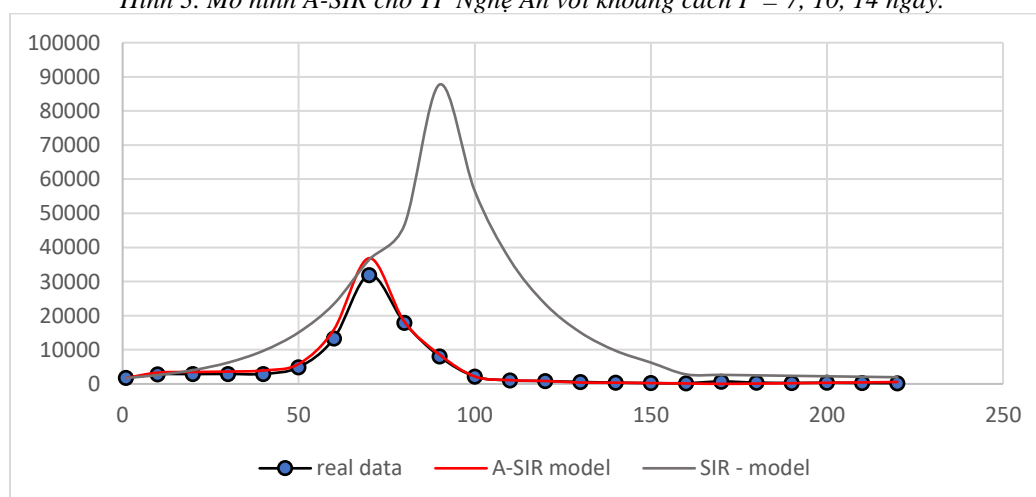


Hình 2. Mô hình A-SIR cho TP Hồ Chí Minh với khoảng cách $P = 7, 10, 14$ ngày.

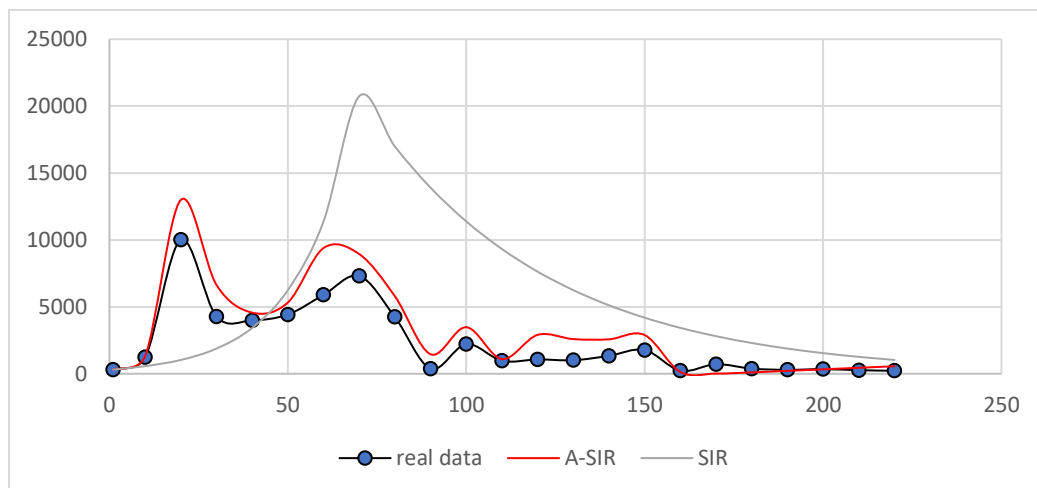
Ở các Hình 1÷3, mô hình A-SIR về cơ bản phản ánh tốt đường cong dịch bệnh, tuy nhiên có thể thấy mô hình A-SIR được xây dựng với bước nhảy thời gian càng ngắn thì độ chính xác càng cao, cụ thể đường cong ứng với $P = 7$ ngày tốt hơn 2 đường cong ứng với $P = 10$ ngày và 14 ngày. Ở các Hình 4÷6, so sánh độ tin cậy giữa mô hình A-SIR và mô hình SIR cổ điển, có thể thấy sự khác biệt rõ rệt, mô hình A-SIR biểu diễn rất tốt so với mô hình SIR cổ điển, điều đó là hiển nhiên, vì các chỉ số của mô hình A-SIR được hiệu chỉnh theo thời gian. Tất nhiên, mô hình A-SIR cũng không tránh khỏi các lỗi hay nhiều sai số, nhưng về cơ bản thì đáp ứng mô phỏng tốt đường cong dịch bệnh trong thực tế.



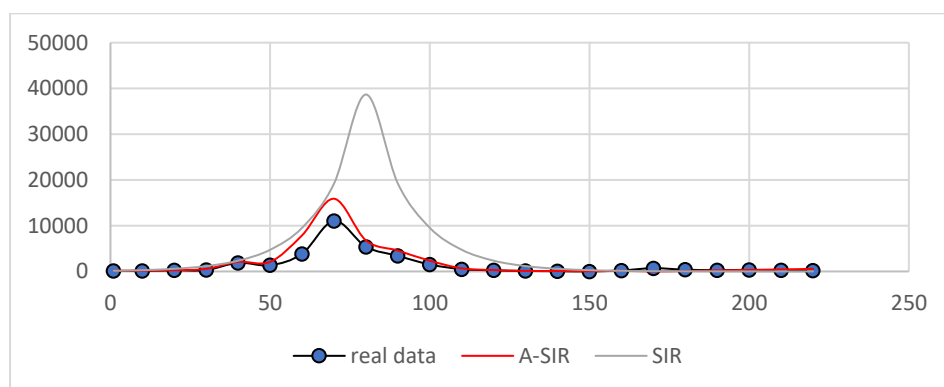
Hình 3. Mô hình A-SIR cho TP Nghệ An với khoảng cách $P = 7, 10, 14$ ngày.



Hình 4. So sánh dữ liệu thật và mô hình SIR, A-SIR cho Hà Nội.



Hình 5. So sánh dữ liệu thật và mô hình SIR, A-SIR cho TP Hồ Chí Minh.



Hình 6. So sánh dữ liệu thật và mô hình SIR, A-SIR cho TP Nghệ An.

4. Kết luận

Bài báo này nghiên cứu một mô hình toán học mới để đánh giá quá trình phát triển một dịch bệnh bằng cách sử dụng phương pháp nghịch đảo để ước tính tỷ lệ lây truyền và loại bỏ phụ thuộc vào thời gian trong mô hình dịch A-SIR. Giải quyết vấn đề nghịch đảo, giúp chúng ta giảm thiểu số lượng dữ liệu, thay vì phải sử dụng toàn bộ dữ liệu của dân số. Các kết quả và mô hình nghiên cứu cho thấy, mô hình A-SIR biểu diễn tốt hơn nhiều so với mô hình SIR cổ điển. Mặc dù kết quả tạo ra rất thuyết phục, nhưng mô hình A-SIR vẫn chưa phải là mô hình hoàn hảo, vì nó vẫn còn chứa lỗi do bị nhiễu thông tin nếu nghiên cứu trong một khoảng thời gian dài. Còn nếu giả định, dữ liệu được thu thập và báo cáo trong thời gian không quá dài thì tôi tin rằng những sai số nhỏ trong dữ liệu cũng sẽ không ảnh hưởng đáng kể đến kết quả.

Tài liệu tham khảo

- Covid-19 data in Vietnam provided by the Health ministry, <https://covid19.ncsc.gov.vn/graph>.
- Bellomo, N., & Preziosi, L. (1995). Modelling mathematical methods and scientific computation. *CRC Press Inc*.
- Dos Santos, I., Almeida, G., & de Moura, F. (2021). Adaptive SIR model for propagation of SARS-CoV-2 in Brazil. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 569, Article 125773. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2021.125773>.
- Kabir, K. A., & Tanim, J. (2020). Evolutionary game theory modelling to represent the behavioral dynamics of economic shutdowns and shield immunity in the COVID-19 pandemic. *Royal Society Open Science*, 7, Article 201095. <https://doi.org/10.1098/rsos.201095>.
- Kermack, W., & McKendrick, A. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, 115, 700e721. <https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0118>.
- Liu, Z., Magal, P., Seydi, O., & Webb, G. (2020). Predicting the cumulative number of cases for the COVID-19 epidemic in China from early data. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 17, 3040e3051. <https://doi.org/10.3934/mbe.2020172>.

ABSTRACT

Application adaptive sir model to evaluate Covid-19 infection in Vietnam

Le Thi Huong Giang

Hanoi University of Mining and Geology

If the classical Susceptible – Infected – Removed (SIR) model considers the infection and removal rates as constants, in this paper, we study a new model, the Adaptive Susceptible – Infected – Removed (A-SIR) model, where the infection and removal rates change over time. Covid-19 data from January 2022 in Vietnamese provinces was used to determine infection indicators by inverse problem method, thereby building an A-SIR model to simulate the spread of the disease. The paper also compares the classical SIR model and the A-SIR model in case of Vietnam, showing that the A-SIR model simulates the epidemic curve more accurately.

Keywords: Inverse problem; Adaptive SIR model; time-dependent infection and removal rates; COVID-19.

Ứng dụng các định lý trung bình để chứng minh công thức sai số của phương pháp parabol tính xấp xỉ tích phân xác định

Hoàng Ngự Huân*
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Như đã biết phép tính tích phân đóng một vai trò quan trọng trong các tính toán của kỹ thuật. Tuy nhiên việc tính chính xác giá trị của nó theo công thức Newton-Lepnits gặp khó khăn do không thể tìm được nguyên hàm trong phần lớn các trường hợp. Chính vì vậy các phương pháp xấp xỉ (hình thang, Simpson) được giảng dạy trong bộ môn Phương pháp tính. Tuy nhiên, trong phần lớn các tài liệu giảng dạy hiện nay chỉ trình bày về phương pháp tính xấp xỉ, công thức sai số, ví dụ minh họa chứ không hề đề cập tới cách chứng minh công thức sai số. Lỗi hổng đó tạo nên một sự khập khiễng cho sinh viên và giảng viên - những người luôn có những câu hỏi chuyên sâu.

Một câu hỏi đơn giản xuất hiện ngay khi nhìn thấy công thức sai số của phương pháp Simpson là: có sự xuất hiện giá trị đạo hàm cấp 4 của hàm dưới dấu tích phân. Mặc dù trong công thức xấp xỉ không có. Điều đó có nghĩa là, khi tiến hành đánh giá sai số, chúng ta phải sử dụng tới các định lý về giá trị trung bình (các định lý này vốn tạo ra mối liên hệ giữa hàm số và đạo hàm của nó).

Trong nội dung bài báo này, tác giả muốn trình bày bằng 2 cách tiếp cận khác nhau. Cách thứ nhất: một lần áp dụng định lý trung bình Lagrange, kết hợp với đánh giá hàm dưới dấu tích phân. Cách thứ hai: bốn lần sử dụng định lý trung bình Rolle. Trong cả hai cách đều cần phải khéo léo xây dựng hàm số riêng, phù hợp với điều kiện của từng định lý.

Từ khóa: phương pháp parabol; công thức sai số; định lý về giá trị trung bình Lagrange; Rolle.

1. Phương pháp Simpson

Đầu tiên, ta sẽ trình bày phương pháp Simpson (parabol) để tính tích phân xác định $\int_a^b f(x)dx$. Chia đoạn $[a, b]$ thành $2n$ đoạn nhỏ bằng nhau bằng các điểm chia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} = b.$$

Bước nhảy tương ứng là $h = \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{2n}$.

Đi từ trái sang phải, bắt đầu từ điểm $a = x_0$, cứ ba điểm liên nhau ta lập một parabol nội suy đi qua ba điểm của đồ thị hàm số đã cho $y = f(x)$.

Trước tiên, ta lập đa thức nội suy đi qua ba điểm đầu (Bảng 1) như sau:

Bảng 1. Bảng tỷ hiệu cho đa thức Newton.

STT	x_i	y_i	Tỷ hiệu cấp 1	Tỷ hiệu cấp 2
0	x_0	y_0		
1	$x_1 = x_0 + h$	y_1	$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$	
2	$x_2 = x_0 + 2h$	y_2	$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{h}$	$\frac{\frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_0}{h}}{x_2 - x_0} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}$

Đa thức Newton nội suy qua ba điểm nói trên có phương trình như sau:

$$p_0(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}(x - x_0)(x - x_0 - h). \quad (1)$$

Khi đó, ta có xấp xỉ như sau:

* Tác giả liên hệ
Email: huanhoangngu2021@gmail.com

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} p_0 dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (2)$$

Tương tự như vậy với các đoạn $[x_2, x_4], [x_4, x_6], \dots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$. Công thức xấp xỉ trên cả đoạn $[a, b]$ là (Cao Quyết Thắng, 1998; Dương Thủy Vỹ, 2001; Đặng Quốc Lương, 2001; Phan Văn Hạp, 1990; Phan Văn Hạp, 1978; Ralston A, 1965; Tạ Văn Đình, 1994.):

$$\begin{aligned} \int_{x_0=a}^{x_{2n}=b} f(x)dx &\approx \int_{x_0}^{x_2} p_0(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} p_2(x)dx + \dots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} p_{2n-2}(x)dx \\ &= \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})] \\ &= \frac{h}{3} \left[\sum y_{biên} + 4 \sum y_{lẻ} + 2 \sum y_{chẵn} \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Sai số của phương pháp Simpson

2.1. Đánh giá sai số qua các đạo hàm

Trong một số cuốn sách ít ỏi, có trình bày phương pháp như sau:

$$R = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i \quad (4)$$

Từ công thức này suy ra:

$$|R| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |r_i| \quad (5)$$

Xét một sai số thành phần:

$$r_i = \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_{2i} + 4y_{2i+1} + y_{2i+2}). \quad (6)$$

Ta sẽ đánh giá sai số này bằng hàm phụ:

$$r(t) = \int_{\gamma-t}^{\gamma+t} f(x)dx - \frac{t}{3}[f(\gamma-t) + 4f(\gamma) + f(\gamma+t)], t \in [0, h] \quad (7)$$

Khi $\gamma = x_{2i} + h$ và $t = h$ thì hàm số này trùng với r_i . Ngoài ra $r(0) = 0$. Ta sẽ đi tìm các đạo hàm của $r(t)$. Vì:

$$\psi(t) = \int_{\gamma-t}^{\gamma+t} f(x)dx = \int_{\gamma-t}^0 f(x)dx + \int_0^{\gamma+t} f(x)dx \quad (8)$$

Lấy vi phân của biểu thức trên ta được:

$$\psi'(t) = f(\gamma-t) + f(\gamma+t) \quad (9)$$

Tương tự ta có:

$$\begin{aligned} r'(t) &= f(\gamma-t) + f(\gamma+t) \\ &\quad - \left[\frac{1}{3}(f(\gamma-t) + 4f(\gamma) + f(\gamma+t)) + \frac{t}{3}(f'(\gamma+t) - f'(\gamma-t)) \right] \\ &= \frac{2}{3}[f(\gamma-t) + f(\gamma+t)] - \frac{4}{3}f(\gamma) - \frac{t}{3}[f'(\gamma+t) - f'(\gamma-t)] \\ r'(0) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Tiếp tục lấy vi phân, ta thu được:

$$\begin{aligned} r''(t) &= \frac{2}{3}[f'(\gamma+t) - f'(\gamma-t)] - \frac{1}{3}[f'(\gamma+t) - f'(\gamma-t)] \\ &\quad - \frac{t}{3}[f''(\gamma+t) + f''(\gamma-t)] \\ &= \frac{1}{3}[f'(\gamma+t) - f'(\gamma-t)] - \frac{t}{3}[f''(\gamma+t) + f''(\gamma-t)] \\ r''(0) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
r'''(t) &= \frac{1}{3}[f'''(\gamma+t) + f'''(\gamma-t)] - \frac{1}{3}[f''(\gamma+t) + f''(\gamma-t)] \\
&\quad - \frac{t}{3}[f'''(\gamma+t) - f'''(\gamma-t)] \\
&= -\frac{t}{3}[f'''(\gamma+t) - f'''(\gamma-t)] \\
&\quad r'''(0) = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Áp dụng định lý Lagrange cho hàm $f'''(t)$:

$$f'''(\gamma+t) - f'''(\gamma-t) = f^{(4)}(\xi)2t, \quad \xi \in [\gamma-t, \gamma+t]. \tag{13}$$

Từ đó suy ra:

$$r'''(t) = -\frac{2t^2}{3}f^{(4)}(\xi) \tag{14}$$

Đặt M_4 là giá trị lớn nhất của trị tuyệt đối của đạo hàm cấp bốn của $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$:

$$M_4 = \max_{x \in [a, b]} |f^{(4)}(x)| \tag{15}$$

Từ đó, ta có đánh giá của hàm $r(t)$: $|r'''(t)| \leq \frac{2}{3}M_4t^2$.

Bởi vì:

$$r''(t) = r''(t) - r''(0) = \int_0^t r'''(x)dx \tag{16}$$

Nên:

$$|r''(t)| \leq \int_0^t |r'''(x)|dx \leq \int_0^t \frac{2}{3}M_4x^2dx = \frac{2}{9}M_4t^3 \tag{17}$$

Tương tự như vậy:

$$r'(t) = r'(t) - r'(0) = \int_0^t r''(x)dx \tag{18}$$

Cho nên:

$$|r'(t)| \leq \int_0^t |r''(x)|dx \leq \int_0^t \frac{2}{9}M_4x^3dx = \frac{2}{36}M_4t^4 \tag{19}$$

Cuối cùng là đối với hàm $r(t)$:

$$r(t) = r(t) - r(0) = \int_0^t r'(x)dx \tag{20}$$

$$|r(t)| \leq \int_0^t |r'(x)|dx \leq \int_0^t \frac{2}{36}M_4x^4dx = \frac{2}{180}M_4t^5.$$

Vì $r_i = r(h)$ nên đối với sai số r_i có đánh giá sau:

$$|r_i| \leq \frac{2}{180}M_4 = \frac{2}{180}M_4 \frac{(b-a)^5}{(2n)^5} \tag{21}$$

Biểu thức (5) có n số hạng nên ta có đánh giá chung đối với công thức Simpson như sau:

$$\begin{aligned}
|R| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |r_i| \leq \frac{2}{180}M_4 \frac{(b-a)^5}{(2n)^5} \\
&= \frac{2M_4(b-a)^4}{180} \frac{b-a}{(2n)^4} = \frac{M_4}{180} h^4(b-a).
\end{aligned} \tag{22}$$

2.2. Bằng cách chọn hàm thích hợp

Đặt $q_i(x) = (x - x_{2i})(x - x_{2i+1})(x - x_{2i+2})$ và gọi ξ là điểm nào đó nằm giữa hai điểm $[x_{2i}, x_{2i+2}]$: $\xi \in [x_{2i}, x_{2i+2}]$. Dễ dàng thấy:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} q_i(x)dx = \frac{1}{4}x(-x+2h+2x_{2i})[-x^2+2x(h+x_{2i})-4x_{2i}h-2x_{2i}^2] = 0 \tag{23}$$

Bây giờ ta đặt hàm mới:

$$\Phi(x) = f(x) - p_i(x) - kq_i(x) - \frac{r_i}{\int_a^b xq_i(x)dx} \cdot x \cdot q_i(x) \tag{24}$$

Trong đó k là số thực, đóng vai trò là tham số điều khiển.

Theo nguyên tắc của đa thức nội suy f và p_i sẽ có giá trị như nhau ở các nút $x_{2i}, x_{2i+1}, x_{2i+2}$. Và vì thế mà $\Phi(x)$ cũng đạt giá trị 0 tại các nút này. Ta đi tính tích phân của $\Phi(x)$ trên đoạn $[a, b]$:

$$\begin{aligned}
\int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} \Phi(x) dx &= \int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} \left[f(x) - p_i(x) - kq_i(x) - \frac{r_i}{\int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} xq_i(x) dx} \cdot x \cdot q_i(x) \right] dx \\
&= \int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} [f(x) - p_i(x)] dx - k \int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} q_i(x) dx - r_i \frac{\int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} xq_i(x) dx}{\int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} xq_i(x) dx} \\
&= r_i - k \int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} q_i(x) dx - r_i = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Ta có thể chọn tham số k sao cho tích phân của hàm $\Phi(x)$ trên đoạn nhỏ $[x_{2i}, x_{2i} + h]$ bằng không $\int_{x_{2i}}^{x_{2i}+h} \Phi(x) dx = 0$.

Mặt khác:

$$0 = \int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} \Phi(x) dx = \int_{x_{2i}}^{x_{2i}+h} \Phi(x) dx + \int_{x_{2i}+h}^{x_{2i}+2h} \Phi(x) dx. \tag{26}$$

Từ đây suy ra:

$$\int_{x_{2i}+h}^{x_{2i}+2h} \Phi(x) dx = 0. \tag{27}$$

Vì $\Phi(x)$ là hàm liên tục mà tích phân trên các đoạn con $[x_{2i}, x_{2i}+h]$, $[x_{2i}+h, x_{2i}+2h]$ của nó bằng 0 nên tồn tại các giá trị $u \in [x_{2i}, x_{2i}+h]$, $v \in [x_{2i}+h, x_{2i}+2h]$ sao cho $\Phi(x)$ đạt giá trị 0 tại các giá trị này:

$$\Phi(u) = 0, \quad \Phi(v) = 0. \tag{28}$$

Như vậy có tất cả 5 điểm phân biệt trên đoạn $[x_{2i}, x_{2i} + 2h]$ mà tại đó hàm $\Phi(x)$ đạt giá trị 0. Áp dụng định lý Rolle cho hàm $\Phi(x)$ trên các đoạn $[x_{2i}, u]$, $[u, x_{2i} + h]$, $[x_{2i}+h, v]$, $[v, x_{2i} + 2h]$ lần lượt có

Tồn tại:

$$\begin{aligned}
\xi_1 \in (x_{2i}, u): \quad \Phi'(\xi_1) &= 0 \\
\xi_2 \in (u, x_{2i} + h): \quad \Phi'(\xi_2) &= 0 \\
\xi_3 \in (x_{2i}+h, v): \quad \Phi'(\xi_3) &= 0 \\
\xi_4 \in (v, x_{2i} + 2h): \quad \Phi'(\xi_4) &= 0.
\end{aligned}$$

Tiếp tục áp dụng định lý Rolle cho hàm $\Phi'(x)$ trên các đoạn mới $[\xi_1, \xi_2]$, $[\xi_2, \xi_3]$, $[\xi_3, \xi_4]$. Tồn tại các giá trị η_1, η_2, η_3 :

$$\begin{aligned}
\eta_1 \in (\xi_1, \xi_2): \quad \Phi''(\eta_1) &= 0 \\
\eta_2 \in (\xi_2, \xi_3): \quad \Phi''(\eta_2) &= 0 \\
\eta_3 \in (\xi_3, \xi_4): \quad \Phi''(\eta_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta lại áp dụng định lý Rolle cho hàm $\Phi''(x)$ trên các đoạn mới $[\eta_1, \eta_2]$, $[\eta_2, \eta_3]$. Tồn tại các giá trị ω_1, ω_2 :

$$\begin{aligned}
\omega_1 \in (\eta_1, \eta_2): \quad \Phi'''(\omega_1) &= 0 \\
\omega_2 \in (\eta_2, \eta_3): \quad \Phi'''(\omega_2) &= 0.
\end{aligned}$$

Cuối cùng, áp dụng định lý Rolle cho đoạn $[\omega_1, \omega_2]$: tồn tại giá trị $\xi \in (\omega_1, \omega_2)$ thỏa mãn $\Phi^{(IV)}(\xi) = 0$. Tức là:

$$f^{(IV)}(\xi) - \frac{4! r_i}{\int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} xq_i(x) dx} = 0. \tag{29}$$

Lưu ý: $q_i(x)$ là đa thức bậc 3 với hệ số cao nhất bằng 1 nên khi lấy đạo hàm cấp 4 nó sẽ triệt tiêu còn hàm $xq_i(x)$ khi lấy đạo hàm cấp 4 sẽ được $4!$. Từ đó suy ra

$$r_i = \frac{f^{(IV)}(\xi)}{4!} \int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} xq_i(x) dx. \tag{30}$$

Thế mà:

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i}+2h} xq_i(x) dx = -\frac{4}{15} h^5. \tag{31}$$

Vì thế:

$$r_i = -\frac{f^{(IV)}(\xi)}{90} h^5 \tag{32}$$

Tức là ta cũng thu được đánh giá (20).

Tài liệu tham khảo

- Cao Quyết Thắng, 1998. *Phương pháp tính và Lập trình Turbo Pascal*. Nhà XB giáo dục.
 Dương Thùy Vỹ, 2001. *Phương pháp tính*. Nhà XB khoa học & kỹ thuật.
 Đặng Quốc Lương, 2001. *Phương pháp tính trong kỹ thuật*, Nhà xuất bản xây dựng Hà Nội.

- Phan Văn Hạp, 1990. *Giáo trình Cơ sở phương pháp tính tập I, II*. Trường ĐH Tổng hợp Hà Nội.
 Phan Văn Hạp, 1978. *Bài tập phương pháp tính và lập chương trình cho máy tính điện tử*. Nhà XB đại học và trung học chuyên nghiệp.
 Ralston A, 1965. *A first course in numerical analysis*. McGraw – Hill, New York.
 Tạ Văn Đĩnh, 1994. *Phương pháp tính*. Nhà XB giáo dục,

ABSTRACT

Applications of the mean value theorems to prove the error formula of the parabolic method integral approximation determination

Hoang Ngu Huan

Hanoi University of Mining and Geology

As you know, integral calculus plays an important role in engineering calculations. However, it is not always possible to use the Newton and Leibniz formula to find the exact value. Because in most cases it is impossible to find a primitive one. Therefore, approximation methods (trapezoidal rule, Simpson's rule) are taught in the course of numerical methods. However, in most modern educational materials containing only approximation methods, error formulas, example for illustrations, and their proof is not provided. This disadvantage creates difficulties for students and teachers – people who always have professional questions.

A simple question that arises as soon as we see the error formula of the Simpson method is as follows: there is a 4th-order derivative of a subintegrative function. Although it is not in the approximate formula. This means that when making an erroneous estimate, we must resort to theorems about the mean value (those theorems that establish a connection between a function and its derivative).

In this article, the author wants to present 2 different approaches. The first way is to apply the Lagrange's mean value theorem once, estimating the subintegral function. The second way is to use Rolle's mean value theorem four times. In both cases, it is necessary to skillfully construct a suitable function, in accordance with the conditions of each theorem.

Keywords: parabolic method; error formula; mean value theorems Lagrange; Rolle.

Một vài phương pháp tính định thức ma trận vuông cấp n và ứng dụng

Nguyễn Thuỳ Linh*
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Trong báo cáo tôi trình bày một số phương pháp tính định thức của ma trận vuông cấp cao: phương pháp đưa về dạng ma trận tam giác, phương pháp truy hồi, phương pháp đồng dư, phương pháp biểu diễn định thức dưới dạng tổng các định thức. Mỗi phương pháp đều có ví dụ. Ngoài ra tôi còn đưa ra một vài ví dụ ứng dụng của định thức bài toán thực tế.

Từ khóa: Định thức; ma trận; ma trận Hess; đồng dư; truy hồi.

1. Giới thiệu

Năm 1696, Leibnitz là người đầu tiên nghiên cứu định thức và đến năm 1801 Gauss lần đầu tiên sử dụng định thức trong tác phẩm Arithmeticae. Thế kỉ XVIII và thế kỉ XIX định thức được sử dụng rộng rãi vì tầm quan trọng của chúng trong hình học và dự đoán hành vi trong tương lai của một số sự việc. Định thức là một công cụ hữu hiệu để giải các hệ phương trình, góp phần giải quyết hầu hết các bài toán định lượng cũng như định tính trong Đại số tuyến tính. Ngày nay, định thức cũng được ứng dụng vào các lĩnh vực như khoa học máy tính, kinh tế và kinh doanh, vật lý, hình học,... (Nguyễn Văn Ngọc, 2021)

Trong chương trình toán của các trường cao đẳng và đại học tại nước ta, tính định thức của một ma trận vuông là kiến thức thuộc môn học Đại số tuyến tính hoặc Toán cao cấp dành cho sinh viên năm thứ nhất. Phần tiếp theo, tác giả trình bày một số phương pháp tính định thức giúp sinh viên tính một định thức cấp cao dễ dàng hơn.

2. Một số cách tính định thức cấp n

Định nghĩa: Cho ma trận vuông $A = (a_{ij})_n$ cấp n với $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Định thức của ma trận A , ký hiệu là $\det A$ hoặc $|A|$, được định nghĩa $\det A = \sum (-1)^{N(j_1, j_2, \dots, j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$.

Tổng được lấy theo mọi hoán vị $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

Để tính định thức của ma trận vuông cấp n ta có thể dùng định nghĩa hoặc sử dụng các phép biến đổi sơ cấp (cộng, trừ, nhân vô hướng) theo hàng (cột) để đưa định thức có một hàng (cột) gồm nhiều số 0 rồi khai triển theo hàng hay cột đó (Nguyễn Huy Hoàng, 2018). Cách này thường áp dụng với định thức cấp 2, cấp 3, cấp 4,... còn với định thức cấp cao hay định thức chứa tham số thì sẽ thấy phức tạp và cồng kềnh. Trong phần sau đây, tôi sẽ đưa ra một số phương pháp tính định thức và ví dụ minh họa để có thêm cách tính định thức cấp cao được đơn giản hơn.

2.1. Phương pháp đưa về dạng ma trận tam giác

Phương pháp: dùng các phép biến đổi sơ cấp đưa định thức đã cho về dạng tam giác. Khi đó, định thức bằng tích của các phần tử nằm trên đường chéo chính.

Bài 1. (Kì yếu kì thi Olympic Toán học sinh viên học sinh, 2024)

Cho ma trận $A = \begin{pmatrix} a_1 + c & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + c & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n + c \end{pmatrix}$. Tính định thức của ma trận A .

Lời giải.

$$\text{Ta có } \det A = \begin{vmatrix} a_1 + c & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 + c & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n + c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i + c & a_2 & \dots & a_n \\ \sum_{i=1}^n a_i + c & a_2 + c & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n a_i + c & a_2 & \dots & a_n + c \end{vmatrix}$$

* Tác giả liên hệ

Email: nguyenthuylinhbmtan@humg.edu.vn

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i + c & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \cdots & c & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n a_i + c \right) c^{n-1}.$$

2.2. Phương pháp biểu diễn định thức dưới dạng tổng các định thức

Phương pháp: Tách định thức thành tổng các định thức có cùng bậc đối với các hàng (các cột).

Bài 2. (Kì yếu kì thi Olympic Toán học sinh viên học sinh, 1993)

Cho $2n$ số nguyên $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$ thỏa mãn điều kiện: $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 0$

$$\text{Đặt } A = \begin{pmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_{n-1} & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_{n-1} & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} b_1 & a_{n-1} b_2 & \cdots & 1 + a_{n-1} b_{n-1} & a_n b_n \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_{n-1} & 1 + a_n b_n \end{pmatrix}$$

Tính $\det A$.

Lời giải.

Đặt $D_n = \det A$.

$$\text{Ta có } D_n = \begin{vmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_{n-1} & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_{n-1} & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} b_1 & a_{n-1} b_2 & \cdots & 1 + a_{n-1} b_{n-1} & a_n b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_{n-1} & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_{n-1} & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} b_1 & a_{n-1} b_2 & \cdots & 1 + a_{n-1} b_{n-1} & a_n b_n \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_{n-1} & a_n b_n \end{vmatrix}$$

hay $D_n = D_{n-1} + B$.

$$\text{Trong đó } B = \begin{vmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_{n-1} & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_{n-1} & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} b_1 & a_{n-1} b_2 & \cdots & 1 + a_{n-1} b_{n-1} & a_n b_n \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & a_n b_{n-1} & a_n b_n \end{vmatrix}$$

$$= a_n \begin{vmatrix} 1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_{n-1} & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_{n-1} & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} b_1 & a_{n-1} b_2 & \cdots & 1 + a_{n-1} b_{n-1} & a_n b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

Nhân hàng cuối với a_i rồi cộng với hàng thứ i với $i = 1, 2, \dots, n-1$.

$$\text{Khi đó, } B = a_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{vmatrix} = a_n b_n.$$

Do đó $D_n = D_{n-1} + a_n b_n$. Áp dụng quy nạp ta có $D_n = D_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 1 + \sum_{i=1}^n a_i b_i = 1$.

2.3. Phương pháp truy hồi

Phương pháp: Định thức sẽ được khai triển theo hàng hoặc cột sao cho nhận được có một biểu thức liên hệ giữa định thức đã cho với định thức cùng dạng nhưng bậc nhỏ hơn.

Giả sử chúng ta có:

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, (n > 2) \quad (1)$$

Trong đó p, q là hai hằng số độc lập với n .

Nếu $q = 0$ thì $D_n = pD_{n-1}$. Áp dụng công thức tính số hạng tổng quát trong cấp số nhân ta có $D_n = p^{n-1}D_1$, trong đó D_1 là một hằng số. Xét $q \neq 0$ và a, b là hai nghiệm của phương trình $x^2 - px - q = 0$. Khi đó $p = a + b$, $q = a \cdot b$ thì phương trình (1) có thể viết lại:

$$D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2}) \quad (2)$$

Hoặc:

$$D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2}) \quad (3)$$

Giả sử $a \neq b$. Tương tự $D_n - bD_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_{n-1} - bD_{n-2})$; $D_n - aD_{n-1} = b^{n-2}(D_{n-1} - aD_{n-2})$
 Suy ra: $D_n = \frac{a^{n-2}(D_2 - bD_1) - b^{n-2}(D_2 - aD_1)}{a-b}$ (4)

Xét trường hợp $a = b$. Từ (2) và (3) ta có $D_n - aD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$

Do đó $D_n - aD_{n-1} = Aa^{n-2}$ với $A = D_2 - aD_1$.

Thay n bằng $n-1$ ta có $D_n - aD_{n-1} = Aa^{n-3}$.

Suy ra $D_n = a^2D_{n-2} + 2Aa^{n-2}$.

Tương tự ta có $D_n = a^{n-1}D_1 + (n-1)Aa^{n-2}$ trong đó $A = D_2 - aD_1$.

Bài 3. Tính định thức $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } D_{n+1} &= (-1)^{1+1}a_0 \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-1) \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & x & -1 & \dots & 0 \\ a_3 & 0 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix} \\ &= a_0x^n + D_n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + D_{n-1} = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + D_{n-2} \\ &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + D_2 \\ \text{Mà } D_2 &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & -1 \\ a_n & x \end{vmatrix} = a_{n-1}x + a_n. \\ \text{Vậy } D_{n+1} &= a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n. \end{aligned}$$

2.4. Phương pháp đồng dư

Phương pháp: Sử dụng lý thuyết đồng dư đưa tất cả phần tử trong ma trận này đồng dư với một ma trận mới đơn giản hơn. Khi đó, định thức của chúng cũng đồng dư với nhau theo cùng một modulo.

Tính chất: Cho $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ là hai ma trận vuông cấp n có các phần tử nguyên. Cho m là một số nguyên dương thỏa mãn $a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod{m}$, $\forall i, j, 1 \leq i, j \leq n$. Khi đó $\det A \equiv \det B \pmod{m}$.

Bài 4. (Kì yếu kì thi Olympic Toán học sinh viên học sinh, 2023)

Cho ma trận $A = (a_{ij})_{6 \times 6}$ trong đó $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i = j \\ 1 \text{ hoặc } 2023 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$.

Chứng minh rằng định thức của ma trận A khác 0.

Lời giải:

Ta xét phép đồng dư với 2 ta có:

$$\begin{aligned} \det A &\equiv \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \pmod{2} \equiv \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \pmod{2} \\ &\equiv 5^6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \pmod{2} \equiv 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \pmod{2} \\ &\equiv 5 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \pmod{2} \equiv -5 \pmod{2} \equiv 1 \pmod{2} \end{aligned}$$

Suy ra $\det A$ là một số nguyên lẻ. Vậy $\det A \neq 0$.

3. Ứng dụng của định thức

Trong phần này tôi sẽ trình bày ứng dụng của định thức trong việc tìm lời giải tối ưu lợi nhuận hoặc tìm cách giảm chi phí trong sản xuất là các bài toán quan trọng (Lê Đình Thuý, 2010). Giả sử chúng được thiết lập bởi một hàm $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ phụ thuộc vào hàm nhiều biến (vốn, công nhân, phí dịch vụ, ...).

Giả sử f có đạo hàm cấp 2 và điểm $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ thỏa mãn $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Ma trận Hess của hàm } f \text{ được xác định } H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

$$H(f) \text{ có các định thức con chính sau: } \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\right), \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}, \dots, \det(H(f)).$$

-Nếu các định thức con $H_i > 0, \forall i = 1, \dots, n$ thì $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ là điểm cực tiểu của hàm f .

-Nếu $H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0, H_4 > 0, \dots$ thì $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ là điểm cực đại của hàm f .

Bài 5. Một doanh nghiệp sản xuất và độc quyền tiêu thụ bộ ga giường tại hai thị trường khác nhau với đơn giá mỗi sản phẩm tại từng thị trường lần lượt là $p_1 = 650, p_2 = 550$ (đơn vị tính: nghìn VNĐ). Giả sử tổng chi phí sản xuất của doanh nghiệp đó là $C = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2 + 30Q_2 + 250$; ($Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0$). Ở đây Q_1, Q_2 lần lượt là lượng sản phẩm tiêu thụ ở từng thị trường. Hỏi doanh nghiệp đó cần tiêu thụ bao nhiêu sản phẩm ở mỗi thị trường để tối ưu hoá lợi nhuận?

Lời giải.

Doanh thu của doanh nghiệp: $R = 650Q_1 + 550Q_2$; $Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0$.

Tổng chi phí sản xuất là: $C = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2 + 30Q_2 + 250$.

Do đó, lợi nhuận của doanh nghiệp là: $\pi = R - C = 650Q_1 + 520Q_2 - Q_1^2 - Q_1 Q_2 - Q_2^2 - 250$.

Việc xác định mức tiêu thụ sản phẩm của doanh nghiệp tại mỗi thị trường để tối ưu hoá lợi nhuận ta đưa về bài toán tìm cực trị như sau: Tìm $Q_1, Q_2 \geq 0$ sao cho hàm π đạt cực đại.

Ta có $\pi'_{Q_1} = 650 - 2Q_1 - Q_2$; $\pi'_{Q_2} = 520 - 2Q_2 - Q_1$.

$$\text{Xét } \begin{cases} \pi'_{Q_1} = 0 \\ \pi'_{Q_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 650 - 2Q_1 - Q_2 = 0 \\ 520 - 2Q_2 - Q_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 260 \\ Q_2 = 130 \end{cases} \quad \text{Điểm dừng } M(260, 130).$$

$$\text{Ta có } \pi''_{Q_1} = -2; \pi''_{Q_1 Q_2} = -1; \pi''_{Q_2} = -2. \text{ Khi đó, } H = \begin{pmatrix} \pi''_{Q_1} & \pi''_{Q_1 Q_2} \\ \pi''_{Q_2 Q_1} & \pi''_{Q_2} \end{pmatrix}$$

$$H_1 = -2 < 0, H_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \text{ nên hàm số đạt cực đại tại } M(260, 130) \text{ và } \pi_{\max} = 118050.$$

Vậy khi doanh nghiệp tiêu thụ $Q_1 = 260$ sản phẩm ở thị trường thứ nhất, $Q_2 = 130$ sản phẩm ở thị trường thứ hai thì sẽ đạt lợi nhuận tối đa là 118050 nghìn VNĐ.

Nhận xét. Trong thực tế việc tìm ra phương án tối ưu với các ràng buộc nhất định luôn xuất hiện. Đó là bài toán tìm cực trị mà các biến không độc lập mà ràng buộc với nhau bởi các điều kiện phụ thuộc nào đó (phương trình hay bất phương trình) gọi là cực trị có điều kiện (Nguyễn Văn Ngọc, 2021). Một trong các phương pháp làm là Phương pháp nhân tử Lagrange. Phương pháp này chuyển bài toán cực trị của hàm nhiều biến $z = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$ về bài toán cực trị tự do thông qua hàm Lagrange.

Bước 1. Tìm miền xác định (nếu cần) của hàm $z = f(x, y)$ và hàm $g(x, y)$. Lập hàm Lagrange

$$L = L(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

trong đó λ gọi là nhân tử Lagrange.

$$\text{Bước 2. Tính các đạo hàm riêng } L'_x, L'_y, L'_\lambda \text{ và giải hệ phương trình } \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \text{ tìm các điểm dừng } M_i \text{ và}$$

các giá trị λ tương ứng.

Bước 3. Kiểm tra điều kiện có cực trị tại điểm dừng M_i và nhân tử λ_i tương ứng.

$$\text{Tính } \det H \text{ với } H = \begin{pmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{pmatrix}.$$

Bước 4. Kết luận

-Nếu $\det H > 0$ thì M_i là điểm cực đại

-Nếu $\det H < 0$ thì M_i là điểm cực tiểu.

-Nếu $\det H = 0$ thì chưa thể kết luận gì về M_i .

Bài 6. Một cửa hàng đồ gỗ dùng 130 triệu VNĐ để nhập hai mặt hàng A và B. Biết giá 1 sản phẩm của mặt hàng A, B lần lượt là 2 triệu VNĐ và 3 triệu VNĐ. Khi mua x sản phẩm mặt hàng A và y sản phẩm mặt hàng B thì hàm lợi ích tiêu dùng là $U(x, y) = x^{0,4}y^{0,6}$. Hãy xác định số lượng sản phẩm mỗi mặt hàng mà cửa hàng cần mua để sử dụng cao nhất.

Lời giải.

Gọi x, y lần lượt là số lượng mặt hàng A và B cần mua ($x \geq 0, y \geq 0$).

Bài toán tìm x, y để hàm số $U(x, y) = x^{0,4}y^{0,6}$ đạt cực đại với điều kiện $g(x, y) = 2x + 3y = 130$.

Lập hàm Lagrange $L(x, y, \lambda) = U(x, y) - \lambda g(x, y) = x^{0,4}y^{0,6} - \lambda(2x + 3y - 130)$.

Ta có $L'_x = 0,4x^{-0,6}y^{0,6} - 2\lambda$; $L'_y = 0,6x^{0,4}y^{-0,4} - 3\lambda$; $L'_\lambda = 130 - 2x - 3y$.

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,4x^{-0,6}y^{0,6} - 2\lambda = 0 \\ 0,6x^{0,4}y^{-0,4} - 3\lambda = 0 \\ 130 - 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{-0,6}y^{0,6} = 5\lambda \\ x^{0,4}y^{-0,4} = 5\lambda \\ 130 - 2x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 26 \\ y = 26 \\ \lambda = 0,2 \end{cases}$$

Điểm dừng $M(26, 26)$ với $\lambda = 0,2$.

Ta có: $L''_{xx} = -0,24x^{-1,6}y^{0,6}$; $L''_{xy} = 0,24x^{-0,6}y^{-0,4}$; $L''_{yy} = -0,24x^{0,4}y^{-1,4}$

$$g_1 = g'_x(M) = 2; g_2 = g'_y(M) = 3; L_{11} = L''_{xx}(26; 26; 0,2) = -\frac{3}{325} < 0;$$

$$L_{22} = L''_{yy}(26; 26; 0,2) = -\frac{3}{325} < 0; L_{12} = L_{21} = L''_{xy}(26; 26; 0,2) = \frac{3}{325} > 0.$$

$$\text{Xét } |H| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & L_{11} & L_{12} \\ 3 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -\frac{3}{325} & \frac{3}{325} \\ 3 & \frac{3}{325} & -\frac{3}{325} \end{vmatrix} = \frac{3}{13} > 0.$$

Do đó $M(26, 26)$ là điểm cực đại.

Vậy để sử dụng cao nhất thì vẫn phòng cần mua mỗi loại 26 sản phẩm.

4. Kết luận

Trong bài tôi đã trình bày một số phương pháp tính định thức cấp cao và ứng dụng của định thức tìm lời giải cho bài toán tối thiểu hóa chi phí và tối đa hóa lợi nhuận trong kinh doanh thông qua tính định thức của ma trận Hesse.

Tài liệu tham khảo

Nguyễn Văn Ngọc, Nguyễn Thị Lan Hương, Đào Xuân Hưng, Lê Bích Phượng, Hà Hữu Cao Trình, Lê Thị Hương Giang, Nguyễn Thị Hiền, 2021. *Giáo trình Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

Lê Đình Thuý, 2010. *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế*, NXB Giáo dục.

Nguyễn Huy Hoàng, Nguyễn Trung Đông, 2018. *Giáo trình Toán giành cho kinh tế và quản trị*, NXB ĐHKQTĐ.

Kỉ yếu kì thi Olympic Toán học sinh viên học sinh, 1993, 2023, 2024.

ABSTRACT

Some methods for calculation of n-level square matrix determinants and applications

Nguyễn Thùy Linh

Ha Noi University of Mining and Geology

In this article, I present a number of methods for calculating the determinant of a high-level square matrix: the method of converting it into a triangular matrix, the method of recurrence, the method of congruence, the method of representing the determinant as a sum of numbers. determinant. Each method has examples. In addition, I also give a few application examples of the determinant in real problems.

Keywords: Determinant; matrix; Hess matrix; congruence; recurrence.

Kiểm định trung bình hai tổng thể trong phần mềm R

Phạm Ngọc Anh*
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

R là một ngôn ngữ lập trình hoàn thiện định hướng cho tính toán thống kê và phân tích dữ liệu. R cho phép giải quyết một khối lượng lớn các bài toán trong phân tích thống kê và đồ thị. Hơn nữa R chạy trên nhiều hệ điều hành: Windows, Linux, Mac OS,... Bộ cài cũng như tài liệu hướng dẫn cài đặt và sử dụng đều tải miễn phí từ trang chủ CRAN của R. Việc sử dụng R trong nghiên cứu và phân tích dữ liệu là một xu hướng và ngày càng phổ biến trong nhiều lĩnh vực thực tiễn. Trong bài báo này, tác giả trình bày về phương pháp nghiên cứu dấu hiệu hiệu tổng thể bằng phương pháp kiểm định giả thuyết thống kê, cụ thể tôi giải quyết bài toán kiểm định giả thuyết về tham số trung bình của hai tổng thể bằng phần mềm R. Tác giả trình bày lý thuyết chứng của bài toán kiểm định, sau đó giới thiệu những quy trình và gói lệnh dùng để thực hiện bài toán kiểm định giả thuyết về trung bình của hai tổng thể.

Từ khóa: phần mềm R; kiểm định giả thuyết; trung bình hai tổng thể.

1. Đặt vấn đề

Trong thực tế, các vấn đề thường gặp trong khoa học và kỹ thuật không chứa nhiều sự ước lượng các tham số, nhưng cần thiết thành lập một cơ sở thủ tục quyết định mà để từ đó có thể đưa ra kết luận về vấn đề khoa học nào đó. Ví dụ, một kỹ sư có thể khẳng định dựa trên cơ sở các mẫu số liệu để đánh giá có sự khác biệt giữa độ chính xác của hai loại máy đo; hoặc một nhà xã hội học có thể chọn một mẫu thích hợp cho phép họ khẳng định nhóm máu, màu tóc của một người là độc lập nhau. Trong các trường hợp trên, nhà xã hội học, hay kỹ sư đã nhận định đưa ra kết luận về một vấn đề. Hơn nữa, nó đòi hỏi việc sử dụng dữ liệu thực nghiệm và đưa ra quyết định trên cơ sở các dữ liệu ấy. Các nhận định đó được đặt dưới dạng một giả thuyết thống kê.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lý thuyết

2.1.1. Giả thuyết thống kê

Giả thuyết thống kê là một sự xác nhận hay phỏng đoán liên quan tới một hay nhiều tổng thể.

Giả thuyết mà ta muốn kiểm tra được kí hiệu là H_0 – gọi là giả thuyết gốc.

Mệnh đề mâu thuẫn với giả thuyết muốn kiểm tra, gọi là giả thuyết đối, kí hiệu là H_1 .

2.1.2. Tiêu chuẩn kiểm định giả thuyết thống kê

Từ các thông tin mẫu x_1, x_2, \dots, x_n , ta chọn một thống kê:

$$G = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (1)$$

Có thể phụ thuộc vào tham số đã biết trong giả thuyết gốc. Nếu giả thuyết gốc đúng thì quy luật phân phối của G hoàn toàn xác định. Một thống kê như vậy được gọi là tiêu chuẩn kiểm định.

2.1.3. Miền bác bỏ giả thuyết

Ta tìm miền W_α sao cho với điều kiện giả thuyết H_0 là đúng xác suất để G nhận giá trị thuộc miền W_α bằng α :

$$P(G \in W_\alpha | H_0) = \alpha \quad (2)$$

Ở đây xác suất α bé và cho trước (thường lấy α bằng 0,05 hoặc 0,01).

Do α khá bé nên theo nguyên lý xác suất nhỏ coi như biến cố ($G \in W_\alpha$) không xảy ra trong một phép thử.

Giá trị α gọi là mức ý nghĩa của kiểm định.

* Tác giả liên hệ

Email: phamngocanhbmtoan@hmg.edu.vn

Miền W_α gọi là miền bác bỏ giả thuyết H_0 với mức ý nghĩa α .

2.1.4. Giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định.

Thực hiện một phép thử đối với mẫu ngẫu nhiên $W = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ thu được một mẫu cụ thể $w = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ và qua đó tính được một giá trị cụ thể của tiêu chuẩn kiểm định G .

$$G_{qs} = f(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) \quad (3)$$

Giá trị trên gọi là giá trị quan sát của tiêu chuẩn kiểm định.

2.1.5. Quy tắc kiểm định

Nếu G tính trên mẫu có giá trị thuộc miền bác bỏ $G_{qs} \in W_\alpha$ thì ta bác bỏ H_0 thừa nhận H_1 .

Ngược lại, nếu G tính trên mẫu có giá trị không thuộc miền bác bỏ thì ta chấp nhận H_0 .

2.2. Phương pháp nghiên cứu

2.2.1. Phương pháp kiểm định với mức ý nghĩa cố định

Phương pháp chung để kiểm định một giả thuyết thống kê như sau: Trước hết giả sử H_0 đúng và từ đó dựa thông tin của mẫu rút ra từ tổng thể tìm được một biến cố A nào đó sao cho xác suất xảy ra biến cố A bằng α bé đến mức có thể sử dụng nguyên lý xác suất nhỏ tức là có thể coi A không xảy ra trong một phép thử về biến cố này. Lúc đó trên một mẫu cụ thể thực hiện một phép thử đối với biến cố A , nếu A xảy ra thì điều đó chứng tỏ H_0 sai và bác bỏ nó, còn nếu A không xảy ra thì ta chưa có cơ sở bác bỏ H_0 (Đặng Hùng Thắng, Trần Mạnh Cường, 2019).

2.2.2. Phương pháp P -value

Trong những năm gần đây nhiều nhà nghiên cứu thường sử dụng một cách tiếp cận khác. Thay vì kiểm định giả thuyết với một giá trị α định trước thì họ cho rằng ta nên định rõ các giả thuyết cơ sở H_0 và đối thuyết H_1 , sau đó thu thập các số liệu mẫu và xác định mức độ khẳng định việc bác bỏ giả thuyết H_0 .

Mức độ khẳng định này thường được gọi là giá trị xác suất p – value của kiểm định. Hay nói cách khác p – value chính là mức ý nghĩa thấp nhất mà ta có thể bác bỏ H_0 . (Đặng Hùng Thắng, Trần Mạnh Cường, 2019).

Kết luận dựa vào p – value được đưa ra theo quy tắc: nếu p – value nhỏ hơn α thì kết luận có đủ bằng chứng thống kê để bác bỏ giả thuyết H_0 (do đó chấp nhận H_1); ngược lại nếu p – value lớn hơn hoặc bằng α thì kết luận có đủ bằng chứng thống kê để chấp nhận giả thuyết H_0 (Nguyễn Văn Tuấn, 2020).

Quy trình làm một bài toán kiểm định giả thuyết trong R thường được tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Thiết lập cặp giả thuyết H_0 và H_1 ;

Bước 2: Xác định hàm kiểm định cùng với các tham số thích hợp;

Bước 3: Thực hiện kiểm định;

Bước 4: Đọc kết quả và đưa ra kết luận.

3. Kết quả và thảo luận

Để thực hiện bài toán kiểm định giả thuyết về trung bình của hai tổng thể trong R ta dùng các hàm $z.test$, $t.test$ hoặc $zsum.test$, $tsum.test$. Tùy theo mẫu chọn là độc lập hay ghép cặp và dữ liệu là thứ cấp hay sơ cấp mà ta lựa chọn hàm cùng với những tham số cho thích hợp. Khi mẫu được chọn độc lập, việc chọn hàm và tham số được xét theo phương sai của hai tổng thể đã biết hay chưa biết và có bằng nhau hay không bằng nhau.

Bảng 1. Bảng hàm sử dụng để kiểm định giả thuyết trung bình hai tổng thể trong R.

Chọn mẫu độc lập		
	Dữ liệu	
Phương sai	Sơ cấp	Thứ cấp
Đã biết	$z.test$	$zsum.test$
Chưa biết	$t.test$	$tsum.test$
Chọn mẫu ghép cặp		
	Dữ liệu sơ cấp	Dữ liệu thứ cấp
	$t.test$	$tsum.test$

Hàm $t.test$ có sẵn trong gói cơ bản của R, ba hàm còn lại phải sử dụng gói BSDA.

3.1. Kiểm định trung bình hai tổng thể khi đã biết phương sai của hai tổng thể, chọn mẫu độc lập và dữ liệu sơ cấp

Khi phương sai của hai tổng thể đã biết, chọn mẫu độc lập và dữ liệu sơ cấp, kiểm định trung bình hai tổng thể được tìm qua hàm $z.test$ với các tham số cần thiết:

$z.test(x, y, sigma.x, sigma.y, mu, alternative)$

Trong đó: x - véc tơ dữ liệu mẫu thứ nhất; y - véc tơ dữ liệu mẫu thứ hai; $sigma.x$ - độ lệch chuẩn của tổng thể thứ nhất; $sigma.y$ - độ lệch chuẩn của tổng thể thứ hai; $alternative$ - Chuỗi kí tự chỉ giả thuyết đối, $alternative = c("two.sided", "less", "greater")$ tương ứng là giả thuyết đối là hai bên, bên trái, bên phải, mặc định là "two.sided"; mu - Hiệu chênh lệch của hai giá trị trung bình xác định theo giả thuyết không, mặc định bằng 0.

Ví dụ: Một nhà phân tích thị trường muốn xét xem có sự khác biệt về giá trung bình của một gallon sữa ở hai thành phố A và B không. Để thực hiện điều này, nhà phân tích đã điều tra được từ mỗi thành phố 31 người đã mua sữa trong vòng hai tuần gần đây và thu được bảng số liệu như sau:

Bảng 2. Kết quả điều tra giá sữa.

Thành phố A (\$)			Thành phố B (\$)		
2.55	2.36	2.43	2.25	2.40	2.39
2.67	2.54	2.43	2.30	2.33	2.40
2.50	2.54	2.38	2.19	2.29	2.23
2.61	2.80	2.49	2.41	2.18	2.29
3.10	2.61	2.57	2.39	2.59	2.53
2.86	2.56	2.71	2.26	2.38	2.19
2.50	2.64	2.97	2.19	2.25	2.45
2.47	2.72	2.65	2.42	2.61	2.33
2.76	2.73	2.80	2.60	2.25	2.51
2.65	2.83	2.69	2.38	2.29	2.36
		2.71			2.44

Cho biết giá một gallon sữa ở thành phố A tuân theo phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 0.2 và giá sữa của một gallon sữa ở thành phố B tuân theo phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 0.1. Tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, hãy xét xem có sự khác biệt về giá trung bình của một gallon sữa ở hai thành phố trên không?

Lời giải:

Bước 1: Gọi μ_1, μ_2 tương ứng là giá trị trung bình của một gallon sữa ở hai thành phố A và B. Khi đó ta kiểm định cặp giả thuyết sau:

Xét bài toán: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0; H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Bước 2: Ta sử dụng hàm $z.test$ với các tham số cần thiết được cho như sau:

- x là véc tơ dữ liệu giá sữa thành phố A;
- y là véc tơ dữ liệu giá sữa thành phố B;
- Độ lệch chuẩn giá sữa thành phố A là 0.2 nên $sigma.x = 0.2$;
- Độ lệch chuẩn giá sữa thành phố B là 0.1 nên $sigma.y = 0.1$;
- Giả thuyết không: $\mu_1 - \mu_2 = 0$ nên $mu = 0$ hoặc không cần đánh tham số này vào;
- Giả thuyết đối: $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ dạng hai bên nên $alternative = "two.sided"$ hoặc không cần đánh tham số này vào.

Bước 3: Ta thực hiện trong R.

```
> library(BSDA)
> A=c(2.55,2.67, 2.50, 2.61, 3.10, 2.86, 2.50, 2.47, 2.76, 2.65, 2.36, 2.54, 2.54, 2.5
4, 2.80, 2.61, 2.56, 2.64, 2.72, 2.73, 2.83, 2.43, 2.43, 2.38, 2.49, 2.57, 2.71, 2.97,
2.65, 2.80, 2.69, 2.71)
>
> B=c(2.25, 2.30, 2.19, 2.41, 2.39, 2.26, 2.19, 2.42, 2.60, 2.38, 2.40, 2.33, 2.29, 2.1
8, 2.59, 2.38, 2.25, 2.61, 2.25, 2.29, 2.39, 2.40, 2.23, 2.29, 2.53, 2.19, 2.45, 2.33,
2.51, 2.36, 2.44)
>
> z.test(A,B,sigma.x = 0.2,sigma.y = 0.1,mu=0,alternative = "two.sided")

Two-sample z-Test

data: A and B
z = 7.0392, p-value = 1.934e-12
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.2014193 0.3568670
sample estimates:
mean of x mean of y
 2.636563  2.357419
```

Bước 4: Đọc kết quả:

Để kết luận bác bỏ H_0 ta có thể dựa vào giá trị thống kê $z = 7.0392$ lớn hơn giá trị tới hạn $z_{0.025} = 1.96$ hoặc sử dụng $p - value = 1.934e - 12$ nhỏ hơn mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$

Vậy tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, ta có đủ bằng chứng thống kê để cho rằng giá sữa trung bình của hai thành phố có sự khác biệt.

3.2. Kiểm định trung bình hai tổng thể, phương sai đã biết, chọn mẫu độc lập, dữ liệu thứ cấp

Khi phương sai tổng thể đã biết, chọn mẫu độc lập, dữ liệu thứ cấp, kiểm định trung bình hai tổng thể được tìm qua hàm `zsum.test` với các tham số cần thiết.

`zsum.test(mean.x, sigma.x, n.x, mean.y, sigma.y, n.y, mu, alternative)`

Trong đó: *mean.x* - trung bình mẫu thứ nhất; *n.x* - cỡ mẫu thứ nhất; *mean.y* - trung bình mẫu thứ hai; *n.y* - cỡ mẫu thứ hai.

Ví dụ: Cục thống kê lao động muốn tìm hiểu chi phí bảo hiểm trung bình mà một công ti chi trả trên một giờ cho những nhân viên được thuê để quản lí và những nhân viên là công nhân lành nghề. Để xem xét vấn đề này, họ đã điều tra 35 nhà quản lí và 41 công nhân lành nghề thấy chi phí bảo hiểm trung bình mà công ti của họ trả tương ứng là 1.84\$ và 1.99\$. Giả sử chi phí chi trả cho các nhân viên quản lí tuân theo phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 0.4\$ và chi phí trả cho các công nhân lành nghề tuân theo phân phối chuẩn với độ lệch chuẩn là 0.5\$. Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, hãy kiểm định xem có sự khác biệt về chi phí bảo hiểm trung bình trên một giờ giữa các nhân viên quản lí và các công nhân lành nghề hay không?

Lời giải:

Gọi μ_1, μ_2 là chi phí bảo hiểm trung bình trên một giờ của các nhân viên quản lí và các công nhân lành nghề. Khi đó ta kiểm định cặp giả thuyết sau:

Xét bài toán: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0; H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Thực hiện kiểm định trên R

```
> library(BSDA)
> zsum.test(mean.x = 1.84, mean.y = 1.99, sigma.x = 0.4, sigma.y = 0.5, n.x = 35, n.y = 41)
```

Two-sample z-Test

```
data: Summarized x and y
z = -1.4522, p-value = 0.1464
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.35244625 0.05244625
sample estimates:
mean of x mean of y
    1.84    1.99
```

Đọc kết quả:

Giá trị thống kê $z = -1.4522$ thỏa mãn $-z_{0.025} = -1.96 < -1.4522 < z_{0.025} = 1.96$ hoặc sử dụng $p - value = 0.1464$ lớn hơn mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$ nên ta kết luận chấp nhận H_0

Vậy với mức ý nghĩa 5% ta không có đủ bằng chứng thống kê để cho rằng có sự khác biệt giữa chi phí chi trả trung bình trên một giờ của các nhân viên quản lí và các công nhân lành nghề.

3.3. Kiểm định trung bình hai tổng thể, phương sai chưa biết nhưng được giả thiết bằng nhau, chọn mẫu độc lập, dữ liệu sơ cấp.

Để kiểm định trung bình hai tổng thể khi chưa biết phương sai của tổng thể nhưng có giả thiết bằng nhau, chọn mẫu độc lập, dữ liệu sơ cấp, ta dùng hàm `t.test` với tham số `var.equal = TRUE`

`t.test(x, y, mu, alternative, var.equal = TRUE)`

Trong đó: `var.equal = TRUE` - Tham số chỉ phương sai của hai tổng thể bằng nhau.

Ví dụ: Một nhà nghiên cứu đang muốn so sánh chi phí chi trả trong một năm để nuôi sống một gia đình gồm bốn người Việt sống ở những thành phố nước ngoài khác nhau. Nhà nghiên cứu đã chọn ra hai thành phố A và B để nghiên cứu. Nhà nghiên cứu chọn ra trong mỗi thành phố 11 gia đình để điều tra và thu được bảng số liệu:

Bảng 3. Kết quả điều tra chi phí nuôi sống gia đình trong một năm.

A(\$/năm)	69000	64500	67500	64500	66700	68000	65000	69000	71000	68500	67500
B(\$/năm)	65000	64000	66000	64900	62000	60500	62500	63000	64500	63500	62400

Cho biết chi phí chi tiêu hàng năm của gia đình bốn người Việt ở hai thành phố trên tuân theo phân phối chuẩn với phương sai bằng nhau. Tại mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ hãy kiểm định xem có sự khác biệt về chi phí chi trả của các gia đình gồm bốn người Việt sống ở hai thành phố A và B không?

Lời giải

Gọi μ_1, μ_2 là chi phí chi trả trung bình trong một năm để nuôi sống gia đình gồm bốn người Việt ở hai thành phố A và B. Khi đó ta kiểm định cặp giả thuyết sau:

Xét bài toán: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$; $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Ta dùng hàm *t.test* với tham số *var.equal = TRUE* do phương sai của hai tổng thể được giả thiết bằng nhau.

```
> A = c(69000, 64500, 67500, 64500, 66700, 68000, 65000, 69000, 71000, 68500, 67500)
> B = c(65000, 64000, 66000, 64900, 62000, 60500, 62500, 63000, 64500, 63500, 62400)
> t.test(A, B, var.equal = TRUE)

Two sample t-test
```

```
data: A and B
t = 4.9547, df = 20, p-value = 7.627e-05
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 2258.08 5541.92
sample estimates:
mean of x mean of y
 67381.82 63481.82
```

Giá trị thống kê $t = 4.9547$

Bậc tự do (df: degree freedom) của phân phối t là $n - 1 = 20$

$p - value = 7.627e - 05$

Để bác bỏ H_0 , ta có thể dựa vào giá trị thống kê $t = 4.9547$ lớn hơn giá trị tới hạn $t_{20, 0.025} = 2.09$ hoặc sử dụng $p - value = 7.627e - 05$ nhỏ hơn mức ý nghĩa $\alpha = 0.05$.

Vậy với mức ý nghĩa 5% ta có đủ bằng chứng thống kê để cho rằng có sự khác biệt về chi phí chi trả trung bình trong một năm để nuôi sống một gia đình gồm bốn người ở hai thành phố A và B.

4. Kết luận

Bài báo có những đóng góp sau đây:

- Dùng các lệnh trong R để kiểm định được tham số giá trị trung bình hai tổng thể nghiên cứu.
- Giải quyết được một số ví dụ thực tiễn mới, áp dụng được cho giảng dạy môn học học xác suất thống kê tại trường Đại học Mỏ - Địa chất theo hướng đổi mới.

Tài liệu tham khảo

Đặng Hùng Thắng(chủ biên), Trần Mạnh Cường, 2019. *Thống kê cho khoa học xã hội và khoa học sự sống (với phần mềm R)*. Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội, trang 109-137.

Nguyễn Văn Tuấn, 2020. *Phân Tích Dữ Liệu với R*. Nhà xuất bản tổng hợp Thành phố Hồ Chí Minh, trang 143-149.

ABSTRACT

R statistics in parameters testing problem

Pham Ngoc Anh

Hanoi University of Mining and Geology

R is a mature programming language oriented toward statistical computing and data analysis. R allows solving a large number of problems in statistical and graphical analysis. Furthermore, R runs on many operating systems: Windows, Linux, Mac OS,... The installer as well as installation and usage instructions are all free to download from R's CRAN homepage. Using R in research Data research and analysis is a trend and increasingly popular in many practical fields. In this report, I present the method of testing the overall signal using the statistical hypothesis testing method. Specifically, I solve the problem of testing the hypothesis about the average parameter of two populations using the section R software. I present the general theory of the testing problem, then introduce the processes and command packages used to perform the problem of testing the hypothesis about the average of two populations.

Keywords: R statistics; statistical hypothesis testing; overall average calculation.

Một cách sáng tác bài toán Giải tích cho kỳ thi Olympic Toán sinh viên

Phạm Tuấn Cường*
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Olympic toán Giải tích sinh viên là cuộc thi học thuật thường niên được tổ chức bởi Hội toán học Việt Nam, Bộ Giáo dục và Đào tạo dành cho sinh viên yêu toán trong cả nước. Cuộc thi góp phần quan trọng trong việc thúc đẩy phong trào dạy và học toán trong các trường Đại học và Cao đẳng. Tuy nhiên để sinh viên các trường không chuyên về toán có thể tiếp cận được với các bài tập trong đề thi Olympic là chuyện không hề dễ dàng nếu không có sự phân tích giảng dạy của các giảng viên có kinh nghiệm thực tế ôn luyện đội tuyển. Báo cáo trình bày cách sáng tác bài toán Giải tích trong các kỳ thi Olympic toán toàn quốc nhằm giúp sinh viên không những nắm bắt được phương pháp giải mà còn giúp sinh viên rèn luyện được phương pháp suy nghĩ logic và tư duy sáng tạo trong các dạng bài toán giải tích mở rộng và tổng quát.

Từ khóa: Bài toán Giải tích; Đạo hàm; Vi phân; Tích phân.

1. Mở đầu

Trong báo cáo này chúng tôi giới thiệu những định lý giá trị trung bình cho lớp các hàm khả vi, gồm các định lý quen thuộc và một số định lý mới được phát triển trong thời gian gần đây và một số bài toán liên quan đến tích phân. Từ đó chúng tôi đưa ra một vài cách phát triển mở rộng ra bài toán mới, trong đó đặc biệt quan tâm tới dạng bài tập nâng cao dành cho đối tượng dự thi Olympic toán quốc gia.

2. Các định lý cơ bản với lớp hàm khả vi

2.1. Định lý Fermat

Giả sử hàm $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, đạt cực trị tại điểm $x_0 \in (a, b)$ và khả vi tại điểm x_0 khi đó $f'(x_0) = 0$ (Vũ Tiến Việt, 2021).

2.2. Định lý Rolle

Giả sử hàm $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong khoảng (a, b) và có $f(a) = f(b)$ khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$ (Vũ Tiến Việt, 2021).

2.3. Định lý Lagrange

Giả sử hàm $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong khoảng (a, b) khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (Hội Toán học Việt Nam).

2.4. Định lý Cauchy

Giả sử hàm $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong khoảng (a, b) đồng thời $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$. Khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ (Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm Thế Long, Nguyễn Minh Tuấn, 2006).

2.5. Định lý Meyer

* Tác giả liên hệ
Email: phamtuancong@hmg.edu.vn

Cho hàm $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và khả vi trên $[a, b]$, thỏa mãn điều kiện $f'(a) = f'(b)$ khi đó tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (Vũ Tiến Việt, 2017).

3. Áp dụng định lý trên giải và mở rộng cho một số đề thi Olympic toán sinh viên.

3.1. Cho hàm f khả vi trên $[0, 1]$ và thỏa mãn điều kiện $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với $\alpha, \beta > 0$ tồn tại các số $c_1, c_2 \in (0, 1), c_1 \neq c_2$ sao cho $\frac{\alpha}{f'(c_1)} + \frac{\beta}{f'(c_2)} = \alpha + \beta$.

Lời giải. Xét hàm $g(x) = f(x) - \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

Đễ thấy $g(0) = -\frac{\alpha}{\alpha + \beta} < 0, g(1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} > 0$.

Suy ra tồn tại số $c \in (0, 1)$ để $g(c) = 0$, tức $f(c) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$.

Dùng định lý Lagrange cho hàm f trên $(0, c)$ thì tồn tại $c_1 \in (0, c)$ sao cho $f'(c_1) = \frac{f(c) - f(0)}{c - 0} + \frac{\beta}{f'(c_2)} = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)c}$.

Dùng định lý Lagrange cho hàm f trên $(c, 1)$ thì tồn tại $c_2 \in (c, 1)$ sao cho $f'(c_2) = \frac{f(1) - f(c)}{1 - c} + \frac{\beta}{f'(c_2)} = \frac{\beta}{(\alpha + \beta)(1 - c)}$.

Từ đó ta có $\frac{\alpha}{f'(c_1)} = (\alpha + \beta)c, \frac{\beta}{f'(c_2)} = (\alpha + \beta)(1 - c)$.

Từ đó dễ thấy $c_1, c_2 \in (0, 1), c_1 \neq c_2$ và thỏa mãn điều phải chứng minh $\frac{\alpha}{f'(c_1)} + \frac{\beta}{f'(c_2)} = (\alpha + \beta)$.

+ Lấy $\beta = 1 - \alpha$ ta sẽ có bài thi OLP-2008 tại Nha Trang. (OLP-2008, Nha Trang). Cho hàm f liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trong $(0, 1)$ và thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với $\alpha \in (0, 1)$ tồn tại các số $x_1, x_2 \in (0, 1), x_1 \neq x_2$ sao cho $\frac{\alpha}{f'(x_1)} + \frac{1 - \alpha}{f'(x_2)} = 1$.

Có thể mở rộng bài toán trên thành bài toán tổng quát như sau:

+ Cho hàm f khả vi trong $(0, 1)$ và thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với các số dương

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ cho trước, tồn tại các điểm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_k \in [0, 1]$ sao cho $\sum_{k=1}^n \frac{\alpha_k}{f'(x_k)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k$.

+ Cho hàm f liên tục trên $[0, 1]$, khả vi trong $(0, 1)$ và thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$. Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại các điểm phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_n \in [0, 1]$ sao cho $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} + \dots + \frac{1}{f'(x_n)} = n$.

3.2. Cho hàm f liên tục trên $[a, b]$ khả vi trong (a, b) . Chứng minh rằng tồn tại $\alpha, \beta, \gamma \in (a, b)$ sao cho

$$f'(\alpha) = \frac{a+b}{4} \frac{f'(\beta)}{\beta} + \frac{a^2 + ab + b^2}{6} \frac{f'(\gamma)}{\gamma^2}.$$

Lời giải. Theo định lý Lagrange với hàm $f(x)$ trên $[a, b]$ thì tồn tại $\alpha \in (a, b)$ sao cho $f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Dùng định lý Cauchy cho $f(x)$ và $g(x) = x^2$ trên $[a, b]$ thì tồn tại $\beta \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f'(\beta)}{g'(\beta)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \text{ hay } \frac{f'(\beta)}{2\beta} = \frac{f(b) - f(a)}{b^2 - a^2} \text{ nên suy ra } f'(\alpha) = \frac{a+b}{2} \frac{f'(\beta)}{\beta}.$$

Dùng định lý Cauchy cho $f(x)$ và $h(x) = x^3$ trên $[a, b]$ thì tồn tại $\gamma \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f'(\gamma)}{h'(\gamma)} = \frac{f(b)-f(a)}{h(b)-h(a)} \text{ hay } \frac{f'(\gamma)}{3\gamma^2} = \frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3} \text{ nên suy ra } f'(\alpha) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \frac{f'(\gamma)}{\gamma^2}.$$

Từ đó ta thu được điều cần phải chứng minh.

+ Lấy $[a, b] \equiv [0, 1]$ ta sẽ thu được bài toán của kỳ thi OLP-2015 tại Huế.

(OLP-2015, Huế) Cho hàm số $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục. Chứng minh rằng tồn tại

$$x_1, x_2, x_3 \in (0, 1) \text{ sao cho } f'(x_3) = \frac{f'(x_1)}{4x_1} + \frac{f'(x_2)}{x_2^2}.$$

3.3. Cho hàm $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx$.

a) Chứng minh rằng tồn tại điểm $\alpha \in (0, 1)$ sao cho $\int_0^\alpha f(x) dx = 0$. Từ đó suy ra với mỗi số thực $a \in \mathbb{R}$

tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = a \int_0^c f(x) dx$.

b) Chứng minh rằng với mỗi số thực $a \in \mathbb{R}$ tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $cf(c) + a \int_0^c f(x) dx = 0$.

Lời giải:

a) Xét hàm $g(t) = t \int_0^t f(x) dx - \int_0^t xf(x) dx, t \in [0, 1]$.

$$\text{Ta có } g(0) = g(1) = 0 \text{ và } g'(t) = \int_0^t f(x) dx.$$

Theo định lý Rolle tồn tại $\alpha \in (0, 1)$ sao cho $g'(\alpha) = 0$ hay $\int_0^\alpha f(x) dx = 0$. Lại xét hàm

$$h(t) = e^{-at} \int_0^t f(x) dx, t \in [0, 1].$$

$$\text{Ta có } h(0) = h(\alpha) = 0 \text{ và } h'(t) = e^{-at} \left[f(t) - a \int_0^t f(x) dx \right].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0, \alpha) \subset (0, 1)$ sao cho $h'(c) = 0$ hay $f(c) = a \int_0^c f(x) dx$. b) Xét hàm số

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, x \in [0, 1]. \text{ Ta có } F(0) = 0 \text{ và } F'(x) = f(x) \text{ và}$$

$$F(1) = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 xF'(x) dx = xF(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 F(x) dx = F(1) - \int_0^1 F(x) dx$$

$$\text{Do đó } \int_0^1 F(x) dx = 0. (*)$$

Hàm số $F(x)$ liên tục trên $[0, 1]$. Ta nhận thấy $F(x) > 0, \forall x \in (0, 1)$ thì $\int_0^1 F(x) dx > 0$, nếu

$F(x) < 0, \forall x \in (0, 1)$ thì $\int_0^1 F(x) dx < 0$, đều trái với (*).

Do đó phải tồn tại điểm $b \in (0, 1)$ để $F(b) = 0$.

Lại xét hàm số $g(x) = x^\alpha F(x)$. Ta có $g'(x) = \alpha x^{\alpha-1} F(x) + x^\alpha f(x)$ và $g(0) = g(b) = 0$. Theo định lý

Rolle tồn tại $c \in (0, b) \subset (0, 1)$ sao cho $g'(c) = 0$. Từ đó $\alpha c^{\alpha-1} \int_0^c f(x) dx + c^\alpha f(c) = 0$ hay

$$cf(c) + a \int_0^c f(x) dx = 0.$$

+ Chọn các giá trị a thích hợp ta sẽ được các bài thi Olympic.

3.4. Cho hàm $f : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ liên tục và thoả mãn điều kiện $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx$. Chứng minh rằng

mỗi số thực $a \in \mathbf{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho $f(c) = af'(c) \int_0^c f(x) dx$.

Lời giải: Xét hàm số $g(t) = e^{-af(t)} \int_0^t f(x) dx$, $t \in [0,1]$. Theo bài 3 tồn tại $\alpha \in (0,1)$ để $\int_0^\alpha f(x) dx = 0$.

$$\text{Ta có } g(0) = g(\alpha) = 0 \text{ và } g'(t) = e^{-af(t)} \left[f(t) + a f'(t) \int_0^t f(x) dx \right].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0, \alpha) \subset (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$.

$$\text{Từ đó ta có điều phải chứng minh } f(c) = af'(c) \int_0^c f(x) dx.$$

+ Chọn a thích hợp sẽ được các bài thi Olympic. Chẳng hạn chọn $a=2018$ là bài thi OLP-2018 (bảng A) tại Quảng Bình.

3.5. Cho hàm $f : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ khả vi và thoả mãn điều kiện $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf'(x) dx = k$.

Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 6k$.

Lời giải: Xét hàm số $g(x) = 6kx - 2k$. Dễ dàng thấy $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 xg'(x) dx = k$.

Suy ra $\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx = 0$. Hàm $h(x) = f(x) - g(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và có tích phân $\int_0^1 h(x) dx = 0$

nên không thể xảy ra trường hợp $h(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ hoặc trường hợp $h(x) < 0, \forall x \in (0,1)$.

Như vậy phương trình $h(x) = 0$ phải có ít nhất một nghiệm trong $(0,1)$.

Giả sử rằng $h(x) = 0$ chỉ có một nghiệm $x = a \in (0,1)$. Xây ra hai khả năng sau:

i) Nếu $h(x) < 0, \forall x \in (0,a)$, thì $h(x) > 0, \forall x \in (a,1)$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf'(x) dx - k &= \int_0^1 xf'(x) dx - \int_0^1 xg'(x) dx = \int_0^1 x[f'(x) - g'(x)] dx \\ &= \int_0^1 xh'(x) dx = \int_0^a xh'(x) dx + \int_a^1 xh'(x) dx > \int_0^a ah'(x) dx + \int_a^1 ah'(x) dx = a \left[\int_0^a h'(x) dx + \int_a^1 h'(x) dx \right] = a \int_0^1 h'(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 xf'(x) dx > k$, mâu thuẫn với giả thiết của đầu bài!

ii) Nếu $h(x) > 0, \forall x \in (0,a)$, thì $h(x) < 0, \forall x \in (a,1)$. Khi đó

$$\begin{aligned} \int_0^1 xf'(x) dx - k &= \int_0^1 xf'(x) dx - \int_0^1 xg'(x) dx = \int_0^1 x[f'(x) - g'(x)] dx \\ &= \int_0^1 xh'(x) dx = \int_0^a xh'(x) dx + \int_a^1 xh'(x) dx < \int_0^a ah'(x) dx + \int_a^1 ah'(x) dx \\ &= a \left[\int_0^a h'(x) dx + \int_a^1 h'(x) dx \right] = a \int_0^1 h'(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 xf'(x) dx < k$, mâu thuẫn với giả thiết của đầu bài!

Như vậy phương trình $h(x) = 0$ phải có ít nhất hai nghiệm trong $(0,1)$. Giả sử rằng $h(x) = 0$ chỉ có hai nghiệm $a, b \in (0,1)$ $a < b$. Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (a,b) \subset (0,1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 6k.$$

+ Chọn k thích hợp sẽ được các bài thi Olympic. Chẳng hạn chọn k=1 là bài thi OLP-2010 tại Huế.

3.6. Cho hàm $f : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ khả tích với $\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 xf(x) dx = k$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq 4k^2.$$

Lời giải: Xét hàm số $g(x) = 6kx - 2k$. Ta có $\int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx \geq 0$. Mặt khác

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 f(x)g(x) dx + \int_0^1 [g(x)]^2 dx \\ &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 2 \int_0^1 f(x)[6kx - 2k] dx + \int_0^1 [6kx - 2k]^2 dx \\ &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 12k \int_0^1 xf(x) dx + 4k \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 (36k^2x^2 - 24k^2x + 4k^2) dx \\ &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 4k^2. \end{aligned}$$

Như vậy ta có $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq 4k^2$.

+ Chọn k thích hợp sẽ được các bài thi Olympic. Chẳng hạn chọn k=1 là bài thi OLP-2004 của Kiev.

4. Kết luận

Báo cáo này cung cấp một số dạng toán từ các kì thi học sinh giỏi toán quốc gia, Olympic Toán các trường đại học và Olympic toán sinh viên toàn quốc những năm gần đây. Để giải quyết các dạng toán này cần đến các kiến thức bổ trợ: sự liên tục, đạo hàm, tích phân, đơn ánh, toàn ánh và song ánh,... Hy vọng nội dung của báo cáo sẽ giúp các thầy, cô giáo cùng với các bạn sinh viên đang giảng dạy và học tập có thêm nguồn tài liệu hữu ích, bổ sung thêm phương pháp mới để tiếp cận vấn đề, nhằm nâng cao khả năng tiếp thu bài giảng hướng tới đạt thành tích cao trong các kì thi.

Tài liệu tham khảo

- Hội Toán học Việt Nam. *Tuyển tập và Kỹ yếu thi Olympic Toán sinh viên từ năm 1993 đến nay*.
 Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm Thế Long, Nguyễn Minh Tuấn, 2006. *Tuyển tập Olympic Toán sinh viên toàn quốc 1993 - 2005*. Hà Nội.
 Vũ Tiến Việt, 2017. *Tài liệu ôn tập Olympic Toán sinh viên*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.
 Vũ Tiến Việt (chủ biên), Phan Thế Hải, 2021. *Một số chuyên đề ôn tập thi Olympic Toán sinh viên - Phần 2. Giải tích*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

ABSTRACT

A way to compose Calculus problems for National Student Mathematics Olympiad

Pham Tuan Cuong
 Hanoi University of Mining and Geology

Student Calculus Math Olympiad is an annual academic competition organized by the Vietnam Mathematical Association and the Ministry of Education and Training for students who love math throughout the country. The contest makes an important contribution to promoting the movement of teaching and learning mathematics in universities and colleges. However, it is not easy for students of non-math schools to be able to access the exercises in the Olympic exam without the teaching analysis of instructors with practical experience in team training recruitment. In this paper, we present a way to compose Calculus problems in the national math Olympiads to help students not only grasp the solution method but also help them practice logical thinking and Creative thinking in general

Keywords: Calculus problem, Derivative, Differential, Integral.

Tính toán dao động của ô tô có chứa đạo hàm cấp ba sử dụng phương pháp Newmark

Bùi Thị Thúy*

* Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Dao động của ô tô sinh ra trong quá trình chuyển động ảnh hưởng đến đường, bản thân xe và người ngồi trên xe. Báo cáo nghiên cứu phương trình vi phân dao động có chứa đạo hàm cấp ba của ô tô sử dụng phương pháp Newmark (Newmark, 1959). Trong báo cáo, phương trình vi phân dao động được thiết lập và nghiệm số được xác định. Sau đó, khảo sát dao động của ô tô dưới tác động của lực kích động điều hòa.

Từ khóa: đạo hàm cấp ba; dao động ô tô; phương pháp Newmark

1. Mở đầu

Ô tô là một trong các phương tiện vận tải có vai trò rất quan trọng trong tất cả các lĩnh vực kinh tế và đời sống. Dao động ô tô không những ảnh hưởng tới con người (lái xe và hành khách), hàng hóa chuyên chở, độ bền, độ an toàn chuyển động của ô tô mà còn ảnh hưởng đến tuổi thọ của đường. Đặc biệt trong quá trình chuyển động, khi ô tô dao động làm phát sinh tải trọng động rất lớn tác động lên hệ thống khung vỏ của ô tô, các chi tiết, cơ cấu tổng thành... ảnh hưởng đến độ bền và tuổi thọ của chúng (Hồ Quốc Khánh, 2019; M. Géradin and D. Rixen, 1994; Nguyễn Văn Khang, 2023). Do đó, việc nghiên cứu dao động của ô tô là cần thiết và hữu ích. Một trong những công việc quan trọng của nghiên cứu dao động ô tô là thiết lập và giải phương trình vi phân để xác định các thông số dao động.

Báo cáo gồm 5 phần. Phần 2 trình bày phương pháp Newmark cho phương trình vi phân cấp ba. Dựa trên định luật II Newton và phương pháp Newmark, phương trình vi phân chuyển động của ô tô được thiết lập và nghiệm số được xác định trong phần 3. Phần 4 trình bày ví dụ số và đồ thị dao động của ô tô dưới tác động của lực kích động điều hòa. Phần 5 bao gồm các kết luận chính của báo cáo.

2. Phương pháp Newmark giải phương trình vi phân cấp 3

Ta xây dựng phương pháp giải hệ phương trình vi phân cấp ba dựa trên phương pháp Newmark đã có giải hệ phương trình vi phân cấp hai (N.M. Newmark, 1959; Bùi Thị Thúy, 2017; Đinh Văn Phong, 2006). Trong đó véc tơ trạng thái của hệ ở thời điểm $t_{n+1} = t_n + h$ được suy ra từ véc tơ trạng thái đã biết ở thời điểm t_n qua các khai triển Taylor của dịch chuyển, vận tốc và gia tốc.

Sử dụng khai triển Taylor đối với độ dịch chuyển, vận tốc và gia tốc tại thời điểm t_{n+1} ta có các công thức:

$$\ddot{x}_{n+1} = \ddot{x}_n + (1 - \alpha)h\ddot{\ddot{x}}_n + \alpha h\ddot{\ddot{x}}_{n+1} \quad (1)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + h\ddot{x}_n + \left(\frac{1}{2} - \gamma\right)h^2\ddot{\ddot{x}}_n + \gamma h^2\ddot{\ddot{x}}_{n+1} \quad (2)$$

$$x_{n+1} = x_n + h\dot{x}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{x}_n + \left(\frac{1}{6} - \beta\right)h^3\ddot{\ddot{x}}_n + \beta h^3\ddot{\ddot{x}}_{n+1} \quad (3)$$

Với α, β, γ là các tham số liên quan đến sơ đồ cầu phương.

Giả sử ta có phương trình dao động tuyến tính của vật có dạng

$$a_1\ddot{\ddot{x}} + a_2\ddot{x} + a_3\dot{x} + a_4x = f(t)$$

Trong đó a_1, a_2, a_3, a_4 là các hằng số. Áp dụng các công thức (1-3) vào phương trình trên tại thời

* Tác giả liên hệ

Email: buithithuy@humg.edu.vn

điểm t_{n+1} ta tính được \ddot{x}_{n+1}

$$\begin{aligned} \left[a_1 + \alpha h a_2 + \gamma h^2 a_3 + \beta h^3 a_4 \right] \ddot{x}_{n+1} = f_{n+1} - a_2 \left[\ddot{x}_n + (1-\alpha) h \ddot{x}_n \right] - a_3 \left[\dot{x}_n + h \ddot{x}_n + \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) h^2 \ddot{x}_n \right] \\ - a_4 \left[x_n + h \dot{x}_n + \frac{h^2}{2} \ddot{x}_n + \left(\frac{1}{6} - \beta \right) h^3 \ddot{x}_n \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Giải phương trình (4) ta được \ddot{x}_{n+1} . Sử dụng các công thức Newmark (1) - (3) ta nhận được giá trị của gia tốc, vận tốc và độ dịch chuyển \ddot{x}_{n+1} , \dot{x}_{n+1} và x_{n+1} .

Xác định điều kiện ban đầu của $\ddot{x}(t_0)$ từ điều kiện ban đầu của $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$ và $\ddot{x}(t_0)$ đã cho:

$$\ddot{x}(t_0) = \frac{1}{a_1} \left[f(t_0) - a_2 \ddot{x}(t_0) - a_3 \dot{x}(t_0) - a_4 x(t_0) \right] \quad (5)$$

3. Tính toán dao động của ô tô có chứa đạo hàm cấp ba sử dụng phương pháp Newmark

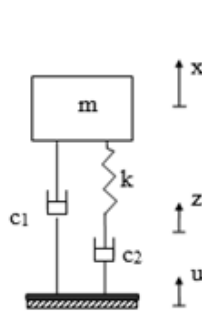
3.1. Thiết lập phương trình vi phân dao động của ô tô

Gọi x và u là dịch chuyển của vật và bánh xe. Giả thiết độ cứng của lò xo có thể được biểu diễn bằng một lò xo tương đương với độ cứng k với độ dịch chuyển được ký hiệu là z .

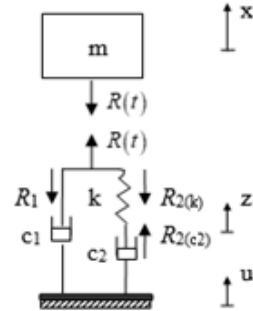
Ta có định luật 2 Newton:

$$m\ddot{x} = -R(t), \quad (6)$$

Trong đó m là khối lượng của vật, $x(t)$ là độ dịch chuyển, $R(t)$ là nội lực sinh ra bên trong vật thể đàn nhót.



Hình 1. Mô hình ô tô cấp nguyên.



Hình 2. Phân tích lực.

Giá trị lực $R(t)$ bằng tổng giá trị lực R_1 tác dụng lên giảm chấn c_1 và lực R_2 tác dụng lên lò xo k hay giảm chấn c_2 :

$$R(t) = R_1 + R_2, \quad (7)$$

$$R_2 = R_{2(k)} = R_{2(c_2)}, \quad (8)$$

Trong đó:

$$R_1 = c_1 (\dot{x} - \dot{u}), \quad R_{2(k)} = k(x - z), \quad R_{2(c)} = c_2 (\dot{z} - \dot{u}), \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R(t) = R_1 + R_2 = R_1 + R_{2(k)} \\ = c_1 (\dot{x} - \dot{u}) + k(x - z), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{Từ phương trình (8) và (9) ta có: } k(x - z) = c_2 (\dot{z} - \dot{u}) \quad (11)$$

Thay (10) vào (1) ta có phương trình chuyển động:

$$m\ddot{x} = -c_1 (\dot{x} - \dot{u}) - k(x - z), \quad (12)$$

Rút z từ phương trình trên:

$$z = \frac{m\ddot{x} + c_1 (\dot{x} - \dot{u})}{k} + x = \frac{m\ddot{x} + c_1 \dot{x} + kx - c_1 \dot{u}}{k}, \quad (13)$$

Từ phương trình (13) và (11) ta được phương trình vi phân:

$$\begin{aligned}
k(x-z) &= c_2(\dot{z}-\dot{u}), \\
\Leftrightarrow -m\ddot{x} - c_1\dot{x} + c_1\dot{u} &= c_2\left(\frac{m\ddot{x} + c_1\ddot{x} + k\dot{x} - c_1\ddot{u}}{k}\right) - c_2\dot{u}, \\
\Leftrightarrow \frac{c_2}{k}m\ddot{x} + m\ddot{x} + \frac{c_1c_2}{k}\ddot{x} + (c_1 + c_2)\dot{x} &= \frac{c_1c_2}{k}\ddot{u} + (c_1 + c_2)\dot{u}, \\
\Leftrightarrow \ddot{x} + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\ddot{x} + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2}\dot{x} &= \frac{c_1}{m}\ddot{u} + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2}\dot{u}.
\end{aligned} \tag{14}$$

3.2. Phương pháp Newmark giải phương trình vi phân dao động

Ta có phương trình vi phân dao động cấp nguyên của ô tô:

$$\ddot{x} + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\ddot{x} + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2}\dot{x} = \frac{c_1}{m}\ddot{u} + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2}\dot{u}. \tag{15}$$

Áp dụng phương pháp Newmark đối với phương trình vi phân cấp 3 ở phần 2, ta giải phương trình vi phân dao động trên.

Tại thời điểm t_n phương trình chuyển động của hệ có dạng:

$$\ddot{x}(t_n) + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\ddot{x}(t_n) + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2}\dot{x}(t_n) = \frac{c_1}{m}\ddot{u}(t_n) + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2}\dot{u}(t_n). \tag{16}$$

Với $x(t_n)$, $\dot{x}(t_n)$ và $\ddot{x}(t_n)$ lần lượt là độ dịch chuyển, vận tốc và gia tốc tại thời điểm t_n .

Từ phương trình (1), (2) và (3), ta có các xấp xỉ Newmark của \dot{x}_n , \ddot{x}_n , \ddot{x}_n như sau:

$$\dot{x}_n = \frac{\gamma}{\beta h}(x_n - x_{n-1}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)h\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{6\beta}\right)h^2\ddot{x}_{n-1}, \tag{17}$$

$$\ddot{x}_n = \frac{\alpha}{\beta h^2}(x_n - x_{n-1}) - \frac{\alpha}{\beta h}\dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\ddot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{6\beta}\right)h\ddot{x}_{n-1}, \tag{18}$$

$$\ddot{x}_n = \frac{1}{\beta h^3}(x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{\beta h^2}\dot{x}_{n-1} - \frac{1}{2\beta h}\ddot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{6\beta} - 1\right)\ddot{x}_{n-1}, \tag{19}$$

Thay các phương trình (11), (12), (13) vào phương trình (10):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta h^3}(x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{\beta h^2}\dot{x}_{n-1} - \frac{1}{2\beta h}\ddot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{6\beta} - 1\right)\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\left[\frac{\alpha}{\beta h^2}(x_n - x_{n-1}) - \frac{\alpha}{\beta h}\dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\ddot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{6\beta}\right)h\ddot{x}_{n-1}\right] \\
&+ \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2}\left[\frac{\gamma}{\beta h}(x_n - x_{n-1}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)h\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{6\beta}\right)h^2\ddot{x}_{n-1}\right] \\
&= \frac{c_1}{m}\ddot{u}(t_n) + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2}\dot{u}(t_n)
\end{aligned} \tag{20}$$

Ta tính toán vế trái của phương trình (20):

$$\begin{aligned}
VT_{(20)} &= \left[\frac{1}{\beta h^3} + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\frac{\alpha}{\beta h^2} + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2}\frac{\gamma}{\beta h}\right]x_n - \left[\frac{1}{\beta h^3}x_{n-1} + \frac{1}{\beta h^2}\dot{x}_{n-1} + \frac{1}{2\beta h}\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{1}{6\beta} - 1\right)\ddot{x}_{n-1}\right] \\
&- \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m}\right)\left[\frac{\alpha}{\beta h^2}x_{n-1} + \frac{\alpha}{\beta h}\dot{x}_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{6\beta} - 1\right)h\ddot{x}_{n-1}\right] \\
&- \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2}\left[\frac{\gamma}{\beta h}x_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\dot{x}_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)h\ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{6\beta} - \frac{1}{2}\right)h^2\ddot{x}_{n-1}\right],
\end{aligned} \tag{21}$$

Giả sử kích động mặt đường u được biểu diễn bởi hàm điều hòa

$$u = U \sin(\omega t + \varphi) \tag{22}$$

Với U, ω, φ là các hằng số.

Ta có đạo hàm cấp 1, cấp 2 của u

$$\dot{u} = U \omega \cos(\omega t + \varphi), \quad (23)$$

$$\ddot{u} = -U \omega^2 \sin(\omega t + \varphi), \quad (24)$$

Thay (23), (24) và (21) vào phương trình (20) ta được:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\beta h^3} + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m} \right) \frac{\alpha}{\beta h^2} + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2} \frac{\gamma}{\beta h} \right] x_n \\ &= -\frac{c_1}{m} U \omega^2 \sin(\omega t_n + \varphi) + \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2} U \omega \cos(\omega t_n + \varphi) + \left[\frac{1}{\beta h^3} x_{n-1} + \frac{1}{\beta h^2} \dot{x}_{n-1} + \frac{1}{2\beta h} \ddot{x}_{n-1} \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{6\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \right] + \left(\frac{k}{c_2} + \frac{c_1}{m} \right) \left[\frac{\alpha}{\beta h^2} x_{n-1} + \frac{\alpha}{\beta h} \dot{x}_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{6\beta} - 1 \right) h \ddot{x}_{n-1} \right] \\ &+ \frac{k(c_1 + c_2)}{mc_2} \left[\frac{\gamma}{\beta h} x_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{x}_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) h \ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{\gamma}{6\beta} - \frac{1}{2} \right) h^2 \ddot{x}_{n-1} \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Như vậy ta đã tìm được nghiệm số x_n của phương trình vi phân dao động (16) theo các giá trị của $x_{n-1}, \dot{x}_{n-1}, \ddot{x}_{n-1}$ với $\dot{x}_{n-1}, \ddot{x}_{n-1}$ và \ddot{x}_{n-1} được tính như sau:

$$\begin{cases} \ddot{x}_n = \frac{1}{\beta h^3} (x_n - x_{n-1}) - \frac{1}{\beta h^2} \dot{x}_{n-1} - \frac{1}{2\beta h} \ddot{x}_{n-1} - \left(\frac{1}{6\beta} - 1 \right) \ddot{x}_{n-1} \\ \ddot{x}_n = \ddot{x}_{n-1} + (1 - \alpha) h \ddot{x}_{n-1} + \alpha h \ddot{x}_n \\ \dot{x}_n = \dot{x}_{n-1} + h \ddot{x}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \gamma \right) h^2 \ddot{x}_{n-1} + \gamma h^2 \ddot{x}_n \end{cases} \quad (26)$$

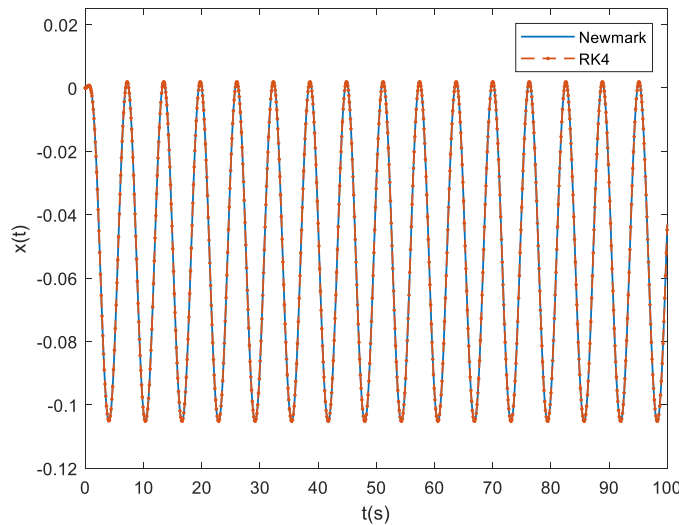
Giả thiết rằng điều kiện ban đầu của các công thức trên $x(0), \dot{x}(0)$ và $\ddot{x}(0)$ đã cho.

4. Ví dụ số

Lấy các số liệu $m = 5000 \text{ kg}, k = 10000 \text{ N/m}, c_1 = 8000 \text{ Ns/m}, c_2 = 10000 \text{ Ns/m}$ với $h = 0.01, \alpha = 1/2, \gamma = 1/4, \beta = 1/12$. Trong trường hợp $u = 0.05 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, phương trình vi phân dao động có dạng:

$$\ddot{x} + 2.6\ddot{x} + 3.6\dot{x} = -0.08 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right) + 0.18 \cos\left(t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (27)$$

Với các điều kiện đầu $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \ddot{x}(0) = 0.01 \Rightarrow \ddot{x}(0) = -0.0053$, đồ thị biên độ dao động được biểu diễn trong Hình 3.



Hình 3. Đồ thị biên độ dao động của ô tô.

5. Kết luận

Trong báo cáo này, tác giả đã nghiên cứu xây dựng chương trình tính toán số dựa trên phương pháp Newmark giải hệ phương trình vi phân cấp hai, tìm nghiệm của phương trình vi phân có chứa đạo hàm cấp ba. Sau đó sử dụng chương trình thiết lập được để tính toán dao động của ô tô. Kết quả thu được là đồ thị mô tả biên độ dao động của ô tô trên mặt đường mấp mô có dạng một hàm điều hòa.

Báo cáo cũng so sánh kết quả tính toán bằng phương pháp Newmark và phương pháp Runge-Kutta. Trong ví dụ, có sự thống nhất giữa các kết quả bằng phương pháp Newmark và phương pháp Runge-Kutta. Thuật toán tích phân số Newmark một bước được trình bày cho các hệ cấp ba là hiệu quả và phù hợp. Theo thuật toán này, một chương trình máy tính được phát triển bằng phần mềm Matlab.

Tài liệu tham khảo

- Bùi Thị Thuý, 2017. *Dao động phi tuyến yếu của hệ cấp ba có đạo hàm cấp phân số*. Luận án tiến sĩ cơ học, Học viện Khoa học và Công nghệ, Viện Hàn Lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam.
- Đinh Văn Phong, 2006. *Phương pháp số trong cơ học*. NXB Khoa học và kỹ thuật Hà Nội.
- Hồ Quốc Khánh, 2019. *Nghiên cứu ứng dụng logic mờ trong điều khiển hệ thống treo cho ô tô*. Luận văn thạc sĩ, Trường Đại học Sư phạm kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh.
- M. J. G. G. Geradin, D. Rixen, 1994. *Mechanical Vibrations*. Wiley, Chichester.
- Nguyễn Văn Khang, 2023. *Dao động kỹ thuật*. NXB Bách Khoa Hà Nội.
- N.M. Newmark, 1959. A Method of Computation for structural Dynamics. *ASCE Journal of Engineering Mechanics Division*, Vol. 85, pp 67 – 94.

ABSTRACT

Calculating the vibration of a car containing the third derivative using the Newmark method

Bui Thi Thuy

Hanoi University of Mining and Geology

The car's vibrations generated during movement affect the road, the car itself and the people sitting in the car. In this paper, the vibrational differential equation containing the third order derivative of a car is researched by the Newmark method. The vibrational differential equation is established and the numerical solution is determined. Then, investigate the car's vibrations under the influence of harmonic excitation force.

Keywords: third order derivative; car vibration; Newmark method.

Mô phỏng động lực học robot song song Hexel

Trần Thị Trâm*

* Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Công nghệ Robot cơ cấu song song tạo cho các máy có thể thực hiện được các thao tác phức tạp, tự thích ứng giống như của con người một cách hoàn thiện. Tác giả đã bước đầu thực hiện mô phỏng động lực học Robot cơ cấu song song với việc: Giải bài toán ngược động lực học theo quỹ đạo chuyển động x cho trước của Robot trong không gian, xác định tọa độ suy rộng q . Với q đã biết, giải bài toán động lực học Robot, để tính lực suy rộng Q , từ đó xác định các thông số động cơ cần thiết cho việc điều khiển Robot. Một số Robot cơ cấu song song được mô phỏng với các thông số động học (kích thước, khối lượng,...) đã thông số hoá. Do đó, có thể thay đổi số liệu đầu vào một cách dễ dàng trong việc mô phỏng động lực học Robot với các công việc khác nhau. Công cụ dùng để mô phỏng là phần mềm alaska, kết quả tính toán là thông số cần thiết cho việc thiết kế và điều khiển Robot.

Từ khóa: Robot song song; Hexel; Mô phỏng động lực học.

1. Đặt vấn đề

1.1. Tình hình nghiên cứu robot trên thế giới

Việc nghiên cứu và ứng dụng Robot truyền thống (cơ cấu chuỗi) vào các ngành công nghiệp tại các nước công nghiệp tiên tiến đã được triển khai mạnh mẽ từ những năm 1980 và đã hình thành nền công nghiệp với một số công ty hàng đầu (FanucRobotics, Kuka, Motoman, Kawasaki Robotics,...) chuyên chế tạo hàng loạt các Robot công nghiệp. Việc sử dụng Rôbốt ngày càng phổ biến trong các dây chuyền tự động như sơn, hàn,... Robot trở thành mặt hàng thương phẩm. Các ứng dụng Robot đang có ngày càng lớn.

Trong các thập niên gần đây, sự chú ý tới việc ứng dụng của Robot cơ cấu song song đã được khởi động bởi Steward vào năm 1965, ông là người cho ra mắt một buồng mô phỏng tập lái máy bay dựa trên cơ cấu song song. Hiện nay cơ cấu song song được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực.



Hình 1. Hexel Tornado 2000.

* Tác giả liên hệ

Email: tranthitram@hmg.edu.vn

1.2. Tình hình nghiên cứu robot ở Việt Nam

Ở Việt Nam việc áp dụng Robot còn ít, tuy nhiên đã có một số sản phẩm Robot đã được nghiên cứu và chế tạo mẫu như:

- Robot công nghiệp cho việc cấp phối;
- Robot cấp than cho máy nghiền;
- Robot đóng chai dùng trong công nghiệp sản xuất dược phẩm, thuốc trừ sâu;
- Robot 6 bậc tự do dùng trong công nghệ bảo vệ bề mặt;
- Robot mini 4 bậc tự do dùng trong dân dụng, học tập và lắp ráp nhỏ.

Các sản phẩm này đã đưa vào ứng dụng nhưng vẫn là tình trạng đơn chiếc nên giá thành trên mỗi sản phẩm chưa thật cạnh tranh. Tại một số công ty liên doanh đã có Robot trong một số dây chuyền sản xuất hiện đại như việc lắp ráp, sản xuất xe máy, ô tô,... như hệ thống hàn tại Công ty Honda Việt Nam.

Một trong những nguyên nhân chính cho việc ít áp dụng kỹ thuật Robot ở Việt Nam là giá thành của robot nhập ngoại rất cao, trong khi giá thuê công nhân Việt Nam còn rất rẻ.

Tại Việt Nam có thể ứng dụng Robot song song trong một số lĩnh vực:

- Ngành Vật lý: Giá đỡ kính hiển vi, giá đỡ thiết bị đo chính xác,...
- Ngành Cơ khí: máy gia công cơ khí chính xác, máy công cụ,...
- Ngành Bưu chính viễn thông: Giá đỡ ăngten vệ tinh địa tĩnh,...
- Ngành chế tạo Ô tô: Hệ thống thử tải lốp ô tô, buồng tập lái ô tô,...
- Ngành quân sự: Robot cơ cấu song song được dùng làm bệ đỡ ổn định được đặt trên tàu thủy, các công trình thủy, trên xe, trên máy bay, trên chiến xa và tàu ngầm,... để giữ cân bằng cho ăngten, camera theo dõi mục tiêu, cho rada, cho các thiết bị đo laser, bệ ổn định cho pháo và tên lửa, buồng tập lái máy bay, xe tăng, tàu chiến.

1.3. Ưu nhược điểm của Robot song song

- Ưu điểm:

Công nghệ Robot cơ cấu song song tạo cho các máy có thể thực hiện được các thao tác phức tạp, tự thích ứng giống như của con người một cách hoàn thiện. Thêm vào đó các cơ cấu song song không trực giao có nhiều chức năng hữu dụng trong các công việc sản xuất hiện đại.

Các Robot cơ cấu song song có nhiều ưu điểm như: có độ cứng cao, khối lượng nhỏ, gia tốc làm việc lớn hơn so với các Robot truyền thống hiện nay.

+ Khả năng về kích thước: Các cơ cấu song song có thể thiết kế ở các kích thước khác nhau. Tầm hoạt động của chúng rất rộng từ việc lắp ráp các chi tiết cực nhỏ hoặc sử dụng trong phẫu thuật tới các chuyển động 6 bậc tự do thực hiện các chức năng như: nghiền, cán, khoan, tiện, hàn, kiểm tra, lắp ráp ...

+ Tốc độ: Với việc giảm nhỏ khối lượng của các phần tham gia chuyển động làm cho Robot cơ cấu song song có thể đạt được gia tốc lớn và tốc độ làm việc lên tới 1 m/giây.

+ Giá thành: Giá thành của các Robot cơ cấu song song ứng dụng trong gia công cơ khí ít hơn so với các máy CNC có tính năng tương đương. Thêm vào đó Robot được lắp ráp dễ dàng và đơn giản, vì kích thước của các Robot cơ cấu song song rất dễ phù hợp với không gian làm việc thật sự.

+ Độ cứng: Các Robot cơ cấu song song luôn có độ cứng cao vì kết cấu hình học của chúng.

+ Khả năng về lắp đặt: Các Robot cơ cấu song song làm việc không cần bệ đỡ và có thể di chuyển tới mọi nơi trong môi trường sản xuất. Chúng có thể làm việc ngay cả khi trên thuyền và treo trên trần, tường,...

- Điểm yếu của Robot cơ cấu song song:

So với các Robot cơ cấu dạng chuỗi, các Robot cơ cấu song song có một vài yếu điểm, các điểm yếu này cần phải phân tích trước và cần được lưu ý khi thiết kế Robot cơ cấu song song:

+ Có thể tồn tại một số điểm kỳ dị (điểm chết) trong không gian làm việc của Robot cơ cấu song song làm cho Robot không hoạt động được.

+ Không gian làm việc bị giới hạn hơn so với các Robot dạng chuỗi.

+ Công suất tính toán của máy tính cần được nâng lên để điều khiển Robot cơ cấu song song.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Bài toán và cơ sở lý thuyết

2.1.1. Bài toán đặt ra

- Giải bài toán ngược động học theo quỹ đạo chuyển động thực của robot trong không gian.
- Giải bài toán động lực học robot từ đó xác định lực suy rộng để tính toán các thông số động cơ cho việc điều khiển.

- Mô phỏng chuyển động của Robot theo quỹ đạo cho trước.

2.1.2. *Cơ sở lý thuyết về động lực học Robot* (Vũ Liêm Chính, Phan Nguyên Di, Nguyễn Văn Khang, 2001)

Bài toán thuận động học.

Phương trình động học của Robot:

$$x = f(q) \quad (1)$$

Trong đó: x - quỹ đạo chuyển động của Robot trong không gian; q - tọa độ suy rộng của Robot.

Từ quỹ đạo chuyển động cho trước của Robot ta có hàm:

$$q = f^{-1}(x) \quad (2)$$

Từ phương trình (2) biết x sẽ xác định được dịch chuyển q , vận tốc \dot{q} , gia tốc \ddot{q} .

Bài toán động lực học Robot.

Bài toán động lực học Robot được mô tả theo phương trình Lagrange loại II:

$$g_{ab}\ddot{q}^b + \Gamma_{abc}\dot{q}^b\dot{q}^c = Q_a \quad (3)$$

Trong đó: q - Tọa độ suy rộng; Q_a - Lực suy rộng; g_{ab} - Ma trận khối lượng suy rộng; Γ_{abc} - Các lực Coriolis và lực ly tâm suy rộng.

Từ bài toán động học theo phương trình (2) ta tìm được \dot{q} , \ddot{q} thế vào phương trình (3) sẽ xác định được Q_a .

Từ giá trị Q_a tìm được để tính các thông số động cơ (chế độ điều khiển) cho robot.

2.1.3. *Chương trình mô phỏng động lực học hệ nhiều vật Alaska*

Alaska là phần mềm chuyên dùng để mô phỏng động lực học cơ hệ nhiều vật (Multibody System) MBS.

2.1.4. *Các kiểu bài toán giải được trong Alaska* (Nguyễn Phùng Quang, 2007)

Chuyển động hệ nhiều vật được mô tả bằng các phương trình chuyển động phi tuyến. Trong một số trường hợp, để giải được bài toán động lực học chỉ cần tuyến tính hoá phương trình chuyển động là đủ. Điều đó có nghĩa là chỉ xét đến những dao động nhỏ quanh vị trí cân bằng tĩnh. Alaska cung cấp cả hai kiểu tính toán tuyến tính và phi tuyến.

2.1.5. *Các phân tích phi tuyến* (Ahmed A. Shabana, 2020)

- Tạo ra các phương trình chuyển động phi tuyến.

- Giải các phương trình chuyển động phi tuyến theo tích phân số.

Giải bài toán động lực học ngược. Tức là tính toán các lực và mômen liên kết cần thiết để thực hiện chuyển động cho trước của MBS.

Tính vị trí cân bằng của hệ nhiều vật.

Giải bài toán điều kiện đầu động học.

Thực hiện các phân tích động lực học và động học cho hệ không bậc tự do.

Tính toán và đưa ra các kết quả theo yêu cầu của người dùng để nghiên cứu chuyển động của hệ thống, chẳng hạn như các lực liên kết, lực tác động lên lò xo và các phần tử giảm chấn, các tọa độ, vận tốc, gia tốc của các điểm, phép quay các hệ tọa độ, vận tốc góc.

Thực hiện phân tích tần số và tính các thông số thống kê của bất kỳ một kết quả nào được tính toán theo miền thời gian

2.1.6. *Các phân tích tuyến tính* (Lung-wen Tsai, 1999)

- Tạo ra các phương trình được tuyến tính hoá dạng số mô tả các chuyển động nhỏ quanh vị trí cân bằng tĩnh.

- Thực hiện phân tích giá trị riêng các phương trình tuyến tính hoá để xác định các tần số và dao động tự nhiên của MBS.

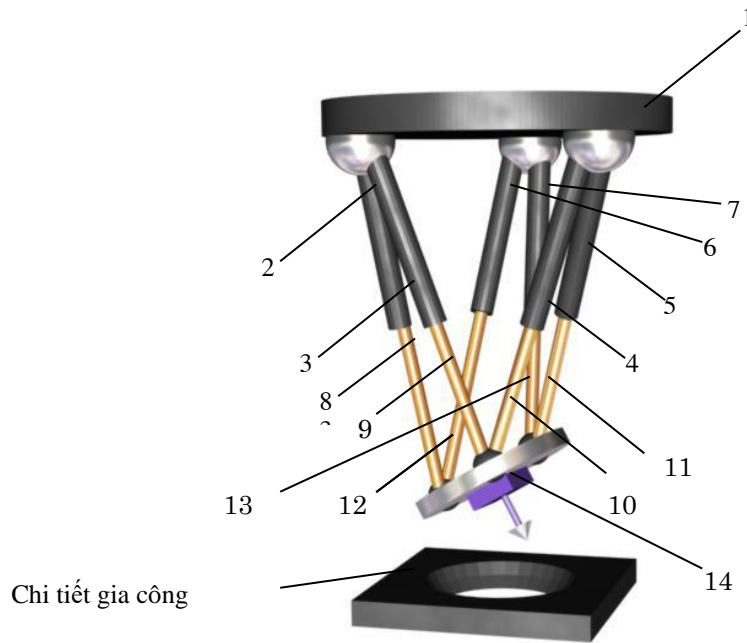
- Giải các phương trình tuyến tính hoá theo thời gian đối với các kích động ban đầu được cho trước.

2.2. *Tính toán và mô phỏng động lực học robot song song Hexel*

Xây dựng mô hình và tính toán cho một cấu trúc robot song song Hexel ứng dụng trong việc gia công khuôn mẫu, với các thông số thực tế và công cụ sử dụng để tính toán là phần mềm Alaska.

Xây dựng mô hình.

Các vật 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 ta lấy kích thước chiều dài bằng 50 cm.

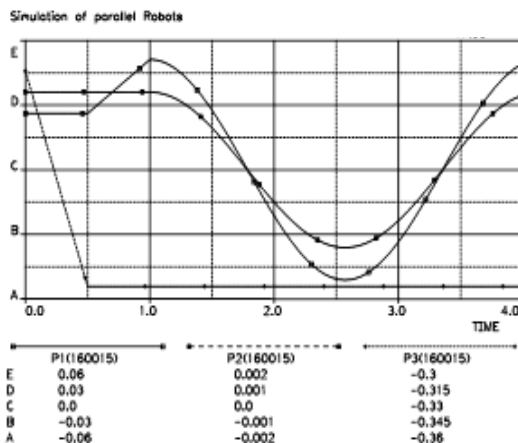


Hình 2. Mô hình robot song song Hexel.

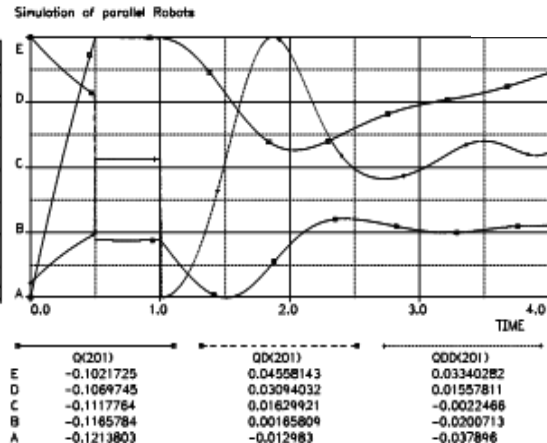
- Vật 1: giá đỡ, được gắn chặt hoặc trượt so với nền cố định.
- Vật 2, 3, 4, 5, 6, 7: Liên kết với giá bằng các khớp cầu.
- Vật 8, 9, 10, 11, 12, 13: Liên kết với các vật 2, 3, 4, 5, 6, 7 bằng khớp trượt.
- Vật 14: Chuyển động 6 bậc tự do so với giá đỡ, liên kết với các vật 8, 9, 10, 11, 12, 13 bằng khớp không liên kết. Khi gia công bàn dao được gắn trên vật, và điều khiển quỹ đạo sao cho gia công được chi tiết yêu cầu.

Các thông số về khối lượng, kích thước hình học đã được thông số hoá và dễ dàng có thể thay đổi cho phù hợp với mỗi loại cấu trúc, công việc khác nhau.

Quỹ đạo chuyển động: Ở phần này tôi mô phỏng chuyển động của robot trong không gian, quỹ đạo điển hình là việc gia công một phần của chi tiết khuôn mẫu (Hình 2).



Hình 3. Quỹ đạo chuyển động của vật 14.



Hình 4. Dịch chuyển, vận tốc và gia tốc của vật 2 theo trục 1.

3. Kết quả và thảo luận

Dựa trên mô hình động học Robot song song Hexel xây dựng mô hình và mô phỏng bằng chương trình Alaska. Với một quỹ đạo chuyển động giả định trong không gian của Robot, đi giải bài toán cụ thể:

- Giải bài toán ngược động học xác định dịch chuyển, vận tốc, gia tốc của các khớp.

- Giải bài toán động lực học xác định được mô men quay cần thiết tại khớp, là những thông số cần thiết cho việc điều khiển động cơ.

4. Kết luận

Bài báo đã trình bày cơ sở lý thuyết cho bài toán động lực học robot song song. Xây dựng mô hình và mô phỏng bằng chương trình Alaska cho robot song song Hexel.

Từ mô hình Robot, trong chương Alaska đã thông số hoá các dữ liệu (kích thước, khối lượng,...) do đó dễ dàng thay đổi thông số của robot ứng với mỗi trường hợp cụ thể trong quá trình tính toán, thiết kế.

Tài liệu tham khảo

- Ahmed A. Shabana, 2020. *Dynamics of MultiBody Systems*. University of Illinois at Chicago.
- Lung-wen Tsai, 1999. *Robot analysis- The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators*. Department of Mechanical Engineering and Institute for System Research University of Maryland.
- Nguyễn Phùng Quang, 2007. Nghiên cứu, thiết kế và chế tạo bộ phát điện bằng sức gió có công suất 10-30kW phù hợp với điều kiện Việt Nam. *Báo cáo tổng kết đề tài cấp nhà nước*. Mã số KC 06.20CN.
- Vũ Liêm Chính, Phan Nguyên Di, Nguyễn Văn Khang, 2001. *Giáo trình Động lực học máy*. NXB KHKT Hà Nội.

ABSTRACT

Robot dynamics simulation parallel Hexel

Tran Thi Tram

Hanoi University of Mining and Geology

Parallel structure robot technology enables machines to perform complex, self-adaptive operations perfectly like those of humans. Dynamic simulation of the parallel Robot is realized by author about: Solving the inverse kinetic problem with given motion trajectory x of Robots in working space to determine generalized coordinates q . Using the computed q to solve the problem of dynamic of Robots and find out generalized forces Q for computing the necessary parameters of the driving motors of Robots. Some models of the parallel Robot (Hexapod, hexaglide,...) was modeled with kinematic parameters(dimensions, mass, etc) which was parameterized. Hence, the input datas can be changed easily for the modelling of Robots in different tasks. Program alaska was used to computation and simulation. The computed results will be the parameters for design and control of Robots.

Keywords: Parallel robot; Hexel; Dynamic simulation.

Ước lượng xác suất đuôi cho một lớp biến ngẫu nhiên khả vi Malliavin

Nguyễn Thu Hằng*
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Trong báo cáo này, chúng tôi giới thiệu lại một phương pháp ước lượng xác suất đuôi cho biến ngẫu nhiên sử dụng công cụ của giải tích Malliavin và Bổ đề 2.2 (N.T. Dung, 2018). Sau đó, chúng tôi áp dụng để tìm ước lượng xác suất đuôi cho một lớp biến ngẫu nhiên là nghiệm của phương trình vi phân ngẫu nhiên cơ bản. Cuối cùng, chúng tôi minh họa rõ ràng hơn những kết quả thu được bằng một ví dụ cụ thể.

Từ khóa: Giải tích Malliavin; phân phối xác suất đuôi; phương trình vi phân ngẫu nhiên.

1. Đặt vấn đề

Phương trình vi phân ngẫu nhiên xuất hiện từ đầu thế kỉ 20, được nhiều nhà toán học phát triển liên tục cho đến ngày nay. Phương trình vi phân ngẫu nhiên có nhiều ứng dụng trong toán học thuần túy và được sử dụng để mô hình hóa các quá trình ngẫu nhiên khác nhau như giá cổ phiếu, mô hình tăng trưởng ngẫu nhiên hoặc các hệ thống vật lý chịu biến động nhiệt,... (Bernt Øksendal, 2003).

Tuy nhiên, chúng ta thường gặp khó khăn trong việc tìm nghiệm đúng của phần lớn các phương trình vi phân ngẫu nhiên. Do đó, việc nghiên cứu tính chất nghiệm trở thành bài toán được các nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Trong đó, phân phối xác suất đuôi là một phần không thể thiếu khi nghiên cứu về biến ngẫu nhiên. Việc tính toán phân phối xác suất đuôi của các biến ngẫu nhiên đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực, chẳng hạn như trong quản lý rủi ro tài chính, bảo hiểm hay trong các bài toán về dự báo về thiên tai, thảm họa,... Các phương pháp tham số và phi tham số đã được sử dụng để ước lượng phân phối xác suất đuôi (Joanna Kołodziej and Horacio González-Vélez, 2019). Sử dụng công cụ của giải tích Malliavin cũng là một phương pháp hữu hiệu trong nghiên cứu luật xác suất của biến ngẫu nhiên. Rất nhiều kết quả thú vị tại có thể tìm thấy của các nhà toán học trong và ngoài nước (D. Nualart, 2006; N. T. Dung, 2018; N. T. Dung và T. C. Son, 2019; N. T. Dung và nnk, 2022).

Trong báo cáo này, chúng tôi xét phương trình vi phân ngẫu nhiên cơ bản có dạng:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s, \quad (1)$$

Trong đó: các hệ số $b, \sigma: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện Lipschitz và tăng trưởng tuyến tính. Thêm nữa b, σ có các đạo hàm riêng theo biến thứ hai bị chặn và $\sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} |\sigma(t, x)| < \infty$. Với điều kiện này, bằng công cụ giải tích Malliavin và cách thức tương tự trong (N. T. Dung và T. C. Son, 2019), chúng tôi thu được ước lượng:

$$P(X_t \geq x) \leq \exp \left\{ -\frac{(x - E[X_t])^2}{2Cte^{Ct}} \right\}, \forall x > E[X_t]. \quad (2)$$

Các khái niệm cơ bản của giải tích Malliavin được trình bày tại mục 2, các kết quả chính của báo cáo cùng ví dụ minh họa cụ thể được trình bày tại mục 3.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

Giả sử $(B_t)_{t \in [0, T]}$ là chuyển động Brown xác định trên không gian xác suất đầy đủ $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, trong đó $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ là bộ lọc tự nhiên của quá trình B . Cho $h \in L^2[0, T]$, ta kí hiệu $B(h)$ là tích phân Wiener $B(h) = \int_0^T h(t)dB_t$.

Gọi \mathcal{S} là tập con trù mật của $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bao gồm những biến ngẫu nhiên có dạng:

$$F = f(B(h_1), B(h_2), \dots, B(h_n)), \quad (3)$$

Trong đó, $n \in \mathbb{N}, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), h_1, h_2, \dots, h_n \in L^2[0, T]$. Nếu F có dạng (2), ta định nghĩa đạo hàm Malliavin là quá trình $DF := D_t F, t \in [0, T]$ cho bởi:

* Tác giả liên hệ

Email: nguyenthuhangbmtan@humg.edu.vn

$$D_t F = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} (B(h_1), B(h_2), \dots, B(h_n)). \quad (4)$$

Tổng quát hơn, với mỗi $k \geq 1$, ta định nghĩa đạo hàm Malliavin cấp cao hơn bởi:

$$D_{t_1, \dots, t_k}^k F = D_{t_1} \dots D_{t_k} F. \quad (5)$$

Với mọi $1 \leq p, k < \infty$, kí hiệu $\mathbb{D}^{k,p}$ là bao đóng của \mathcal{S} đối với chuẩn:

$$\|F\|_{\{k,p\}}^p := E|F|^p + E \left[\left(\int_0^T |D_{uF}|^2 du \right)^{\frac{p}{2}} \right] + \dots + E \left[\left(\int_0^T \dots \int_0^T |D_{t_1, \dots, t_k}^k F|^2 dt_1 \dots dt_k \right)^{\frac{p}{2}} \right]. \quad (6)$$

Biến ngẫu nhiên F được gọi là khả vi Malliavin nếu nó thuộc lớp $\mathbb{D}^{1,2}$. Nếu $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ thì ta có biểu diễn Clark-Ocone sau đây:

$$F = E[F] + \int_0^\infty E[D_t F | \mathcal{F}_t] dB_t, \quad F \in \mathbb{D}^{1,2}. \quad (7)$$

Chi tiết hơn về giải tích Malliavin, chúng ta có thể xem trong (D. Nualart, 2006).

Để thu được kết quả ước lượng như trong Định lí 3.1, chúng tôi sử dụng kết quả sau đây:

Bổ đề 2.1. Cho $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ thỏa mãn $EF = 0$. Giả sử rằng tồn tại hằng số M thỏa mãn:

$$\int_0^T E[|D_r F|^2 | \mathcal{F}_r] dr \leq M^2 \quad h. k. n. \quad (8)$$

Khi đó, ta có ước lượng:

$$P(|F| \geq x) \leq 2 \exp\left(\frac{-x^2}{2M^2}\right), \quad x \geq 0. \quad (9)$$

Chứng minh cụ thể thể của Bổ đề 2.1 có thể xem Mệnh đề 3.7 trong (N.T.Dung và nnk, 2019).

3. Kết quả và thảo luận

Tiếp theo, chúng tôi sử dụng phương pháp nêu trong mục 2 để ước lượng xác suất đuôi cho nghiệm của phương trình (1). Ở đây, để phương trình tồn tại duy nhất nghiệm, chúng tôi cần giả thiết (A_1) cho các hệ số như sau: (A_1) Các hệ số b, σ thỏa mãn các điều kiện Lipschitz và tăng trưởng tuyến tính. Tức là, tồn tại các số $K, L > 0$ sao cho:

$$|b(t, x) + \sigma(t, x)| \leq K|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

Và:

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq L(1 + |x|^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T]. \quad (11)$$

Khi đó, theo Định lí 2.2.1 (D.Nualart, 2006), phương trình (1) tồn tại duy nhất nghiệm X_t khả vi Malliavin. Hơn nữa:

$$D_r X_t = \sigma(r, X_r) + \int_r^t b'(s, X_s) D_r X_s ds + \int_r^t \sigma'(s, X_s) D_r X_s dB_s, \quad (12)$$

Trong đó: kí hiệu $b'(t, x) = \frac{\partial b(t, x)}{\partial x}$ và $\sigma'(t, x) = \frac{\partial \sigma(t, x)}{\partial x}$.

Ta có định lí sau đây:

Định lí 3.1. Giả sử X_t là nghiệm của phương trình (1). Giả sử thêm rằng $\sigma(t, x)$ thỏa mãn $\|\sigma\|_\infty := \sup_{(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}} |\sigma(t, x)| < \infty$ cùng với các đạo hàm riêng $b'(t, x), \sigma'(t, x)$ bị chặn với mọi $x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]$.

Khi đó, ta có ước lượng xác suất đuôi:

$$P(|X_t| \geq x) \leq 2 \exp\left(-\frac{(x - E|X_t|)^2}{2CteCt}\right), \quad \forall x > E|X_t|. \quad (13)$$

Chứng minh.

Từ tính chất đẳng cự Ito, ta có:

$$E \left[\left(\int_r^t \sigma'(s, X_s) D_r X_s dB_s \right)^2 \middle| \mathcal{F}_r \right] = \int_r^t E(|\sigma'(s, X_s) D_r X_s|^2 | \mathcal{F}_r) ds. \quad (14)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, suy ra:

$$E(|D_r X_t|^2 | \mathcal{F}_r) \leq 3 \left(\|\sigma\|_\infty^2 + E \left(\left(\int_r^t b'(s, X_s) D_r X_s ds \right)^2 \middle| \mathcal{F}_r \right) + \int_r^t E(|\sigma'(s, X_s) D_r X_s|^2 | \mathcal{F}_r) ds \right). \quad (15)$$

Vì tính bị chặn của b' và σ' nên:

$$\begin{aligned} E(|D_r X_t|^2 | \mathcal{F}_r) &\leq 3\|\sigma\|_\infty^2 + C \int_r^t E(|D_r X_s|^2 | \mathcal{F}_r) ds + C \int_r^t E(|D_r X_s|^2 | \mathcal{F}_r) ds \\ &\leq 3\|\sigma\|_\infty^2 + C \int_r^t E(|D_r X_s|^2 | \mathcal{F}_r) ds, \quad 0 \leq r \leq t. \end{aligned} \quad (16)$$

Chú ý rằng, hằng số C ở các vị trí khác nhau có thể khác nhau. Ở đây, để đơn giản, chúng tôi dùng chung một kí hiệu, nó đại diện cho một hằng số hữu hạn, xác định.

Từ (16), áp dụng bổ đề Gronwall ta được:

$$E(|D_r X_t|^2 | \mathcal{F}_r) \leq 3\|\sigma\|_\infty^2 e^{C(t-r)} \leq C e^t, \quad 0 \leq r \leq t. \quad (17)$$

Từ đó suy ra:

$$\int_0^T E(|D_r X_t|^2 | \mathcal{F}_r) dr = \int_0^t E(|D_r X_t|^2 | \mathcal{F}_r) dr \leq C t e^t, \quad 0 \leq r \leq t \leq T. \quad (18)$$

Đặt $Y_t = X_t - E[X_t]$ ta được $E[Y_t] = 0$ và $D_r Y_t = D_r X_t$. Do đó:

$$\int_0^T E[D_r Y_t | \mathcal{F}_r]^2 \leq C t e^{Ct}. \quad (19)$$

Áp dụng Bổ đề 2.1 ta được:

$$\begin{aligned} P(|X_t| \geq x) &\leq P(|X_t - E[X_t]| \geq x - E[X_t]) = P(|Y_t| \geq x - E[X_t]) \\ &\leq 2 \exp\left(-\frac{(x - E[X_t])^2}{2 C t e^{Ct}}\right), \quad \forall x > E[X_t]. \end{aligned} \quad (20)$$

Ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3.1. Với $t \in (0, T]$, ta xét biến ngẫu nhiên:

$$X_t = \int_0^t (2 + \sin X_s) dB_s. \quad (21)$$

Trong trường hợp này, $b(t, x) = 0$ và $\sigma(t, x) = 2 + \sin x$. Do đó, $b'(t, x) = 0, \sigma'(t, x) = \cos x$ và $\|\sigma\|_\infty \leq 3$. Hơn nữa, $E[X_t] = 0$; $D_r X_t = 2 + \sin X_r + \int_r^t \cos X_s D_r X_s dB_s$. Suy ra:

$$\int_0^T E(|D_r X_t|^2 | \mathcal{F}_r) dr \leq 2 \left(9 + \int_r^t E(|D_r X_s|^2 | \mathcal{F}_r) ds \right), \quad 0 \leq r \leq t. \quad (22)$$

Theo bổ đề Gronwall ta được:

$$E(|D_r X_t|^2 | \mathcal{F}_r) \leq 18 e^{2(t-r)} \leq 18 e^{2t}, \quad 0 \leq r \leq t. \quad (23)$$

Theo Định lý 3.1 ta có ước lượng:

$$P(|X_t| \geq x) \leq 2 \exp\left(-\frac{x^2}{36 t e^{2t}}\right), \quad x > 0. \quad (24)$$

Suy ra:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(P(|X_t| > x))}{x^2} \leq \frac{-1}{36 t e^{2t}} \quad (25)$$

Ta lại có X_t là biến ngẫu nhiên Gauss với $E[X_t] = 0$ và:

$$\text{Var}[X_t] = \int_0^t E[(2 + \sin X_s)^2] ds := \sigma_X^2 \leq 9t. \quad (26)$$

Mặt khác, với Z có phân phối chuẩn tắc và $t \geq 0$ thì:

$$\begin{aligned} P(Z > t) &= \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \frac{1}{z} \cdot z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty \frac{-1}{z} d e^{-\frac{z^2}{2}} \\ &= \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \Big|_t^\infty - \int_t^\infty \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z^2} dz \leq \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \end{aligned} \quad (27)$$

Tiếp tục tích phân từng phần tích phân $\int_t^\infty \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z^2} dz$ ta thu được:

$$P(Z > t) \geq \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (28)$$

Với $t \leq 0$ ta thu được kết quả tương tự. Tóm lại ta thu được:

$$\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \leq P(|Z| > t) \leq \frac{1}{t\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad t > 0. \quad (29)$$

Áp dụng với X_t ta thu được:

$$\left(\frac{\sigma_X}{x} - \frac{\sigma_X^3}{x^3}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right) \leq P(|X_t| > x) = P\left(\frac{|X_t|}{\sigma_X} > \frac{x}{\sigma_X}\right) \leq \frac{1}{\frac{x}{\sigma_X}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}\right). \quad (30)$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(P(|X_t| > x))}{x^2} = \frac{-1}{2\sigma_X^2} \leq \frac{-1}{162t^2}$. So sánh với ước lượng (25), ta thấy rằng ước lượng (25) là chấp nhận được trong trường hợp này, nhất là khi t nhỏ.

4. Kết luận

Báo cáo đã trình bày phương pháp ước lượng xác suất đuôi cho nghiệm của một lớp phương trình vi phân ngẫu nhiên cơ bản và đưa ra được ví dụ minh họa cho phương pháp đã sử dụng. Đây chỉ là một trường hợp nhỏ với các điều kiện ràng buộc về hệ số tương đối chặt. Hiện nay, các nghiên cứu đã và đang được mở rộng cho nhiều lớp phương trình khác nhau cũng như các trường hợp phức tạp hơn như hệ số không bị chặn, hệ số không Lipschitz hay tăng trưởng tuyến tính,...

Tài liệu tham khảo

- D. Nualart, 2006. *The Malliavin Calculus and Related Topics, Probability and Its Applications*. Second Edition, Springer-Verlag, Berlin, 380p.
- Joanna Kołodziej, Horacio González-Vélez, 2019. *High-Performance Modelling and Simulation for Big Data Applications*. Springer open, p68-79.
- N. T. Dung, 2018. Tail Estimates for Exponential Functionals and Applications to SDEs. *Stochastic Process, Appl.* Vol. 128, No. 12, pp. 4154-4170.
- N.T. Dung, T. C. Son, 2019. Tail distribution estimates for one-dimensional diffusion processes. *J. Math. Anal. Appl.* No. 2, 2119—2138.
- N. T. Dung, N. T. Hang, P. T. P. Thuy, 2022. Density estimates for the exponential functionals of fractional Brownian motion. *Comptes Rendus Mathématique*, vol.360, 151-159.
- N. T. Dung, T. C. Son, T. M. Cuong, N. V. Tan, T. N. Quynh, 2019. Density estimates for solutions of stochastic functional differential equations. *Acta Mathematica Scientia*, 39B(4): 955-970.
- N.T.Hang, N.V.Tan, 2022. Tail Distribution Estimates of Fractional CIR Model. *VNU Journal of Science: Mathematics – Physics*, Vol. 38, No. 3, 70-78.
- Øksendal, Bernt K., 2003. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Berlin: Springer, sixth edition, 360p.

ABSTRACT

Tail distribution estimates of a class of Malliavin differentiable random variables

Nguyen Thu Hang

Hanoi University of Mining and Geology

In this report, we present a method for estimating tail probabilities of random variables using Malliavin analysis and Lemma 2.2 (N.T. Dung, 2018). We then apply this method to determine the tail probability estimate for a specific class of random variables that are solutions to a basic stochastic differential equation. Finally, we provide a clear illustration of our results through a specific example.

Keywords: Malliavin calculus; tail distribution; stochastic differential equations.

Ước lượng xác suất không trả được nợ tín dụng cá nhân bằng mô hình hồi quy logistic

Nguyễn Thị Hằng*
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Hệ thống ngân hàng được coi là một trong các tổ chức tài chính quan trọng nhất của nền kinh tế, đóng vai trò vô cùng quan trọng trong sự phát triển kinh tế toàn cầu. Hoạt động tín dụng (quan hệ vay mượn gồm cho vay và đi mượn) là hoạt động sinh lời lớn nhất, song đi kèm với nó điều không thể tránh khỏi là rủi ro tín dụng. Trong bài báo này chúng tôi đi nghiên cứu mô hình hồi quy logistic, mô hình này cho phép ước lượng xác suất không trả được nợ của khách hàng thông qua các nhân tố liên quan đến các đặc trưng được điều tra trên khách hàng. Bài báo sử dụng phương pháp K – Medoids giúp phân nhóm khách hàng dựa trên thông tin (điểm xếp hạng tín dụng) của khách hàng- đây chính là đóng góp mới của bài báo. Khi đó dựa vào kết quả phân nhóm này và tùy thuộc vào mức độ rủi ro mà các ngân hàng có thể chủ động trong việc đưa ra các biện pháp hạn chế rủi ro và tổn thất sao cho phù hợp nhất đối với mình.

Từ khóa: rủi ro tín dụng; xác suất không trả được nợ; phân nhóm khách hàng; hồi quy logistic điểm xếp hạng tín dụng; K – Medoids.

1. Đặt vấn đề

Đối với hệ thống ngân hàng, hoạt động chính là huy động vốn để sử dụng nhằm thu lợi nhuận, trong đó hoạt động tín dụng (là quan hệ vay mượn gồm cho vay và đi mượn) là hoạt động sinh lời lớn nhất, song đi kèm với nó thì rủi ro tín dụng là điều không thể tránh khỏi. Do đó, có thể nhận thấy trong thời điểm hiện nay cùng với sự tăng trưởng của tín dụng thì việc nhận dạng và phân nhóm khách hàng theo rủi ro tín dụng là việc làm cấp bách. Việc phát hiện sớm các nguy cơ rủi ro tín dụng giúp ngân hàng có thể chủ động điều chỉnh chính sách tín dụng cũng như ứng xử phù hợp với từng khách hàng cụ thể, nhằm hạn chế rủi ro và giảm thiểu tổn thất khi rủi ro xảy ra.

Từ thực tiễn nêu trên, việc xây dựng được một mô hình cho phép ước lượng xác suất không trả được nợ tín dụng của khách hàng cá nhân là rất cần thiết, không những thế dựa trên xác suất này ta có thể phân nhóm khách hàng theo nguy cơ không trả được nợ sẽ giúp cho các ngân hàng có những quyết sách chiến lược hợp lý cho từng nhóm đối tượng khách hàng khác nhau.

Bài báo gồm 4 phần: phần 1: Đặt vấn đề; phần 2: Ước lượng xác suất không trả được nợ tín dụng cá nhân bằng hồi quy logistic; phần 3: Phân nhóm khách hàng theo nguy cơ không trả được nợ tín dụng cá nhân; phần 4: Kết luận.

2. Ước lượng xác suất không trả được nợ tín dụng cá nhân bằng hồi quy logistic

2.1. Khái quát về tín dụng cá nhân và khả năng trả nợ của khách hàng cá nhân

Tín dụng cá nhân là hình thức tín dụng mà trong đó ngân hàng đóng vai trò là người chuyển nhượng quyền sử dụng vốn của mình cho khách hàng cá nhân sử dụng trong một thời hạn nhất định phải hoàn trả cả gốc và lãi.

Để xác định và định hướng các nhân tố ảnh hưởng đến khả năng trả nợ của khách hàng ta phải làm rõ các quan điểm liên quan đến khả năng trả nợ của khách hàng. Phương pháp xác định khả năng trả nợ của khách hàng thường được dựa trên một tiêu chuẩn nhất định do ngân hàng lựa chọn như: năng lực tài chính, thiện chí trả nợ của khách hàng khi chưa phát sinh nghĩa vụ nợ hoặc dựa trên đặc điểm của khoản nợ như lịch sử thanh toán nợ, tình trạng trả nợ thực tế của khách hàng (H. Coolian, 2018).

* Tác giả liên hệ
Email: nguyenthihang@hmg.edu.vn

Kết quả đánh giá khả năng trả nợ của khách hàng luôn thay đổi, cho nên mô hình đo lường khả năng trả nợ thường được giới hạn dự báo kết quả trong ngắn hạn (trong 1 năm). Thông qua phương pháp nhận diện, khách hàng chia làm hai loại “không có khả năng trả nợ và “có khả năng trả nợ”.

2.2. Mô hình hồi quy logistic

Mô hình hồi quy logistic là mô hình định lượng trong đó biến phụ thuộc là biến giả, chỉ nhận hai giá trị là 0 hoặc 1. Mô hình này được ứng dụng rộng rãi trong phân tích kinh tế nói chung và rủi ro tín dụng nói riêng. Mô hình hồi quy logistic xem xét mối liên hệ giữa biến biến phụ thuộc Y và tất cả các biến còn lại là biến độc lập X (Nguyễn Văn Hữu, Nguyễn Hữu Dư, 2003).

Y đóng vai trò là biến phụ thuộc và là biến nhị phân chỉ nhận hai giá trị 0 hoặc 1, cụ thể: 0 nếu khách hàng không vỡ nợ (trả được nợ), 1 nếu khách hàng vỡ nợ (không trả được nợ).

X là biến độc lập, thể hiện các nhân tố ảnh hưởng tới khách hàng. Giả sử p_k là xác suất không trả được

nợ của khách hàng thứ k , thì mô hình ước lượng p_k như sau:
$$p_k = \frac{1}{1 + e^{-(b_0 + b_1 X_1 + \dots + b_D X_D)}}$$

Trong đó: b_0 - hệ số chặn. $b_j, j \in \{1, \dots, D\}$ được gọi là hệ số hồi quy của mô hình; $X_j, j \in \{1, \dots, D\}$ - các biến độc lập; D - số biến độc lập điều tra trên khách hàng.

Để ước lượng được xác suất không trả được nợ của khách hàng ta thực hiện theo các bước sau:

- Ước lượng các hệ số hồi quy β của mô hình, dùng phương pháp ước lượng hợp lý cực đại MLE.
- Kiểm định để xem xét mô hình hồi quy đã hợp lý chưa, ta tiến hành một số kiểm định sau:
 - Kiểm định ý nghĩa thống kê của hệ số hồi quy: Với giả thiết rằng các hệ số hồi quy là bằng 0, đối thiết là các hệ số hồi quy là khác 0. Để kiểm tra điều này, ta dùng kiểm định Wald.
 - Kiểm định độ phù hợp của hệ số hồi quy: Ta xem xét tổ hợp liên hệ tuyến tính của toàn bộ các hệ số trong mô hình trừ hằng số được kiểm định xem có thực sự có ý nghĩa trong việc giải thích biến phụ thuộc (Y) hay không. Ta sử dụng kiểm định Chi – bình phương để kiểm tra điều này.
 - Kiểm định độ phù hợp của mô hình với dữ liệu quan sát: Để kiểm tra mô hình có phù hợp với dữ liệu quan sát hay không, ta dùng thống kê Pearson’s Chi – bình phương.

Nếu mô hình thỏa mãn các kiểm định trên thì mô hình có thể dùng để ước lượng xác suất không trả được nợ. Ngược lại, nếu không thỏa mãn ta cần hồi quy lại mô hình với các biến độc lập khác hoặc tiến hành một số hiệu chỉnh cần thiết như tăng cỡ mẫu.

Khi xây dựng một mô hình, ta cần đánh giá mô hình hoạt động tốt như thế nào hay mô hình phân lớp tốt như thế nào. Để làm được điều đó, ta sử dụng đường cong ROC (Receiver Operating Characteristic) xem xét các độ đo (độ tin cậy (accuracy), độ nhạy (sensitive), độ đặc hiệu (specificity)) của mô hình qua từng điểm cắt và ước tính diện tích dưới đường cong ROC (AUC) để đánh giá mô hình phân lớp tốt như thế nào (Cox và Titterton, 1991; Cox và Solomon, 2003).

2.3. Mô hình hồi quy logistic trong ước lượng xác suất không trả được nợ tín dụng cá nhân

Gọi Y_k là một biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối nhị thức. Ta xét y_k là giá trị quan sát thực thứ k của biến ngẫu nhiên Y_k . Khi đó y_k chỉ nhận hai giá trị 1 hoặc 0.

Nếu $Y_k = y_k = 0$ thì khách hàng thứ k trả được nợ (không vỡ nợ), ngược lại $Y_k = y_k = 1$ thì khách hàng thứ k không trả được nợ (hay vỡ nợ).

Đối với bất kỳ khoản vay cụ thể nào, ta sẽ có một véc tơ biến $X = (X_1, X_2, \dots, X_D)$ được điều tra trên đặc điểm của khách hàng. Ta gọi những biến này là biến dự báo và các biến này được giả sử là độc lập với nhau.

Gọi x_{kj} là giá trị của biến X_j trên quan sát thứ k , " $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ "; " $j \in \{1, 2, \dots, D\}$ ". Khi đó, ma trận của các biến dự báo $C = (x_{kj})$ với n dòng và $D + 1$ cột. Trong đó D là số biến dự báo của mô hình và cột đầu tiên $x_{k1} = 1$.

Ta giả sử p_k là xác suất không trả được nợ của khách hàng thứ k (còn $1 - p_k$ là xác suất trả được nợ của khách hàng thứ k) và n là số lần quan sát. Khi đó:

$$Y_k \sim \mathcal{B}(1, p_k), "k \in \{1, 2, \dots, n\}; P(Y_k = y_k = 1) = p_k; P(Y_k = y_k = 0) = 1 - p_k.$$

Hàm phân phối xác suất của biến Y_k được cho bởi: $F(Y_k = y_k) = \binom{1}{y_k} p_k^{y_k} (1 - p_k^{1-y_k})$, trong đó $p_k^{y_k} (1 - p_k^{1-y_k})$ là xác suất xảy ra của quan sát y_k .

Giá trị kì vọng và phương sai của biến Y_k là: $E(Y_k) = m_k = p_k$; $D(Y_k) = s_k = p_k(1 - p_k)$

Khi đó ta có tỉ lệ $odds_k = \frac{p_k}{1 - p_k}$ được định nghĩa là tỉ lệ của xác suất không trả được nợ với phần bù của nó. Nếu xác suất không trả được nợ (hay vỡ nợ) $p_k = \frac{1}{2}$ thì tỉ lệ $odds$ là 1: 1. Nếu $p_k = \frac{1}{3}$ thì tỉ lệ $odds$ là 1: 2. Nếu xác suất không trả được nợ rất nhỏ thì tỉ lệ $odds$ xấp xỉ bằng 0. Hàm $logit$ của $odds$

hay $log - odds$ được định nghĩa như sau: $h_k = logit(p_k) = \log \frac{p_k}{1 - p_k}$

Chú ý rằng: Điểm số $log - odds$ thường là cơ sở của điểm tín dụng, được các ngân hàng và các cơ sở tín dụng dùng để xếp hạng tín dụng cho khách hàng.

- Điểm tín dụng thường được công bố cho cộng đồng là một số nguyên dương trong một khoảng nào đấy (ví dụ điểm Experian từ 0 đến 999). Tuy nhiên điểm này thường dựa trên điểm $log - odds$ “thô”.

- Thông thường điểm $log - odds$ cao biểu thị rủi ro tín dụng thấp, điểm $log - odds$ thấp biểu thị rủi ro tín dụng cao hơn (xác suất không trả được nợ cao).

Ta thấy khi xác suất không trả được nợ tiến dần về 0 thì tỉ lệ $odds$ xấp xỉ bằng 0 và $\eta(log - odds)$ tiến dần đến $-\infty$. Mặt khác, khi xác suất không trả được nợ tiến dần về 1 thì tỉ lệ $odds$ và $\eta(log - odds)$ tiến dần đến $+\infty$. Do đó hàm $logit$ là ánh xạ từ $(0, 1)$ sang toàn bộ đường thẳng thực R . Tức là điểm số $log - odds$ nằm trong khoảng $(-\infty, +\infty)$ (Badr Missaoui, 2009).

Ta giả sử thêm rằng $logit$ của tỉ lệ $odds$ ($log - odds$) là một hàm tuyến tính của các biến dự báo. Ta có

$h_k = \log \frac{p_k}{1 - p_k} = X_k b \phi$, trong đó: $x_k = (1, x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kD})$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$; $b \phi = (b_0, \dots, b_D)^T$ được gọi

là các hệ số hồi quy của mô hình cần ước lượng.

Giải p_k trong phương trình trên ta được: $p_k = logit^{-1}(h_k) = \frac{e^{h_k}}{1 + e^{h_k}} = \frac{1}{1 + e^{-h_k}}$. Như vậy $p_k \in [0, 1]$,

do đó để ước lượng xác suất vỡ nợ của một khách hàng nào đó ta cần phải ước lượng các hệ số hồi quy b_k từ dữ liệu nghiên cứu.

3. Phân nhóm khách hàng theo nguy cơ không trả được nợ tín dụng cá nhân

3.1. Phương pháp K – Medoids

Phương pháp K – Medoids là phương pháp mở rộng của phương pháp K – trung bình (Hoàng Thị Minh Châu, 2010), thay vì sử dụng các trọng tâm, K – Medoids sử dụng các đối tượng medoid để biểu diễn cho các cụm dữ liệu, một đối tượng đặt tại vị trí trung tâm nhất bên trong mỗi cụm. Vì vậy, các đối tượng medoid ít khi bị ảnh hưởng của các đối tượng ở rất xa trung tâm, trong khi đó các trọng tâm của thuật toán K – trung bình lại bị tác động bởi các điểm xa trung tâm.

Ban đầu, K – Medoids khởi tạo k đối tượng medoid và phân phối các đối tượng còn lại vào các cụm với các đối tượng medoid đại diện tương ứng sao cho chúng tương tự với đối tượng medoid trong cụm nhất.

Ý tưởng chính của thuật toán K – Medoids như sau:

- Để tìm ra k cụm với n đối tượng thì K – Medoids chọn ngẫu nhiên k đối tượng vào k cụm, coi mỗi đối tượng này là trọng tâm của cụm.

- Phân bổ các đối tượng còn lại vào cụm mà có sự khác nhau của nó với đối tượng trọng tâm của cụm là ít nhất (còn gọi là gần nhất). Sau đó lặp lại quá trình: Thay đổi đối tượng trọng tâm của mỗi cụm sao cho chất lượng cụm được cải thiện.

Chất lượng của cụm được đánh giá bởi một hàm đo sự khác biệt giữa một đối tượng với đối tượng trọng tâm chứa nó. Quá trình lặp cho đến khi không còn sự thay đổi nào về lực lượng cũng như hình dáng của các cụm.

Để xác định được các medoid, K – Medoids bắt đầu bằng cách lựa chọn k đối tượng medoid bất kỳ. Sau mỗi thực hiện, ta cố gắng hoán chuyển giữa đối tượng medoid O_m và một đối tượng O_p không phải là

medoid, miễn là sự hoán đổi này nhằm cải tiến chất lượng của phân cụm, quá trình này kết thúc khi chất lượng phân cụm không thay đổi. Chất lượng phân cụm được đánh giá qua hàm tiêu chuẩn, chất lượng phân cụm tốt nhất khi hàm tiêu chuẩn đạt giá trị nhỏ nhất.

Sau đây là một số khái niệm được sử dụng cho phương pháp K – Medoids:

O_m là đối tượng medoid hiện thời cần được thay thế.

O_p là đối tượng medoid thay thế cho O_m .

O_j là đối tượng dữ liệu (không phải là medoid) có thể di chuyển sang cụm khác

O_i là đối tượng medoid hiện thời gần đối tượng O_j nhất.

Ta tính giá trị hoán chuyển C_{jmp} cho tất cả các đối tượng O_j (C_{jmp} ở đây nhằm để làm căn cứ cho việc hoán chuyển giữa O_m và O_p).

Ta xét 4 trường hợp tính C_{jmp} như sau:

Trường hợp 1:

Giả sử O_j hiện thời thuộc về cụm có đại diện là O_m và O_j tương tự với O_i hơn O_p ($d(O_j, O_p) > d(O_j, O_i)$). Trong khi đó, O_i là đối tượng medoid tương tự thứ 2 tới O_j trong số các medoid. Trong trường hợp này, chúng ta thay thế O_m bởi đối tượng medoid mới O_p và O_j sẽ thuộc về cụm có đối tượng đại diện là O_i . Vì vậy, giá trị hoán đổi C_{jmp} được xác định như sau:

$$C_{jmp} = d(O_j, O_i) - d(O_j, O_m), \text{ giá trị } C_{jmp} \text{ là không âm.}$$

Trường hợp 2:

Giả sử O_j hiện thời thuộc về cụm có đại diện O_m nhưng O_j ít tương tự với O_i so với O_p (nghĩa là $d(O_j, O_p) < d(O_j, O_i)$). Nếu O_m được thay thế bởi O_p thì O_j sẽ thuộc về cụm có đại diện O_p . Vì vậy, giá trị C_{jmp} được xác định như sau:

$$C_{jmp} = d(O_j, O_p) - d(O_j, O_m), \text{ giá trị } C_{jmp} \text{ ở đây có thể là âm hoặc dương.}$$

Trường hợp 3:

Giả sử O_j hiện thời không thuộc về cụm có đối tượng đại diện là O_m mà thuộc về cụm có đại diện là O_i . Mặt khác, giả sử O_j tương tự với O_i hơn so với O_p . Khi đó, nếu O_m được thay thế bởi O_p thì O_j vẫn ở lại trong cụm có đại diện O_i . Do đó $C_{jmp} = 0$.

Trường hợp 4:

Giả sử O_j hiện thời thuộc về cụm có đại diện là O_i nhưng O_j ít tương tự với O_i hơn so với O_p . Vì vậy, nếu ta thay thế O_m bởi O_p thì O_j sẽ chuyển từ O_i sang O_p . Do đó:

$$C_{jmp} = d(O_j, O_p) - d(O_j, O_i), \text{ giá trị } C_{jmp} \text{ ở đây luôn âm.}$$

Kết hợp cả bốn trường hợp trên, tổng giá trị hoán đổi O_m bằng O_p được xác định như sau:

$$TC_{jmp} = \sum_j C_{jmp}.$$

Ta có thể mô tả thuật toán K – Medoids bằng các bước sau:

Đầu vào: Tập dữ liệu có n phần tử, số cụm k .

Đầu ra: k cụm dữ liệu sao cho chất lượng phân bố là tốt nhất.

Bước 1: Chọn k đối tượng medoid bất kỳ.

Bước 2: Tính TC_{jmp} cho tất cả các cặp đối tượng O_m, O_p . Trong đó O_m là đối tượng medoid và O_p là đối tượng không phải medoid.

Bước 3: Chọn cặp đối tượng O_m và O_p . Tính $\min O_m$, $\min O_p$, TC_{jmp} . TC_{jmp} là âm, thay thế O_m bởi O_p và quay lại bước 2. Nếu TC_{jmp} dương, thì chuyển sang bước 4.

Bước 4: Với mỗi đối tượng không phải là medoid, xác định đối tượng medoid tương tự với nó nhất đồng thời gán nhãn cụm cho chúng.

3.2. Phương pháp K – Medoids trong phân nhóm khách hàng theo nguy cơ không trả được nợ tín dụng cá nhân

Phân nhóm khách hàng là việc chúng ta cần phân loại, sắp xếp một đối tượng vào các nhóm khách hàng trên cơ sở đo lường rủi ro tín dụng. Đôi khi việc nhóm khách hàng theo loại rủi ro chung lại rất hữu ích:

- Nó cung cấp mức độ rủi ro cho bên cấp tín dụng, tùy thuộc vào mức độ chấp nhận rủi ro mà bên cấp tín dụng sẽ ra quyết định cho vay hay không.

- Cho phép đánh giá rủi ro của toàn bộ danh mục sản phẩm bằng cách tổng kết các trường hợp trong mỗi nhóm.

- Xác suất của biến dự báo trong mỗi nhóm có thể sử dụng để tính toán rủi ro vỡ nợ cho cả nhóm.

Để phân nhóm khách hàng ta sử dụng phương pháp phân cụm dữ liệu, tức là dựa trên số liệu đã thu thập được từ các khách hàng, ta chia tập dữ liệu ban đầu thành các cụm dữ liệu sao cho các phần tử trong một cụm “tương tự” với nhau và các phần tử trong các cụm khác nhau sẽ “phi tương tự” với nhau. Số các cụm dữ liệu được phân ở đây có thể được xác định trước theo kinh nghiệm hoặc có thể tự động xác định theo phương pháp phân cụm.

Sau khi xác định các đặc tính của dữ liệu, người ta đi tìm cách thích hợp để xác định khoảng cách giữa các đối tượng, hay là xây dựng phép đo tương tự dữ liệu. Đây chính là các hàm để đo sự giống nhau giữa các cặp đối tượng dữ liệu, thông thường các hàm này hoặc là để tính độ tương tự (Similar) hoặc là tính độ phi tương tự (Dissimilar) giữa các đối tượng dữ liệu.

Cụ thể: Từ tập dữ liệu, ta có thể phân tích các thuộc tính (biến độc lập) thành hai nhóm bao gồm:

1. Nhóm thuộc tính (biến) thông tin của khách hàng (ví dụ: Tuổi, nghề nghiệp,...) hay nhóm thuộc tính (biến) tĩnh.

2. Nhóm đặc điểm của sản phẩm tín dụng (ví dụ: Tên sản phẩm, loại khoản vay,...) hay nhóm thuộc tính (biến) động và có thể thay đổi với mỗi lần vay của khách hàng.

Mục tiêu cần đạt được là nhóm các khách hàng có cùng đặc điểm chung về các thuộc tính tĩnh, khi đó ta biết những khách hàng có đặc điểm giống nhau thì sẽ có những rủi ro tín dụng chung.

Để làm được điều này ta sử dụng phương pháp K – Medoids để phân nhóm cho khách hàng. Ta có thể mô tả thuật toán theo các bước sau:

Đầu vào: Số các nhóm G cần nhóm và tập các thuộc tính thông tin (biến độc lập) của n khách hàng. **Đầu ra:** G nhóm đã được phân phối.

Bước 1: Chọn G đối tượng khách hàng ngẫu nhiên là tâm của nhóm

Bước 2: Gán từng khách hàng còn lại vào nhóm có tâm gần khách hàng đó nhất.

Bước 3: Chọn ngẫu nhiên một khách hàng không phải là đối tượng tâm, thay thế một trong các nhóm đó bằng nó nếu nó làm thay đổi khách hàng trong nhóm (gán khách hàng cho nhóm có tâm gần nhất).

Bước 4: Nếu gán tâm mới thì quay lại bước 2, ngược lại thì dừng (Nguyễn Văn Tuấn, 2007).

4. Kết luận

Sử dụng số liệu thu thập từ khách hàng chúng ta đã xây dựng mô hình hồi quy logistic để ước lượng xác suất không trả được nợ tín dụng của khách hàng. Bằng phương pháp hợp lý cực đại (MLE) và giảm gradient ta ước lượng được các hệ số hồi quy của mô hình từ đó ước lượng điểm số $\log - odds$ và ước lượng xác suất không trả được nợ của khách hàng. Dựa trên các đặc điểm của khách hàng, phương pháp K – Medoids cho phép ta phân nhóm khách hàng theo nguy cơ không trả được nợ tín dụng cá nhân. Ứng dụng thuật toán K – Medoids cho phép ta phân nhóm cho các khách hàng theo hạng rủi ro tín dụng.

Các kết quả của bài báo còn một số hạn chế và cũng là bài toán mở đối với sự tiếp tục nghiên cứu bài toán phân nhóm khách hàng. Một trong những hướng nghiên cứu tiếp theo đó là tính xác suất hiệu chỉnh (Probability Calibration), xác suất này sẽ cho ta cái nhìn về ước lượng xác suất theo từng nhóm rủi ro với tỉ lệ quan sát được, nếu hai đại lượng này có cùng phân phối tức là có không có sự khác biệt giữa xác suất ước lượng và tỉ lệ quan sát được. Tiếp đó ta có thể tính hệ số đo lường theo chi phí giúp ta tìm được một điểm cắt sao cho tối đa hóa lợi nhuận kỳ vọng.

Tài liệu tham khảo

Hoàng Thị Minh Châu, 2010, *Bài toán phân cụm*, Luận văn thạc sĩ, Trường Đại học Khoa học tự nhiên.

- Nguyễn Văn Hữu, Nguyễn Hữu Dư, 2003, *Phân tích thống kê và dự báo*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.
- Nguyễn Văn Tuấn, 2007, *Phân tích số liệu và biểu đồ bằng R*, NXB Khoa học và kỹ thuật.
- H. Coolian, 2018, *Research methods and statistics in psychology*, Routledge .
- D. R. Cox and D. M. Titterington, 1991, *Complex Stochastic Systems*, Royal Society, ISBN 0-85403-453-6.
- D. R. Cox and P. J. Solomon, 2003, *Components of variance*, Chapman & Hall/CRC.
- Badr Missaoui, 2009, *Statistics in Retail Finance*, Room 545, Huxley Building.

ABSTRACT

Estimating the probability of personal credit default using logistic regression

Nguyen Thi Hang

Hanoi University of Mining and Geology

The banking system is considered one of the most important financial institutions of the economy, playing an extremely important role in the development of the global economy. Credit activities (borrowing relationships including lending and borrowing) are the most profitable activities, but the inevitable thing that comes with it is credit risk. In this article, we study the logistic regression model, which allows estimating the probability of customers not being able to repay their debts through factors related to the characteristics investigated on the customers. The article uses the K-Medoids method to help group customers based on information (credit rating scores) of the customers - this is the new contribution of the article. Then, based on the results of this grouping and depending on the level of risk, banks can proactively take measures to limit risks and losses in the most appropriate way for them.

Keywords: credit risk; probability of default; customer grouping; logistic regression; credit rating scores; K – Medoids.

Error analysis for a fractional Adams method

Nguyen Thi Hong¹, Dao Xuan Hung^{2,*}

¹Department of Foundation, Academy of Cryptography Techniques

²Ha noi University of Mining and Geology

ABSTRACT

This report, we investigate a method for the numerical solution of the nonlinear fractional differential equation $D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t))$, equipped with initial conditions $y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1$; Here α may be an arbitrary positive real number, and the differential operator is the Caputo derivative. In this report, firstly the numerical method (the Adams method) is given, then we further study the error analysis of this method for the fractional differential equations in the cases: (i) the error estimates for $\alpha \in (0, 1)$, $f \in C^2(G)$, (ii) the solution $y(t)$ having some special forms.

Keywords: Fractional calculus; Caputo derivative; fractional differential equations.

1. Introduction

The generalized Adams-Bashforth-Moulton method, often simply called "the fractional Adams method", is a useful numerical algorithm for solving a fractional ordinary differential equation: $D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t))$, $y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$, where $\alpha > 0$, $n = [\alpha]$ is the first integer not less than α , and $D_*^\alpha y(t)$ is the α th-order fractional derivative of $y(t)$ in the Caputo sense (Oldham và Spanier, 1974; Renewed, 2006; Miller và Ross, 1993; Podlubny, 1999; Kilbas và nnk, 2006). Although error analyses for this fractional Adams method have been given for (a) $0 < \alpha$, $D_*^\alpha y(t) \in C^2[0, T]$, (b) $\alpha > 1$, $y \in C^{1+[\alpha]}[0, T]$, (c) $0 < \alpha < 1$, $y \in C^2[0, T]$, (d) $\alpha > 1$, $f \in C^3(G)$, there are still some unsolved problems (i) the error estimates for $\alpha \in (0, 1)$, $f \in C^2(G)$, (ii) the solution $y(t)$ having some special forms. In this report, we mainly study the error analyses of the fractional Adams method for the fractional ordinary differential equations for the three cases (i)-(ii).

2. The Adams method

Let the fractional initial value problem:

$$\begin{cases} D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \\ y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, k = 0, 1, \dots, n - 1 \end{cases} \quad (1)$$

Where the $y_0^{(k)}$ may be arbitrary real numbers, $\alpha > 0$ and $n = [\alpha]$ is the smallest integer $\geq \alpha$. $D_*^\alpha y(t)$ is the Caputo fractional derivative of order α of function $y(t)$, which is defined by:

$$D_*^\alpha z(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{n - \alpha - 1} z^{(n)}(\tau) d\tau \quad (0 \leq n - 1 < \alpha < n \in \mathbb{Z}^+)$$

In this part, the our purpose is to give a numerical method for (1) - the fractional Adams-Bashforth-Moulton method, simply called "the fractional Adams method". Firstly, we have the initial value problem (1) is equivalent to the Volterra integral equation (Li, 2005):

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - u)^{\alpha-1} f(u, y(u)) du \quad (2)$$

In the sense that a continuous function is a solution of (1) if and only if it is a solution of (2).

Here, we assume the function f to be such that a unique solution exists on some interval $[0, T]$. we also assume that we are working on a uniform grid $\{t_j = jh: j = 0, 1, \dots, N\}$ with some integer N and $h = T/N$. The basic idea is, assuming that we have already calculated approximations $y_j \approx y(t_j)$ ($j = 1, 2, \dots, k$), that we try to obtain the approximation y_{k+1} by means of the equation:

* Tác giả liên hệ

Email: daoxuanhung@humg.edu.vn

$$y(t_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - u)^{\alpha-1} f(u, y(u)) du \quad (3)$$

To construct the required formula, we use the product trapezoidal quadrature formula with respect to the weight function $(t_{k+1} - \cdot)^{\alpha-1}$ to replace the integral. In other words, we apply the approximation:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt &= \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \\ &\approx \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - t)^{\alpha-1} \left[f(t_j, y(t_j)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h} (f(t_{j+1}, y(t_{j+1})) - f(t_j, y(t_j))) (t - t_j) \right] dt \end{aligned} \quad (4)$$

Where, by simple calculations we have:

$$a_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha(\alpha+1)} \times \begin{cases} (k^{\alpha+1} - (k-\alpha)(k+1)^\alpha) & \text{if } j = 0 \\ ((k-j+2)^{\alpha+1} + (k-j)^{\alpha+1} \\ - 2(k-j+1)^{\alpha+1}) & \text{if } 1 \leq j \leq k \\ 1 & \text{if } j = k+1 \end{cases} \quad (5)$$

This then gives us our corrector formula (i.e., the fractional variant of the one-step Adams-Moulton method), which is:

$$y_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right) \quad (6)$$

The remaining problem is the determination of the predictor formula required to calculate y_{k+1}^p . To do this, we replace the integral on the right-hand side of equation (3) by the product rectangle rule:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt &= \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1} - t)^{\alpha-1} f(t, y(t)) dt \\ &= \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y(t_j)) \end{aligned}$$

Where now:

$$b_{j,k+1} = \frac{h^\alpha}{\alpha} ((k+1-j)^\alpha - (k-j)^\alpha) \quad (8)$$

Thus, the predictor y_{k+1}^p is determined by the fractional Adams- Bashforth method:

$$y_{k+1}^p = \sum_{k=0}^{n-1} y_0^{(k)} \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j) \quad (9)$$

Finally, we have the fractional Adams-Bashforth-Moulton method, which is written as following:

$$\begin{cases} y_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\sum_{j=0}^k a_{j,k+1} f(t_j, y_j) + a_{k+1,k+1} f(t_{k+1}, y_{k+1}^p) \right) \\ y_{k+1}^p = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{t_{k+1}^j}{j!} y_0^{(j)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^k b_{j,k+1} f(t_j, y_j) \end{cases} \quad (10)$$

In which, the weights $a_{j,k+1}$ and $b_{j,k+1}$ being defined according to (5) and (8), respectively.

We have thus completed the description of our numerical algorithm. The remainder of this report will be devoted to the error analysis for this scheme.

3. Error analyses for the fractional Adams method

In this section, we give and prove theorems below.

Lemma. If $\psi \in C^1[0, T], 0 < \alpha < 1$, then:

$$E_{k+1} \left[\int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right] \leq \frac{2}{\alpha(1-\alpha)} \|\psi'\|_{t_{k+1}}^\alpha h^{1-\alpha}$$

And:
$$F_{k+1} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right] \leq \frac{A}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} t_{k+1}^{\alpha} h^{1-\alpha}$$

Where A is a constant independent of k and h .

Proof. Using the expressions for E_{k+1} , we have:

$$\begin{aligned} E_{k+1} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right] &= \left| \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left\{ \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau - \int_0^{t_j} (t_j-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right\} (t_{k+1}-t)^{\alpha-1} dt \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau - \int_0^{t_j} (t_j-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right| (t_{k+1}-t)^{\alpha-1} dt \\ &\quad \left| \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau - \int_0^{t_j} (t_j-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \|\psi'\|_{\infty} \left(\int_0^{t_j} (t_j-\tau)^{-\alpha} d\tau - \int_0^{t_j} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau + \int_{t_j}^t (t-\tau)^{-\alpha} d\tau \right) \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} (t_j^{1-\alpha} + (t-t_j)^{1-\alpha} - t^{1-\alpha} + (t-t_j)^{1-\alpha}) \\ &\leq \frac{2}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} (t-t_j)^{1-\alpha} \leq \frac{2}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} h^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

So, one has:

$$\begin{aligned} E_{k+1} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right] &\leq \frac{2}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} h^{1-\alpha} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1}-t)^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{2}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} h^{1-\alpha} \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1}-t)^{\alpha-1} dt = \frac{2}{\alpha(1-\alpha)} \|\psi'\|_{\infty} t_{k+1}^{\alpha} h^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Applying the expression for F_{k+1} gives:

$$\begin{aligned} F_{k+1} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right] &= \left| \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1}-t)^{\alpha-1} \left\{ \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{t_j} (t_j-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau - \frac{1}{h} \left[\int_0^{t_{j+1}} (t_{j+1}-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau - \int_0^{t_j} (t_j-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right] (t-t_j) \right\} dt \right| \\ &\leq \left| \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1}-t)^{\alpha-1} \left| \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^{t_j} (t_j-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau - \frac{1}{h} \left[\int_0^{t_{j+1}} (t_{j+1}-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau - \int_0^{t_j} (t_j-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right] (t-t_j) \right| dt \right|. \end{aligned}$$

By tedious calculations, one gets:

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau - \int_0^{t_j} (t_j-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{h} \left[\int_0^{t_{j+1}} (t_{j+1}-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau - \int_0^{t_j} (t_j-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right] (t-t_j) \right| \\ &\leq \left| \int_0^{t_j} \left[(t-\tau)^{-\alpha} - (t_j-\tau)^{-\alpha} - \frac{1}{h} ((t_{j+1}-\tau)^{-\alpha} - (t_j-\tau)^{-\alpha}) (t-t_j) \right] \psi'(\tau) d\tau \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \int_{t_j}^t \left[(t-\tau)^{-\alpha} - \frac{1}{h} (t_{j+1}-\tau)^{-\alpha} (t-t_j) \right] \psi'(\tau) d\tau \right| + \left| \frac{1}{h} \int_t^{t_{j+1}} (t_{j+1}-\tau)^{-\alpha} (t-t_j) \psi'(\tau) d\tau \right| \\
& \leq \frac{1}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} \left\{ \left| -(t-t_j)^{1-\alpha} + t^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha} - \frac{1}{h} (t-t_j) \left[-(t_{j+1}-t_j)^{1-\alpha} + t_{j+1}^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha} \right] \right| \right. \\
& \quad \left. + \left| (t-t_j)^{1-\alpha} - \frac{1}{h} (t-t_j) \left[-(t_{j+1}-t)^{1-\alpha} + (t_{j+1}-t_j)^{1-\alpha} \right] \right| + \frac{1}{h} (t_{j+1}-t)^{1-\alpha} (t-t_j) \right\} \\
& \leq \frac{1}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} \left\{ t^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha} - \frac{1}{h} (t_{j+1}^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha}) (t-t_j) \right. \\
& \quad \left. + \left((t-t_j)^{1-\alpha} - h^{-\alpha} (t-t_j) \right) + (t-t_j)^{1-\alpha} - h^{-\alpha} (t-t_j) + \frac{2}{h} (t_{j+1}-t)^{1-\alpha} (t-t_j) \right\} \\
& = \frac{1}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} \left\{ t^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha} - \frac{1}{h} (t_{j+1}^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha}) (t-t_j) \right. \\
& \quad \left. + 2 \left[h^{-1} (t_{j+1}-t)^{1-\alpha} (t-t_j) + (t-t_j)^{1-\alpha} - h^{-\alpha} (t-t_j) \right] \right\} \\
& \leq \frac{1}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} \left\{ t^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha} - \frac{1}{h} (t_{j+1}^{1-\alpha} - t_j^{1-\alpha}) (t-t_j) + 4h^{1-\alpha} \right\}.
\end{aligned}$$

Utilizing the above inequalities, we have:

$$\begin{aligned}
F_{k+1} \left[\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right] & \leq \frac{1}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} \left\{ F_{k+1}[t^{1-\alpha}] + 4h^{1-\alpha} \sum_{j=0}^k \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_{k+1}-t)^{\alpha-1} dt \right\} \\
& \leq \frac{1}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} \left\{ C_{\alpha,1-\alpha}^{\text{Tr}} t_{k+1}^{\alpha-1} h^{2-\alpha} + \frac{4}{\alpha} t_{k+1}^{\alpha} h^{1-\alpha} \right\} \leq \frac{A}{1-\alpha} \|\psi'\|_{\infty} t_{k+1}^{\alpha} h^{1-\alpha}
\end{aligned}$$

The proof is completed.

Theorem 1. Let $0 < \alpha < 1$. Then, if $f \in C^2(G)$,

$$\max_{t_j \in [\epsilon, T]} |y(t_j) - y_j| = O(h^{1-\alpha})$$

For every $\epsilon > 0$, and:

$$\max_{0 \leq j \leq N} |y(t_j) - y_j| = O(1)$$

Proof. Since $f \in C^2(G)$, using Theorem 2.1(a) in (Diethelm và nnk, 2004), we have:

$$y(t) = \sum_{v=1}^{v_1} c_v t^{\alpha v} + \psi(t)$$

In which $v_1 = [1/\alpha] - 1$, $\psi(t) \in C^1[0, T]$.

Now, using the Caputo fractional derivative definition yields:

$$D_*^{\alpha} y(t) = \sum_{v=1}^{v_1} \frac{\Gamma(\alpha v + 1)}{\Gamma(\alpha v + 1 - \alpha)} c_v t^{\alpha v - \alpha} + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \quad (11)$$

Set $g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau$. Next we estimate $E_{k+1}[g(t)]$ and $F_{k+1}[g(t)]$.

$$\begin{aligned}
E_{k+1}[g(t)] & = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} E_{k+1} \left[\int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right] \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{2}{\alpha(1-\alpha)} \|\psi'\|_{\infty} t_{k+1}^{\alpha} h^{1-\alpha}
\end{aligned} \quad (12)$$

Also,

$$\begin{aligned}
F_{k+1}[g(t)] & = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} F_{k+1} \left[\int_0^t (t - \tau)^{-\alpha} \psi'(\tau) d\tau \right] \\
& \leq \frac{A}{\Gamma(2-\alpha)} \|\psi'\|_{\infty} t_{k+1}^{\alpha} h^{1-\alpha}
\end{aligned} \quad (13)$$

From Theorem 2.4(b) in (K. Diethelm và nnk, 2004) we have:

$$\begin{aligned}
E_{k+1} \left[\sum_{v=1}^{v_1} \frac{\Gamma(\alpha v + 1)}{\Gamma(\alpha v + 1 - \alpha)} c_v t^{\alpha v - \alpha} \right] & \leq \sum_{v=1}^{v_1} \frac{\Gamma(\alpha v + 1)}{\Gamma(\alpha v + 1 - \alpha)} |c_v| E_{k+1}[t^{\alpha v - \alpha}] \\
& \leq \sum_{v=1}^{v_1} \frac{\Gamma(\alpha v + 1)}{\Gamma(\alpha v + 1 - \alpha)} |c_v| C_{\alpha, \alpha v - \alpha}^{\text{Re}} t_{k+1}^{\alpha + \alpha v - \alpha - 1} h \leq C^{\text{Re}} t_{k+1}^{\alpha - 1} h
\end{aligned} \quad (14)$$

And from Theorem 2.4(c) in (K. Diethelm và nnk (2004)), we have:

$$\begin{aligned} F_{k+1} \left[\sum_{v=1}^{v_1} \frac{\Gamma(\alpha v + 1)}{\Gamma(\alpha v + 1 - \alpha)} c_v t^{\alpha v - \alpha} \right] &\leq \sum_{v=2}^{v_1} \frac{\Gamma(\alpha v + 1)}{\Gamma(\alpha v + 1 - \alpha)} |c_v| F_{k+1} [t^{\alpha v - \alpha}] \\ &\leq \sum_{v=2}^{v_1} \frac{\Gamma(\alpha v + 1)}{\Gamma(\alpha v + 1 - \alpha)} |c_v| C_{\alpha, \alpha v - \alpha}^{\text{Tr}} t_{k+1}^{\alpha + \alpha v - \alpha - \sigma_v} h^{\sigma_v} \leq C^{\text{Tr}} t_{k+1}^{\alpha - 1} h^{\alpha + 1} \end{aligned} \quad (15)$$

Where: $\sigma_v = \min(2, \alpha v - \alpha + 1)$.

Thus, from (11), (12) and (14), we get:

$$E_{k+1}[D_*^\alpha y(t)] \leq 2 \max \left\{ \frac{2}{\alpha \Gamma(2 - \alpha)} \|\psi'\| t_{k+1}^\alpha h^{1 - \alpha}, C^{\text{Re}} t_{k+1}^{\alpha - 1} h \right\} \quad (16)$$

And from (11), (13) and (15), we also get:

$$F_{k+1}[D_*^\alpha y(t)] \leq 2 \max \left\{ \frac{A}{\Gamma(2 - \alpha)} \|\psi'\| t_{k+1}^\alpha h^{1 - \alpha}, C^{\text{Tr}} t_{k+1}^{\alpha - 1} h^{\alpha + 1} \right\} \quad (17)$$

Now, by using (16) and (17), we obtain:

$$|y(t_j) - y_j| \leq C t_j^{\alpha - 1} h^q, \quad (q = \min(1, 1 - \alpha))$$

So, if $\epsilon \in (0, T]$ and $t_j \in [\epsilon, T]$, then:

$$|y(t_j) - y_j| \leq C t_j^{\alpha - 1} h^{1 - \alpha} \leq C \epsilon^{\alpha - 1} h^q$$

Or:

$$\max_{t_j \in [\epsilon, T]} |y(t_j) - y_j| = O(h^{1 - \alpha})$$

And:

$$\max_{0 \leq j \leq N} |y(t_j) - y_j| = O(1)$$

The proof is completed.

According to Theorems 2.1, 3.2 in (K. Diethelm và nnk (2004)), the smooth condition of $\psi(t)$ plays an important role in error estimates. If this term is removed, what will happen? We will give an answer.

Theorem 2. Suppose that the solution y of (1) is expressed in the form:

$$y(t) = \sum_{v=0}^{v_0} c_v t^{\alpha v} \quad (18)$$

In which $v_0 \in \mathbb{Z}^+$, with the constants $c_1, c_2, \dots, c_{v_0} \in \mathbf{R}$. Then, for $\epsilon \in (0, T]$,

$$\max_{t_j \in [\epsilon, T]} |y(t_j) - y_j| = \begin{cases} O(h^2) & \text{if } 1 < \alpha \\ O(h^{1 + \alpha}) & \text{if } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

And moreover,

$$\max_{0 \leq j \leq N} |y(t_j) - y_j| = \begin{cases} O(h^2) & \text{if } 1 < \alpha \\ O(h^{2\alpha}) & \text{if } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

Proof. Using (18) and the Caputo fractional derivative definition yields:

$$D_*^\alpha y(t) = \sum_{v=1}^{v_0} \frac{\Gamma(v\alpha + 1)}{\Gamma(v\alpha + 1 - \alpha)} c_v t^{v\alpha - \alpha} \quad (19)$$

If $\alpha > 1$, it follows from (19) and Theorems 2.3 and 2.4 in (K. Diethelm và nnk, 2004) that:

$$E_{k+1}[D_*^\alpha y(t)] \leq \sum_{v=1}^{v_0} \frac{\Gamma(v\alpha + 1)}{\Gamma(v\alpha + 1 - \alpha)} |c_v| E_{k+1}[t^{v\alpha - \alpha}] \leq C_1 t_{k+1}^\alpha h \quad (20)$$

And:

$$F_{k+1}[D_*^\alpha y(t)] \leq \sum_{v=1}^{v_0} \frac{\Gamma(v\alpha + 1)}{\Gamma(v\alpha + 1 - \alpha)} |c_v| F_{k+1}[t^{v\alpha - \alpha}] \leq C_2 t_{k+1}^{2(\alpha - 1)} h^2 \quad (21)$$

Now, by using (20) and (21) and Lemma 3 in K9. (Diethelm và nnk, 2004), we get:

$$|y(t_j) - y_j| \leq C h^q, \quad (q = \min(2, 1 + \alpha))$$

$$\max_{0 \leq j \leq N} |y(t_j) - y_j| = O(h^2)$$

If $0 < \alpha < 1$, by almost the same reasoning, we again have:

$$E_{k+1}[D_*^\alpha y(t)] \leq \sum_{v=1}^{v_0} \frac{\Gamma(v\alpha + 1)}{\Gamma(v\alpha + 1 - \alpha)} |c_v| E_{k+1}[t^{v\alpha - \alpha}] \leq C_3 t_{k+1}^{\alpha - 1} h \quad (22)$$

And:

$$F_{k+1}[D_*^\alpha y(t)] \leq \sum_{v=1}^{v_0} \frac{\Gamma(v\alpha + 1)}{\Gamma(v\alpha + 1 - \alpha)} |c_v| F_{k+1}[t^{v\alpha - \alpha}] \leq C_4 t_{k+1}^{\alpha - 1} h^{\alpha + 1} \quad (23)$$

By using (22) and (23), we obtain:

$$|y(t_j) - y_j| \leq C_5 t^{\alpha - 1} h^q, \quad (\text{here } q = 1 + \alpha)$$

So, for arbitrary $\epsilon > 0$ and $t_j \in [\epsilon, T]$,

$$|y(t_j) - y_j| \leq C_5 \epsilon^{\alpha-1} h^{1+\alpha}$$

i.e., $\max_{t_j \in [\epsilon, T]} |y(t_j) - y_j| = O(h^{1+\alpha})$

And for $0 \leq j \leq N$, $|y(t_j) - y_j| \leq Ch^{2\alpha}$.

This ends the proof.

Compared to DFF Theorem (b) (the case with $\alpha > 1$ and $\in C^{[\alpha]+1}[0, T]$), here the order of the estimate is much higher but $y \in C^{[\alpha]-1}[0, T]$, except for the special form of $y(t)$. The error estimates are actually the posterior estimates. A more general case relating to the posterior error estimates is given below.

Theorem 3. Suppose that the solution y of (1) is expressed in the form

$$y(t) = \sum_{v=0}^{v_0} c_{0,v} t^{\alpha v} + \sum_{v=1}^{v_1} c_{1,v} t^{1+\alpha v} + \sum_{v=1}^{v_2} c_{2,v} t^{2+\alpha v} + \dots + \sum_{v=1}^{v_l} c_{l,v} t^{l+\alpha v} \quad (24)$$

In which $v_0, v_1, v_2, \dots, v_l, l \in \mathbb{Z}^+$, all $c_{0,v}, c_{1,v}, \dots, c_{l,v}$ are real numbers. Then, for $\epsilon \in (0, T]$,

$$\max_{t_j \in [\epsilon, T]} |y(t_j) - y_j| = \begin{cases} O(h^2) & \text{if } 1 < \alpha \\ O(h^{1+\alpha}) & \text{if } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

And moreover, $\max_{0 \leq j \leq N} |y(t_j) - y_j| = \begin{cases} O(h^2) & \text{if } 1 < \alpha \\ O(h^{2\alpha}) & \text{if } 0 < \alpha < 1 \end{cases}$

The proof of this theorem is the same as that of Theorem 2 and so is omitted here. It is worthy of note that the last l terms on the right hand side of Eq. (24) cannot begin with $v = 0$; otherwise, the above conclusion does not hold yet.

4. Conclusion

In this report, we first introduce the fractional Adams method, then present and prove one lemma and three important theorems on the errors of this fractional Adam method. These results help improve the theory of fractional differential equations and are widely applied in other fields.

References

- K.B. Oldham, J. Spanier, 1974, renewed 2006. The Fractional Calculus, Academic Press, New York.
- K.S. Miller, B. Ross, 1993. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley-Interscience (John Wiley & Sons), New York.
- I. Podlubny, 1999. Fractional Differential Equations, Academic Press, New York.
- A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, 2006. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, New York.
- Diethelm, N.J. Ford, A.D. Freed, 2004. Detailed error analysis for a fractional Adams method, *Numer. Algorithms* 36, 31-52.
- C.P. Li, 2005. Synchronization in fractional-order differential systems. *Physica D* 212, 111-125.

TÓM TẮT

Phân tích sai số cho phương pháp Adams cấp phân số

Nguyễn Thị Hồng¹, Đào Xuân Hưng²

¹Học viện kỹ thuật Mật Mã

²Đại học Mở - Địa chất

Báo cáo này, chúng tôi nghiên cứu phương pháp số để giải phương trình vi phân cấp phân số phi tuyến $D_*^\alpha y(t) = f(t, y(t))$, với các điều kiện ban đầu $y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1$; ở đây α có thể là một số thực dương tùy ý và toán tử vi phân là đạo hàm Caputo. Trong báo cáo này, trước hết phương pháp số (phương pháp Adams) được đưa ra, sau đó chúng tôi nghiên cứu sâu hơn về phân tích sai số của phương pháp này cho các phương trình vi phân cấp phân số trong các trường hợp: (i) ước lượng sai số trong trường hợp $\alpha \in (0, 1)$, $f \in C^2(G)$, (ii) nghiệm $y(t)$ có một số dạng đặc biệt.

Từ khóa: Phép tính phân số; Đạo hàm Caputo; phương trình vi phân cấp phân số.

Nhóm tự đẳng cấu của mô hình kiểu hữu hạn

Nguyễn Thị Lan Hương*
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Cho W là một miền trong C^n . Tập tất cả các tự đẳng cấu (song chỉnh hình từ W vào W) của W , ký hiệu bởi $\text{Aut}(W)$ lập thành một nhóm với phép toán hợp thành. Hơn nữa, $\text{Aut}(W)$ cũng là một nhóm tôpô hội tụ đều trên các tập con compact (tức là tôpô compact-mờ). Các nghiên cứu trong mấy thập kỷ qua chỉ ra rằng, hình học của miền được xác định bởi cấu trúc của nhóm tự đẳng cấu, tức là biết được nhóm $\text{Aut}(W)$ ta có thể suy ra được một số tính chất hình học của miền W . Vì vậy, việc tính hoặc mô tả nhóm tự đẳng cấu là cần thiết. Bằng phương pháp nghiên cứu lý thuyết giải tích phức nhiều chiều, trong báo cáo này, tác giả đưa ra một số kết quả nghiên cứu về nhóm tự đẳng cấu của mô hình kiểu hữu hạn và một số ví dụ áp dụng cho kết quả nghiên cứu.

Từ khóa: Tự đẳng cấu; miền; hữu hạn.

1. Đặt vấn đề

Với hầu hết các miền, việc tính các nhóm tự đẳng cấu không đơn giản và mới chỉ thực hiện được trong một số trường hợp cụ thể.

Cụ thể, trong mặt phẳng phức, nhóm tự đẳng cấu đơn vị được tính toán dễ dàng. Đối với các miền trong không gian phức với chiều ≥ 2 , đa đĩa Δ^n và hình cầu đơn vị B^n cũng được mô tả chi tiết. Từ việc hai nhóm này không đẳng cấu với nhau (chẳng hạn, chiều của hai nhóm tự đẳng cấu khác nhau), ta suy ra ngay Δ^n và B^n không song chỉnh hình với nhau mặc dù chúng đồng phôi với nhau.

Năm 1931, P. Thullen (A. Zimmer, 2018) đã mô tả nhóm tự đẳng cấu của miền ellipsoid (miền Thullen):

$$D = \{(w, z) \in C^2: |w|^2 + |z|^2 < 1\}, \quad 1 < p \neq 2. \quad (1)$$

Sau đó, các nhà toán học như H. Cartan, I. Naruti, T. Sunada, R. E. Green, S. Krantz,... (Do Duc Thai and Ninh Van Thu, 2009) đã thành công trong việc mô tả nhóm tự đẳng cấu của một số lớp miền Thullen tổng quát trong C^n .

Báo cáo này dành để mô tả nhóm tự đẳng cấu của mô hình đa kiểu hữu hạn (theo nghĩa của D. Catlin (Ninh Van Thu, 2009)) trong C^n sau đây:

$$M_p = \{z = (z', z_n) \in C^n: \text{Re}(z_n) + P(z') < 0\} \quad (2)$$

Trong đó $P(z')$ là đa thức giá trị thực, đa điều hòa dưới, thuần nhất theo trọng và không chứa hạng tử đa điều hòa.

2. Cơ sở lý thuyết

Với mỗi điểm $z = (z_1, \dots, z_n) \in C^n$, ta ký hiệu $z' = (z_1, \dots, z_{n-1}) \in C^{n-1}$.

Cổ định các số nguyên dương m_1, m_2, \dots, m_{n-1} .

Khi đó, theo tứ tự ta gán trọng: $\frac{1}{2m_1}, \dots, \frac{1}{2m_{n-1}}$ cho các biến z_1, \dots, z_{n-1} .

Với đa chỉ số $K = (k_1, \dots, k_{n-1}) \in Z_{\geq 0}^{n-1}$, ta ký hiệu $\text{wt}(K) := \sum_{j=1}^{n-1} \frac{k_j}{2m_j}$ là trọng của nó.

Xét đa thức P theo biến z' giá trị thực, đa điều hòa dưới, không chứa hạng tử đa điều hòa, cho bởi:

$$(*) \quad P(z') = \sum_{\text{wt}(K)+\text{wt}(L)=1/2} a_{KL} z'^K \bar{z}'^L \quad \text{với } a_{KL} \in C \text{ với } a_{KL} = \bar{a}_{LK}. \quad (3)$$

Chú ý rằng đa thức P là đa thức thuần nhất theo trọng $(\frac{1}{m_1}, \dots, \frac{1}{m_{n-1}})$, tức là:

$$P\left(t^{\frac{1}{2m_1}} z_1, \dots, t^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}\right) = t \cdot P(z_1, \dots, z_{n-1}) \quad \text{với mọi } z' \in C^{n-1} \text{ và } t > 0. \quad (4)$$

Xét hai lớp miền đặc biệt là D_p và Q_p trong C^n ($n \geq 2$), được xác định lần lượt như sau:

$$D_p = \{z = (z', z_n) \in C^n: |z_n|^2 + P(z') < 1\};$$

* Tác giả liên hệ

Email: nguyenthilanhuong@humg.edu.vn

$$Q_p = \{z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^n: \operatorname{Re}(z_n) + P(z') < 0\}. \quad (5)$$

Đặt $S_\lambda (\lambda > 0)$, $T_s (s \in \mathbb{R})$ là nhóm tự đẳng cấu của M_p mà lần lượt được xác định bởi:

$$S_\lambda (z) = (\lambda^{1/2m_1} z_1, \dots, \lambda^{1/2m_{n-1}} z_{n-1}, \lambda z_n); \quad T_s (z) = (z', z_n + is). \quad (6)$$

Định nghĩa 1.1. Một mô hình M_p được gọi là ống (hoặc tròn xoay) nếu M_p là song chính hình tương đương với mô hình \overline{M}_p , trong đó đa thức thuần nhất có trọng \tilde{P} thỏa mãn:

$$\tilde{P}(z_1, \dots, z_{n-1}) = \tilde{P}(\operatorname{Im} z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \text{ (resp. } \tilde{P}(z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) = \tilde{P}(|z_1|, z_2, \dots, z_{n-1}))$$

với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Định nghĩa 1.2. Mô hình M_p được gọi là tổng quát nếu nó không song chính hình tương đương với mô hình tròn xoay hoặc mô hình ống nào.

Bằng cách khai triển P thành chuỗi Taylor tại $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$, ta có:

$$\begin{aligned} P(z') &= \sum_{\operatorname{wt}(K)=\operatorname{wt}(L)=1/2} a_{KL} z'^K z'^{-L}, \\ &= P(\alpha) + 2 \operatorname{Re} \sum_{|p|>0} \frac{D^p P(\alpha)}{p!} (z' - \alpha)^p + \sum_{|p|>0, |q|>0} \frac{D^p \overline{D}^q P(\alpha)}{p!q!} (z' - \alpha)^p (\overline{z'} - \overline{\alpha})^q, \end{aligned} \quad (7)$$

Trong đó D^p và \overline{D}^q lần lượt ký hiệu cho các toán tử vi phân đạo hàm riêng:

$$\frac{\partial^{|p|}}{\partial z_1^{p_1} \dots \partial z_{n-1}^{p_{n-1}}} \text{ và } \frac{\partial^{|q|}}{\partial \overline{z}_1^{q_1} \dots \partial \overline{z}_{n-1}^{q_{n-1}}} \quad (8)$$

Bằng cách đổi biến:

$$\begin{cases} w_n = z_n + P(\alpha) + 2 \sum_{|p|>0} \frac{D^p P(\alpha)}{p!} (z' - \alpha)^p \\ w' = z' - \alpha \end{cases} \quad (9)$$

Hàm xác định biên cho M_p được cho bởi:

$$\begin{aligned} \rho(z) &= \operatorname{Re} w_n + \sum_{|p|>0, |q|>0} \frac{D^p \overline{D}^q P(\alpha)}{p!q!} (w')^p (\overline{w'})^q \\ &= \operatorname{Re} w_n + \sum_{|p|>0, |q|>0; \operatorname{wt}(p)+\operatorname{wt}(q)<1} \frac{D^p \overline{D}^q P(\alpha)}{p!q!} (w')^p (\overline{w'})^q \\ &\quad + \sum_{|p|>0, |q|>0; \operatorname{wt}(p)+\operatorname{wt}(q)=1} \frac{D^p \overline{D}^q P(\alpha)}{p!q!} (w')^p (\overline{w'})^q \end{aligned} \quad (10)$$

Từ nay về sau, chúng ta giả thiết rằng M_p là tổng quát. Hơn nữa, chúng tôi đưa ra các ký hiệu sau đây:

$$P_{2m_1 \dots 2m_{n-1}}(\partial M_p) = \{z \in \partial M_p: M(z) = (2m_1, 2m_2, \dots, 2m_{n-1}, 1)\}; \quad \Gamma := \{(0', it): t \in \mathbb{R}\}. \quad (11)$$

Bổ đề 1.1 Cho P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng (m_1, \dots, m_{n-1}) cho bởi (*) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$. Giả sử M_p là tổng quát. Nếu tồn tại ít nhất một số nguyên trong các số m_1, \dots, m_{n-1} lớn hơn 2, thì $P_{2m_1 \dots 2m_{n-1}}(\partial M_p) = \Gamma := \{(0', it): t \in \mathbb{R}\}$.

Bây giờ chúng tôi chuẩn bị định lý sau như là một phần chính trong chứng minh của định lý 2.1.

Định lý 1.1 Cho P là đa thức thuần nhất có trọng với trọng (m_1, \dots, m_{n-1}) cho bởi (*) sao cho $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$. Giả sử M_p là một mô hình tổng quát mà không song chính hình với Q_p . Giả sử $f \in \operatorname{Aut}(M_p)$, $f(0) = 0$ và tồn tại các lân cận U_1, U_2 của $0 \in \mathbb{C}^n$ sao cho f thác triển thành đồng phôi địa phương giữa $U_1 \cap \overline{M}_p$ và $U_2 \cap \overline{M}_p$. Khi đó, sau khi hợp thành với $S_t (t > 0)$ hoặc với một phần tử của G_p nếu cần thiết, thì ta có $f = \operatorname{Id}$.

Chứng minh.

Chúng ta xác định tập H bằng cách đặt $H := \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} z < 0\}$ và biết rằng $\Gamma := \{(0', it): t \in \mathbb{R}\}$.

Khi đó, ta định nghĩa $g_j(z_n) := f_j(0', z_n) (1 \leq j \leq n-1)$ và $g_n(z_n) := f_n(0', z_n)$ với mọi $z_n \in H$.

Do đa kiểu Catlin là CR-bất biến nên từ bổ đề suy ra rằng, sau khi thu nhỏ các lân cận U_1, U_2 nếu cần thiết, $f(U_1 \cap \Gamma) = U_2 \cap \Gamma$.

Do đó, với mỗi $1 \leq j \leq n-1$ chúng ta có $g_j(it) = 0$ với mọi $-\varepsilon_0 < t < \varepsilon_0$ với $\varepsilon_0 > 0$ đủ nhỏ.

Khi đó, từ định lý đồng nhất suy ra rằng $g_j(z_n) = 0$ với mọi $z_n \in H$.

Hơn nữa, do $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$, chúng ta có $g_n \in \operatorname{Aut}(H)$.

Do $g_n(0) = 0$ nên ta có thể chỉ ra rằng $g_n(z_n) = \frac{\alpha z_n}{1 + i\beta z_n}$ với $\alpha > 0$ và $\beta \in \mathbb{R}$ nào đó.

Thêm nữa, do $f_n(M_p) \subset H$ và f là song chính hình nên ta thu được:

$$f_n(z) = f_n(0', z_n) = \frac{\alpha z_n}{1 + i\beta z_n} \text{ với } \alpha > 0 \text{ và } \beta \in \mathbb{R}.$$

Bây giờ ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\beta \neq 0$.

Trong trường hợp này, bằng cách khai triển f_n thành chuỗi Taylor, ta thu được:

$$f_n(z) = \frac{\alpha z_n}{1 + i\beta z_n} = \alpha z_n - i\beta \alpha z_n^2 + \dots \quad (12)$$

Trong đó các dấu “...” ký hiệu cho các hạng tử có bậc theo trọng lớn hơn 2.

Hơn nữa, do tính không bất biến của $\overline{M_P}$ dưới ánh xạ $S_t(t > 0)$, chúng ta có:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left(f_n \left(t^{\frac{1}{2m_1}} z_1, \dots, t^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}, t z_n \right) \right) \\ & + P \left(f_1 \left(t^{\frac{1}{2m_1}} z_1, \dots, t^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}, t z_n \right), \dots, f_{n-1} \left(t^{\frac{1}{2m_1}} z_1, \dots, t^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}, t z_n \right) \right) \leq 0 \quad (13) \end{aligned}$$

Với mọi $(z', z_n) \in U_1 \cap \overline{M_P}$ và $t \in (0, 1)$.

Do đó, ta có:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(\alpha t z_n - i\beta \alpha t^2 z_n^2 + o(t^2)) \\ & + P \left(f_1 \left(t^{\frac{1}{2m_1}} z_1, \dots, t^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}, t z_n \right), \dots, f_{n-1} \left(t^{\frac{1}{2m_1}} z_1, \dots, t^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}, t z_n \right) \right) \leq 0 \quad (14) \end{aligned}$$

Với mọi $(z', z_n) \in U_1 \cap \overline{M_P}$ và $t \in (0, 1)$.

Không mất tính tổng quát, ta giả thiết rằng $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{n-1}$.

Từ sau đây, ký hiệu $h_s(z)$ được ký hiệu cho các mầm hàm chỉnh hình tại gốc với bậc theo trọng lớn hơn s ($s > 0$).

Chúng ta sẽ chứng minh rằng $df = \operatorname{Id}$ tại gốc tọa độ, sai khác một phép hợp thành với một phần tử của G_P .

Để chứng minh điều này, chúng ta chia ra hai trường hợp sau đây:

Trường hợp con 1: $m_1 > m_2 > \dots > m_{n-1}$.

Cố định $z \in U_1 \cap \partial M_P$.

Khi đó, do $\operatorname{Re} \left(f_n \left(t^{\frac{1}{2m_1}} z_1, \dots, t^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}, t z_n \right) \right) = \alpha t \operatorname{Re} z_n + o(t)$ nên ta suy ra rằng:

$$\begin{aligned} & P \left(f_1 \left(t^{\frac{1}{2m_1}} z_1, \dots, t^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}, t z_n \right), \dots, f_{n-1} \left(t^{\frac{1}{2m_1}} z_1, \dots, t^{\frac{1}{2m_{n-1}}} z_{n-1}, t z_n \right) \right) \\ & = \alpha t \operatorname{Re} z_n + o(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Hơn nữa, do $t^{\frac{1}{2m_1}} > t^{\frac{1}{2m_2}} > \dots > t^{\frac{1}{2m_{n-1}}}$ với mọi $t \in (0, 1)$ nên ta có với mỗi $1 \leq j \leq n-1$ thì:

$$f_j(z) = a_{j,j} z_j + h_{1/2m_j}(z), \text{ trong đó } a_{1,1}, \dots, a_{n-1,n-1} \neq 0. \quad (16)$$

Tiếp đến, thay f bởi $S_{1/\alpha} \circ f$, chúng ta có thể giả thiết rằng $\alpha = 1$.

Lấy đạo hàm riêng cấp 1 cả 2 vế của bất đẳng thức trên theo t và sau đó tính giới hạn khi $t \rightarrow 0^+$, ta thu được:

$$\operatorname{Re} z_n + P(a_{1,1} z_1, a_{2,2} z_2, \dots, a_{n-1,n-1} z_{n-1}) < 0, \text{ với mọi } (z', z_n) \in M_P. \quad (17)$$

Tính toán tương tự cho f^{-1} ta cũng thu được:

$$\operatorname{Re} z_n + P(a_{1,1}^{-1} z_1, a_{2,2}^{-1} z_2, \dots, a_{n-1,n-1}^{-1} z_{n-1}) < 0, \text{ với mọi } (z', z_n) \in M_P. \quad (18)$$

Hơn nữa, chúng ta cũng có thể kết luận rằng:

$$\operatorname{Re} z_n + P(a_{1,1} z_1, a_{2,2} z_2, \dots, a_{n-1,n-1} z_{n-1}) < 0. \quad (19)$$

Khi và chỉ khi $\operatorname{Re} z_n + P(z') < 0$, và do đó:

$$g(z) := (a_{1,1} z_1, a_{2,2} z_2, \dots, a_{n-1,n-1} z_{n-1}, z_n). \quad (20)$$

Là tự đẳng cấu của M_P , tức là $g \in G_P$.

Thay thế f bởi $f \circ g^{-1}$, ta suy ra rằng $a_{1,1} = \dots = a_{n-1,n-1} = 1$.

Vì vậy ta thu được $df = \operatorname{Id}$ tại gốc tọa độ.

Trường hợp con 2: $m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{n-1}$.

Theo chứng minh ở trường hợp con 1, ta có thể viết $f(z) = (Az' + g(z), z_n)$, trong đó $g = (g_1, \dots, g_{n-1})$ là hàm chỉnh hình trong lân cận của gốc tọa độ \mathbb{C}^n sao cho mỗi g_j có bậc theo trọng lớn hơn $\frac{1}{2m_j}$, $j = 1, \dots, n-1$.

Nhóm các hạng tử có bậc theo trọng bằng 1, từ trên ta suy ra ánh xạ $(z', z_n) \mapsto (Az', z_n)$ thuộc G_P .

Do đó, sau khi lấy hợp với $(z', z_n) \mapsto (A^{-1}z', z_n)$, ta có thể giả sử $df = \operatorname{Id}$ tại gốc tọa độ.

Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh $f = \operatorname{Id}$.

Giả sử ngược lại, $f \neq \operatorname{Id}$.

Chúng ta cũng giả thiết thêm là $f(z) = z + g(z)$, tức là với mọi $1 \leq j \leq n-1$, $f_j = z_j + g_j(z)$,

trong đó $g = (g_1, \dots, g_{n-1})$ là chỉnh hình trong lân cận của gốc tọa độ trong \mathbb{C}^n sao cho mỗi g_j có bậc theo trọng lớn hơn $1/2m_j$, $j = 1, \dots, n-1$.

Do đó chúng ta có:

$$\operatorname{Re}(z_n - i\beta z_n^2 + \dots) + P(z_1 + g_1(z), z_2 + g_2(z), \dots, z_{n-1} + g_{n-1}(z)) - 0 \quad (21)$$

Với mọi $z \in U_1 \cap \partial M_P$, hoặc tương đương:

$$Re z_n + Re(-i\beta z_n^2) + P(z') + 2 Re \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial P}{\partial z_j}(z') g_j(z) \right) + h_2(z) = 0 \text{ với mọi } z \in U_1 \cap \partial M_P. \quad (22)$$

Điều này suy ra:

$$Re(-i\beta z_n^2) + 2 Re \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial P}{\partial z_j}(z') g_j(z) \right) + h_2(z) = 0, \text{ với mọi } z \in U_1 \cap \partial M_P. \quad (23)$$

Bây giờ, nếu chúng ta đặt $z_n = -P(z') + it$ với $t \in \mathbb{R}$, thì $z_n^2 = P^2(z') - t^2 - 2itP(z')$, và do đó $Re(-i\beta z_n^2) = -2\beta tP(z')$.

Đổi biến số ta thu được:

$$-2\beta tP(z') + 2 Re \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial P}{\partial z_j}(z') g_j(z', -P(z') + it) \right) + h_2(z) = 0. \quad (23)$$

Đặt hệ số của t^k bằng 0 với $k \in \mathbb{N}$, chúng ta kết luận rằng $g_j(z) = a_j z_n z_j + \dots$ với $j = 1, \dots, n-1$, trong đó các dấu “...” là biểu diễn cho các hạng tử có bậc theo trọng cao hơn.

Lấy đạo hàm các hạng tử có bậc theo trọng bằng 1 theo t tại $t = 0$, ta có:

$$P(z') = \frac{1}{\beta} Re \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial P}{\partial z_j}(z') i a_j z_j \right). \quad (24)$$

Do đó, theo bổ đề, chúng ta có $a_j = -i\beta/m_j$ với $j = 1, \dots, n-1$.

Nhóm các số hạng có bậc theo trọng bằng 1 tại $t = 0$ và sử dụng bổ đề, chúng ta có:

$$P(z') = \sum_{wt(K)=wt(L)=1/2} a_{KL} z'^K z'^L, \text{ trong đó } a_{KL} \in \mathbb{C} \text{ với } a_{KL} = \bar{a}_{KL}. \quad (25)$$

Khi đó, nếu $\beta \neq 0$ thì M_P là song chỉnh hình với Q_P , điều đó dẫn tới mâu thuẫn.

Trường hợp 2: $\beta = 0$

Trong trường hợp này, chúng ta có ngay $f_n(z) = \alpha z_n$ với $\alpha > 0$.

Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $\alpha = 1$.

Do f có thể thác triển tới biên của M_P nên chúng ta thu được:

$$Re z_n + P(f_1(z), \dots, f_{n-1}(z)) \leq 0 \text{ khi và chỉ khi } Re z_n + P(z') \leq 0. \quad (26)$$

Chúng ta lưu ý rằng f_1, \dots, f_{n-1} là độc lập với các biên z_n bởi vì tính bất biến của biên dưới tác động của nhóm tự đẳng cấu. Hơn nữa, f_1, \dots, f_{n-1} có thể thác triển tới hàm chỉnh hình trong lân cận của $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Điều này suy ra $P(f_1(z'), \dots, f_{n-1}(z')) = P(z')$ với mọi z' trong một lân cận của $0 \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Do đó từ bổ đề suy ra rằng $f \in G_P$ và do đó chúng minh được hoàn thành.

3. Kết quả nghiên cứu chính

Định lý 2.1 Cho M_P là một mô hình tổng quát thỏa mãn M_P không song chỉnh hình với Q_P và $P(z') > 0$ với mọi $z' \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\}$. Nếu M_P là miền WB thì $Aut(M_P)$ được sinh bởi:

$$\{T_t, S_\lambda: t \in \mathbb{R}, \lambda > 0\} \cup G_P. \quad (27)$$

Chứng minh.

Lấy $f \in Aut(M_P)$ tùy ý.

Khi đó, tồn tại $p \in \Gamma$ và $q \in \Gamma$ sao cho f và f^{-1} lần lượt thác triển tới hàm chỉnh hình trong lân cận của p và q và $f(p) = q$.

Thay f bởi hàm hợp của nó với phép tịnh tiến T_t phù hợp, ta giả sử rằng $p = q = (0,0)$, và tồn tại lân cận U_1 và U_2 của $(0,0)$ sao cho $U_2 \cap \partial M_P = f(U_1 \cap \partial M_P)$, và f, f^{-1} lần lượt là chỉnh hình trong U_1 và U_2 . Hơn nữa, f là CR- vì phù giữa $U_1 \cap \partial M_P$ và $U_2 \cap \partial M_P$. Vì vậy, từ định lý 1.1 ta thu được điều cần chứng minh.

4. Ví dụ áp dụng

Ví dụ. Cho Ω_{HKL} là miền Kohn-Nirenberg xác định bởi:

$$\Omega_{HKL} := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2: Re w + |z|^8 + \frac{15}{7}|z|^2 Re(z^6) < 0\}. \quad (28)$$

Trong trường hợp này, đa thức P được cho bởi: $P(z) = |z|^8 + \frac{15}{7}|z|^2 Re(z^6)$.

Chúng ta thấy rằng P là thuần nhất bậc 8 và $P(f(z)) \equiv P(z)$ khi và chỉ khi $f(z) = e^{k\pi i/3} z$ với $k \in \{0, 1, \dots, 5\}$.

Do đó, theo định lý 2.1 chúng ta có:

$$Aut(\Omega_{HKL}) := \{(z, w) \mapsto (\sqrt[8]{\lambda} e^{k\pi i/3} z, \lambda w + it): k = 0, \dots, 5; t \in \mathbb{R}, \lambda > 0\}. \quad (28)$$

5. Kết luận

Báo cáo đã giới thiệu một kết quả nghiên cứu về nhóm tự đẳng cấu của mô hình kiểu hữu hạn trong \mathbb{C}^n và ứng dụng của kết quả đó. Hướng nghiên cứu có thể được tiếp tục phát triển cho các mô hình khác trong \mathbb{C}^n .

Tài liệu tham khảo

A. Zimmer, 2018. A gap theorem for the complex geometry of convex domains, *Trans. Amer. Math. Soc.* 370 (10), 7489-7509.

Do Duc Thai and Ninh Van Thu, 2009. Characterization of domains in \mathbb{C}^n by their noncompact automorphisms groups, *Nagoya Math. J.* 196, 135-160.

Ninh Van Thu, 2009. Characterization of linearly convex domains in \mathbb{C}^n by their noncompact automorphisms groups, *Vietnam J. Math.* 37, no. 1, 67-79.

ABSTRACT

Automorphic group of finite type model

Nguyen Thi Lan Huong

Hanoi University of Mining and Geology

In the few past decades, studies have shown that the geometry of the domain is determined by the structure of the auto-isomorphic group, that is, knowing the $\text{aut}(\Omega)$ group, we can infer some geometric properties of the domain Ω . Therefore, it is necessary to calculate or describe the autoisomorphic group. In this report, the author gives some research results on automorphic groups of finite type models and some examples applying to the research results.

Keywords: Automorphism; domain; finite.

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn

Nguyễn Thế Lâm*

* Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn là một kỹ thuật quan trọng trong thống kê, giúp đơn giản hoá các phép tính và phân tích. Khi phân phối nhị thức được xấp xỉ bằng phân phối chuẩn, chúng ta có thể áp dụng các kỹ thuật thống kê ngay cả trong các bài toán liên quan đến phân phối nhị thức. Phân phối nhị thức là phân phối rời rạc. Phân phối chuẩn thường là một xấp xỉ tốt đối với phân phối rời rạc khi các số liệu của phân phối rời rạc tạo nên một đường gấp khúc có hình dáng giống với một quả chuông. Mục đích của báo cáo này là để chỉ ra khi nào thì phân phối chuẩn là một xấp xỉ tốt của phân phối nhị thức. Việc minh hoạ cho sự xấp xỉ chuẩn của phân phối nhị thức là dựa vào vẽ biểu đồ của phân bố nhị thức và phân bố chuẩn có cùng trung bình và phương sai đối với biến ngẫu nhiên nhị thức X và đây cũng là một cách giảng dạy mới giúp các em sinh viên dễ hiểu hơn. Báo cáo đã chỉ ra sự xấp xỉ này là rất chính xác khi n lớn và khá chính xác khi n nhỏ và p gần đáng kể với 0.5 dựa vào 4 biểu đồ minh hoạ và Bảng 1.

Từ khóa: Phân phối nhị thức; phân phối chuẩn; rời rạc; xấp xỉ chuẩn.

1. Đặt vấn đề

Để hiểu được phần chứng minh định lý về “xấp xỉ chuẩn của phân phối nhị thức” là rất khó đối với sinh viên. Việc chứng minh định lý này khá phức tạp, ta phải sử dụng đến các định lý trung gian. Hơn nữa việc giải các bài toán về phân phối nhị thức mà sử dụng công thức xấp xỉ chuẩn, nếu sinh viên chỉ máy móc lắp công thức tính toán thì chẳng có ý nghĩa gì. Tuy nhiên nếu trong quá trình giảng dạy, giảng viên đưa thêm phần biểu đồ vào thì sinh viên sẽ dễ hình dung hơn và dựa vào các biểu đồ các em cũng tự rút ra được khi nào thì xấp xỉ là tốt hơn. Xác suất liên quan đến các thực nghiệm nhị thức được tính bởi công thức $b(x; n, p) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}$ (Đào Hữu Hồ, 2001) trong phân phối nhị thức hoặc được tra từ Bảng khi n nhỏ. Thêm vào đó, xác suất nhị thức cũng được tính sẵn trong một số phần mềm máy tính. Tuy nhiên, chúng ta cũng nên tìm hiểu về mối quan hệ giữa phân phối nhị thức và phân phối chuẩn. Phân phối nhị thức là phân phối rời rạc. Phân phối chuẩn thường là một xấp xỉ tốt đối với phân phối rời rạc khi các số liệu của phân phối rời rạc tạo nên một đường gấp khúc có hình dáng giống với một quả chuông. Theo lý thuyết, một số phân phối hội tụ tới phân phối chuẩn khi các tham số của nó tiến tới một giá trị xác định. Phân phối chuẩn là một phân phối xấp xỉ thuận tiện vì hàm phân phối của nó rất dễ lập bảng. Phân phối nhị thức được xấp xỉ một cách khá tốt bởi phân phối chuẩn trong các bài toán thực hành khi mà người ta làm việc với hàm phân phối. Bây giờ chúng ta sẽ phát biểu định lý mà nó cho phép chúng ta dùng diện tích hình bên dưới đường cong chuẩn để xấp xỉ cho xác suất nhị thức khi n đủ lớn.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

Định lý 2.1 (Đặng Hùng Thắng, 2009)

Giả sử X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc có phân phối nhị thức với tham số n, p . Khi đó X có phân bố xấp xỉ phân bố chuẩn với giá trị trung bình $\mu = np$ và độ lệch tiêu chuẩn $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ với điều kiện $np \geq 5, n(1-p) \geq 5$.

Việc chứng minh định lý trên có dựa vào định lý giới hạn trung tâm và lý thuyết hàm đặc trưng. Tuy nhiên nó phức tạp và cũng không phải là mục đích của bài báo nên sẽ không trình bày ở đây.

Người ta còn thấy rằng phân phối chuẩn với $\mu = np$ và $\sigma^2 = np(1-p)$ không chỉ là một xấp xỉ rất chính

* Tác giả liên hệ

Email: nguyenthelam@hmg.edu.vn

xác của phân phối nhị thức khi n lớn và p không quá gần với 0 và 1 mà nó còn là một xấp xỉ khá tốt ngay cả khi n nhỏ và p gần bằng $\frac{1}{2}$ (Walpole- Raymond. H. Myers và Sharon L. Myers, 2016).

Để minh họa cho sự xấp xỉ chuẩn của phân phối nhị thức, đầu tiên chúng ta vẽ biểu đồ của $b(x; n, p)$ và vẽ lên trên cùng hình đó đường cong chuẩn đặc biệt có cùng trung bình và phương sai đối với biến ngẫu nhiên nhị thức X .

3. Kết quả và thảo luận

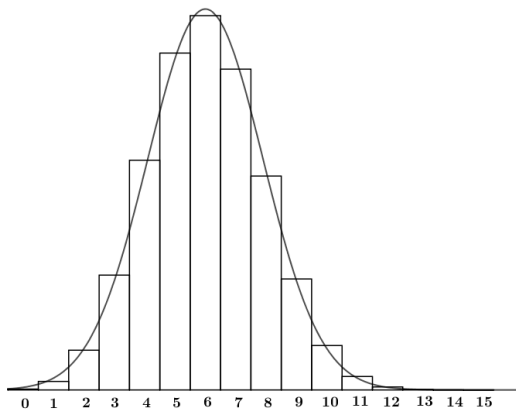
Để minh họa cho sự xấp xỉ chuẩn của phân phối nhị thức, đầu tiên chúng ta vẽ biểu đồ của $b(x; 15, 0.4)$ và vẽ lên trên cùng hình đó đường cong chuẩn đặc biệt có cùng trung bình và phương sai đối với biến ngẫu nhiên nhị thức X . Tức là chúng ta vẽ đường cong chuẩn với $\mu = np = 15(0.4) = 6$ và $\sigma^2 = npq = 15(0.4)(0.6) = 3.6$.

Biểu đồ của $b(x; 15, 0.4)$ và đường cong chuẩn tương ứng trên cùng một hình được minh họa bởi Hình 1. Xác suất chính xác của biến ngẫu nhiên nhị thức X tương ứng với giá trị x cho trước bằng diện tích của hình chữ nhật có tâm đáy là x . Ví dụ, xác suất chính xác để X nhận giá trị bằng 4 bằng diện tích của hình chữ nhật có tâm đáy là 4. Dùng Bảng , chúng ta tìm ra diện tích của hình này xấp xỉ bằng với diện tích của hình được bôi đen nằm bên dưới đường cong chuẩn giữa hai trục $x_1 = 3.5$ và $x_2 = 4.5$ trong Hình 2. Giá trị của z tương ứng là $z_1 = \frac{3.5-6}{1.897} = -1.32$ và $z_2 = \frac{4.5-6}{1.897} = -0.79$.

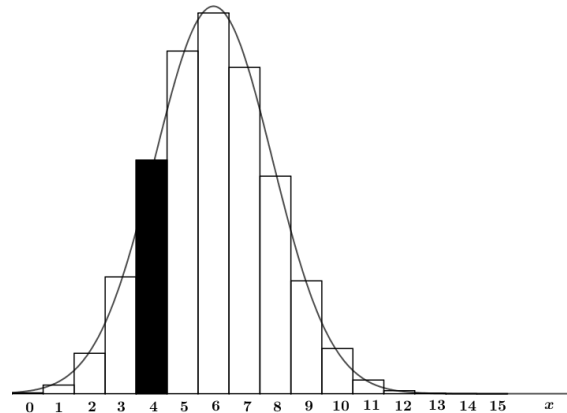
Nếu X là biến ngẫu nhiên nhị thức và Z là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn tắc thì

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= b(4; 15, 0.4) \approx P(-1.32 < Z < -0.79) \\ &= P(Z < -0.79) - P(Z < -1.32) = 0.2148 - 0.0934 = 0.1214. \end{aligned} \quad (1)$$

Thực tế, kết quả này rất gần với kết quả chính xác là 0.1268.



Hình 1. Xấp xỉ chuẩn của $b(x; 15, 0.4)$.



Hình 2. Xấp xỉ chuẩn của $b(4; 15, 0.4)$

Xấp xỉ chuẩn có tác dụng nhiều nhất trong việc tính tổng xác suất nhị thức đối với giá trị n lớn. Nhờ vào Hình 2, chúng ta có thể tính xác suất để X nhận giá trị từ 7 đến 9. Xác suất chính xác được cho bởi:

$$\begin{aligned} P(7 \leq X \leq 9) &= \sum_{x=7}^9 b(x; 15, 0.4) = \sum_{x=0}^9 b(x; 15, 0.4) - \sum_{x=0}^6 b(x; 15, 0.4) \\ &= 0.9662 - 0.6098 = 0.3564 \end{aligned}$$

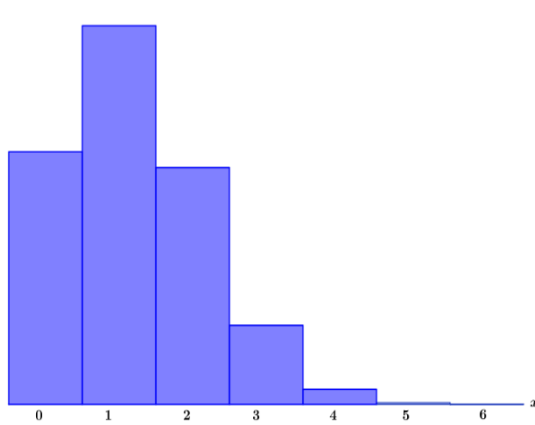
Giá trị này bằng tổng diện tích của các hình chữ nhật với đáy đặt tại $x = 7, 8$ và 9 . Đối với xấp xỉ chuẩn chúng ta tìm thấy diện tích của phần bên dưới đường cong chuẩn giữa hai trục $x_1 = 6.5$ và $x_2 = 9.5$ trong Hình 2.

$$\text{Các giá trị của } z \text{ tương ứng là: } z_1 = \frac{6.5-6}{1.897} = 0.26 \text{ và } z_2 = \frac{9.5-6}{1.897} = 1.85.$$

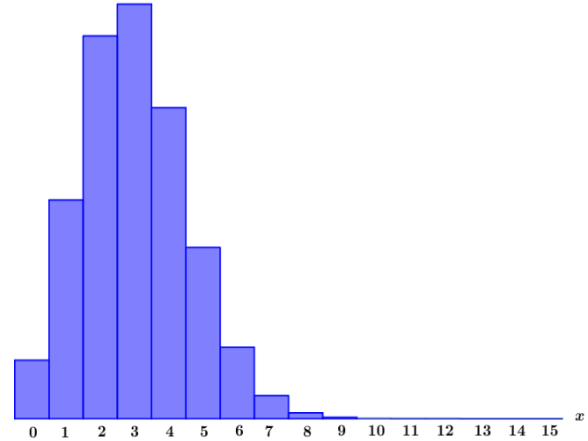
Khi đó:

$$P(7 \leq X \leq 9) \cong P(0.26 < Z < 1.85) \\ = P(Z < 1.85) - P(Z < 0.26) = 0.9678 - 0.6026 = 0.3652. \quad (2)$$

Một lần nữa, đường cong chuẩn xấp xỉ cung cấp một giá trị rất gần với giá trị chính xác 0.3564. Độ chính xác dựa vào mức độ mà đường cong chuẩn nằm gần biểu đồ, độ chính xác này sẽ tăng khi n tăng. Điều này cũng đúng đặc biệt khi p không thực gần $\frac{1}{2}$ và biểu đồ không có tính đối xứng. Hình 3 và 4 chỉ ra hai biểu đồ của $b(x; 6, 0.2)$ và $b(x; 15, 0.2)$. Nó là một bằng chứng cho thấy đường cong chuẩn sẽ nằm sát biểu đồ khi $n=15$ hơn là khi $n=6$.



Hình 3. Biểu đồ của $b(x; 6, 0.2)$



Hình 4. Biểu đồ của $b(x; 15, 0.2)$

Bảng 1. Xấp xỉ chuẩn và xác suất chính xác của nhị thức tích lũy.

	$p = 0.05$	$n = 10$	$p = 0.10$	$n = 10$	$p = 0.50$	$n = 10$
r	Nhị thức	Chuẩn	Nhị thức	Chuẩn	Nhị thức	Chuẩn
0	0.5987	0.5000	0.3487	0.2981	0.00010	0.0022
1	0.9139	0.9265	0.7361	0.7019	0.0107	0.0136
2	0.9885	0.9981	0.9298	0.9429	0.0547	0.0571
3	0.9990	1.0000	0.9872	0.9959	0.1719	0.1711
4	1.0000	1.0000	0.9984	0.9999	0.3770	0.3745
5			1.0000	1.0000	0.6230	0.6255
6					0.8281	0.8289
7					0.9453	0.9429
8					0.9893	0.9894
9					0.9990	0.9978
10					1.0000	0.9997
$p = 0.05$						
		$n = 20$	$n = 50$	$n = 100$		
r	Nhị thức	Chuẩn	Nhị thức	Chuẩn	Nhị thức	Chuẩn
0	0.3585	0.3015	0.0769	0.0968	0.0059	0.0197
1	0.7358	0.6985	0.2794	0.2578	0.0371	0.0537
2	0.9245	0.9382	0.5405	0.5000	0.1183	0.1251
3	0.9841	0.9948	0.7604	0.7422	0.2278	0.2451
4	0.9974	0.9998	0.8964	0.9032	0.4360	0.4090
5	0.9997	1.0000	0.9622	0.9744	0.6160	0.5910
6	1.0000	1.0000	0.9882	0.9953	0.7660	0.7549
7			0.9968	0.9994	0.8720	0.8749
8			0.9992	0.9999	0.9369	0.9463
9			0.9998	1.0000	0.9718	0.9803
10			1.0000	1.0000	0.9885	0.9941

Trong Bảng 1 (Bộ môn toán, trường Đại học Thủy Lợi, 2010) ở trên khi $p = 0,05$ và $p = 0,1; n = 10$ thì kết quả xấp xỉ khá thô. Tuy nhiên nếu tăng $p = 0,5$ thì kết quả xấp xỉ ít chênh lệch hơn. Chất lượng xấp xỉ được cải thiện khi $n = 20$ đến $n = 100$.

Trong Bảng 1 cột “nhị thức” chính là $\sum_{x=0}^r b(x, n, p)$; cột “chuẩn” chính là $P(Z < \frac{r + 0,5 - np}{\sqrt{np(1-p)}})$ với Z có phân bố chuẩn tắc.

4. Kết luận

Tóm lại, chúng ta sử dụng xấp xỉ chuẩn để tính xác suất nhị thức khi p không quá gần 0 hoặc 1. Sự xấp xỉ này là rất chính xác khi n lớn và khá chính xác khi n nhỏ và p gần đáng kể với 0.5. Một cách nữa để xác định xem khi nào nên dùng xấp xỉ chuẩn là tính giá trị của np và nq . Nếu cả hai giá trị này đều lớn hơn hoặc bằng 5 thì kết quả xấp xỉ là tốt.

Như chúng ta đã chỉ ra ở phần đầu, chất lượng của xấp xỉ là khá tốt khi giá trị n lớn. Nếu p gần với $\frac{1}{2}$, một mẫu nhỏ hoặc vừa phải cũng đủ cho một xấp xỉ hợp lí.

Tài liệu tham khảo

Bộ môn toán, trường Đại học Thủy Lợi, 2010. *Xác suất và thống kê*, NXB Khoa Học Tự Nhiên Và Công nghệ Hà nội, trang 181 – 194.

Đặng Hùng Thắng, 2009. *Thống kê và ứng dụng*, NXB Giáo dục, trang 57 – 60 .

Đào Hữu Hồ, 2001. *Xác suất thống kê*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, trang 57 – 62.

Walpole- Raymond. H. Myers and Sharon L. Myers, 2016. *Probability and statistics for Engineers and scientists* (xuất bản lần thứ 9 tại Hoa Kỳ), trang 188 – 191.

ABSTRACT

Normal approximation of the binomial distribution

Nguyen The Lam

Hanoi University of Mining and Geology

Approximating the binomial distribution by the normal distribution is an important technique in statistics, helping to simplify calculations and analysis. Since the binomial distribution is approximated by the normal distribution, we can apply statistical techniques even in problems involving binomial distributions. The binomial distribution is a discrete distribution. The normal distribution is often a good approximation to the discrete distribution when the figures of the discrete distribution form a kink shaped like a bell. The purpose of this report is to show when the normal distribution is a good approximation of the binomial distribution. The illustration of the normal approximation of the binomial distribution is based on plotting the binomial distribution and the normal distribution with the same mean and variance for the binomial random variable X and this is also a new way of teaching to help students learn more easily. The report pointed out that This approximation is very accurate when n is large and quite accurate when n is small and p is significantly close to 0.5 based on four illustrative plots and table 1.

Keywords: Binomial distribution; normal distribution; discrete; approximately normal.

ChatGPT trong Trường Đại học: Cơ hội và thách thức

Lê Bích Phượng*
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Trong thời đại công nghiệp 4.0, sự phát triển của trí tuệ nhân tạo đã mở ra nhiều cánh cửa mới trong lĩnh vực giáo dục đại học, nghiên cứu khoa học và tranh biện. ChatGPT là một mô hình ngôn ngữ tiên tiến của OpenAI, không chỉ là một công cụ giải trí mà còn có ứng dụng rộng rãi trong việc hỗ trợ các nhà nghiên cứu và tranh biện viên. Bài viết này sẽ tập trung trình bày về những ứng dụng quan trọng của ChatGPT trong các lĩnh vực này.

Từ khóa: Giáo dục đại học; chatGPT; nghiên cứu; tranh biện.

1. Đặt vấn đề

Trong thời kỳ chuyển đổi số, giáo dục đang trải qua những thay đổi sâu sắc nhờ sự phát triển nhanh chóng của công nghệ thông tin và truyền thông. ChatGPT là một mô hình ngôn ngữ mạnh mẽ, có tiềm năng lớn trong việc hỗ trợ các hoạt động giáo dục, đặc biệt trong các trường đại học (Dempere và nnk, 2023). Việc ứng dụng ChatGPT trong môi trường đại học không chỉ giúp tối ưu hóa quá trình thu thập và xử lý thông tin mà còn cải thiện hiệu quả giảng dạy và học tập (Chinedu Wilfred Okonkwo và Abejide Ade-Ibijola, 2021).

Mặc dù ChatGPT mang lại nhiều lợi ích nhưng vẫn còn một số thách thức và tồn tại cần được giải quyết: ChatGPT cần phải được điều chỉnh để phù hợp với ngữ cảnh và nội dung học thuật đặc thù của từng môn học. Đảm bảo độ chính xác và đáng tin cậy của thông tin mà ChatGPT cung cấp. Cần phát triển các phương pháp đánh giá hiệu quả của việc sử dụng ChatGPT trong giảng dạy và học tập.

Những công việc chủ yếu đã thực hiện trong nghiên cứu: Khảo sát và phân tích tiềm năng ứng dụng của ChatGPT trong môi trường giáo dục đại học. Nghiên cứu các phương pháp và công nghệ liên quan đến xử lý ngôn ngữ tự nhiên của ChatGPT. Thực hiện các thí nghiệm để đánh giá hiệu quả của ChatGPT trong việc hỗ trợ giảng dạy và học tập.

Các kết quả chính đạt được: ChatGPT cho thấy khả năng hỗ trợ hiệu quả trong việc so sánh và tổng hợp ý kiến từ nhiều nguồn khác nhau, giúp sinh viên và giảng viên có cái nhìn toàn diện về các chủ đề nghiên cứu. Mô hình này cũng giúp xây dựng các mô hình dự đoán trong nghiên cứu khoa học, từ đó tối ưu hóa quá trình nghiên cứu và phát triển. Khả năng tạo lập luận và kiểm soát thông tin của ChatGPT góp phần nâng cao chất lượng tranh biện và thảo luận trong môi trường học thuật.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lý thuyết

Trong bối cảnh chuyển đổi số hiện nay, việc ứng dụng các công nghệ tiên tiến vào giảng dạy đang ngày càng trở nên phổ biến và cần thiết. Một trong những công nghệ đáng chú ý là ChatGPT - một mô hình ngôn ngữ tự nhiên mạnh mẽ của OpenAI. ChatGPT có khả năng hỗ trợ và cải thiện quá trình học tập và giảng dạy thông qua việc cung cấp thông tin, giải đáp thắc mắc, và hỗ trợ nghiên cứu. Việc ứng dụng ChatGPT trong giảng dạy các môn học tại trường đại học, đặc biệt là các môn yêu cầu tính toán và phân tích như xác suất và thống kê, có thể mang lại nhiều lợi ích và tiềm năng (Adiguzel và nnk, 2023).

Cơ sở lý thuyết của nghiên cứu này dựa trên các khái niệm và lý thuyết về trí tuệ nhân tạo (AI), xử lý ngôn ngữ tự nhiên (NLP) và giáo dục số. Các công nghệ AI, đặc biệt là mô hình ngôn ngữ như ChatGPT, đã chứng minh được khả năng hỗ trợ hiệu quả trong nhiều lĩnh vực bao gồm cả giáo dục (Miguel và nnk, 2023).

2.2. Phương pháp nghiên cứu

* Tác giả liên hệ

Email: lebichphuong@humg.edu.vn

Nghiên cứu này sử dụng phương pháp nghiên cứu hỗn hợp, bao gồm cả nghiên cứu định tính và định lượng để đánh giá hiệu quả của việc ứng dụng ChatGPT trong giảng dạy tại trường đại học. Các bước thực hiện nghiên cứu bao gồm:

Khảo sát và phân tích nhu cầu: Tiến hành khảo sát để thu thập dữ liệu về nhu cầu và mong muốn của sinh viên và giảng viên trong việc sử dụng các công cụ hỗ trợ học tập như ChatGPT. Dữ liệu này giúp xác định các khía cạnh cụ thể cần cải thiện và phát triển trong quá trình giảng dạy.

Thử nghiệm và đánh giá: Tiến hành các thử nghiệm ứng dụng ChatGPT trong các lớp học và khóa học cụ thể. Các thử nghiệm này bao gồm việc sử dụng ChatGPT để giải đáp thắc mắc của sinh viên, hỗ trợ bài tập, và cung cấp thông tin tham khảo. Sau các thử nghiệm, tiến hành thu thập phản hồi từ sinh viên và giảng viên để đánh giá hiệu quả của ChatGPT.

Phân tích dữ liệu: Sử dụng các phương pháp phân tích định lượng và định tính để xử lý và phân tích dữ liệu thu thập được. Phân tích định lượng bao gồm các phương pháp thống kê để đánh giá mức độ cải thiện trong kết quả học tập của sinh viên. Phân tích định tính bao gồm việc mã hóa và phân loại các phản hồi từ sinh viên và giảng viên để rút ra những kết luận về ưu điểm và hạn chế của ChatGPT trong giảng dạy.

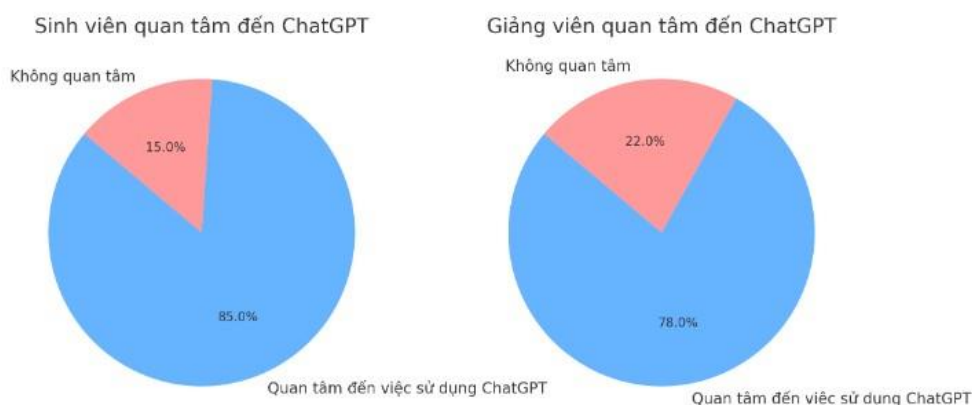
Tổng kết và đề xuất: Dựa trên các kết quả phân tích, tổng kết lại những điểm mạnh và yếu của việc ứng dụng ChatGPT trong giảng dạy, từ đó đề xuất các giải pháp và chiến lược cải thiện. Các đề xuất này nhằm tối ưu hóa việc sử dụng ChatGPT để nâng cao chất lượng giảng dạy và học tập tại trường đại học trong thời kỳ chuyển đổi số.

Việc thực hiện nghiên cứu theo các bước trên không chỉ giúp xác định được hiệu quả của ChatGPT mà còn cung cấp những cơ sở thực tiễn để phát triển và ứng dụng các công nghệ AI khác trong giáo dục.

3. Kết quả và thảo luận

3.1. Kết quả

Phản hồi từ sinh viên và giảng viên (Hình 1): Khảo sát đã thu thập được phản hồi từ 200 sinh viên và 50 giảng viên tại các trường đại học khác nhau. Kết quả cho thấy 85% sinh viên và 78% giảng viên quan tâm đến việc sử dụng ChatGPT như một công cụ hỗ trợ học tập và giảng dạy. Đa số sinh viên cho rằng ChatGPT có thể giúp họ giải đáp thắc mắc nhanh chóng và cung cấp thông tin bổ ích. Giảng viên nhận định rằng ChatGPT có thể giảm tải công việc và giúp họ tập trung vào những nhiệm vụ quan trọng hơn.



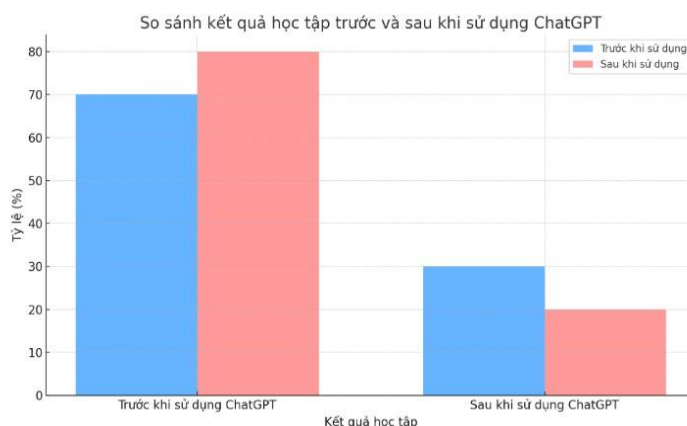
Hình 1. Thống kê tỷ lệ quan tâm đến chat GPT của giảng viên và sinh viên.

Hiệu quả của ChatGPT trong các lớp học: Trong các lớp học thử nghiệm, ChatGPT được sử dụng để giải đáp thắc mắc, hỗ trợ bài tập và cung cấp thông tin tham khảo. Kết quả cho thấy sự cải thiện rõ rệt trong kết quả học tập của sinh viên. Cụ thể, số lượng điểm kiểm tra từ 5 trở lên của sinh viên tăng từ 70% lên 80% sau khi sử dụng ChatGPT.

Phản hồi sau thử nghiệm: Sinh viên và giảng viên đã đưa ra nhiều phản hồi tích cực về ChatGPT. Sinh viên cho biết họ cảm thấy tự tin hơn khi có ChatGPT hỗ trợ, và giảng viên nhận thấy rằng ChatGPT giúp họ tiết kiệm thời gian trong việc giải đáp thắc mắc và chấm bài tập.

Phân tích định lượng: Phân tích thống kê cho thấy sự khác biệt có ý nghĩa thống kê ($p < 0.05$) giữa kết quả học tập của sinh viên trước và sau khi sử dụng ChatGPT. Điều này khẳng định rằng ChatGPT đã đóng góp tích cực vào quá trình học tập của sinh viên.

Phân tích định tính: Các phản hồi từ sinh viên và giảng viên được mã hóa và phân loại theo các chủ đề chính. Các chủ đề nổi bật bao gồm: tính tiện lợi của ChatGPT, khả năng giải đáp thắc mắc nhanh chóng, và sự hỗ trợ trong việc chuẩn bị bài giảng.



Hình 2. Biểu đồ so sánh kết quả học tập trước và sau khi sử dụng chat GPT.

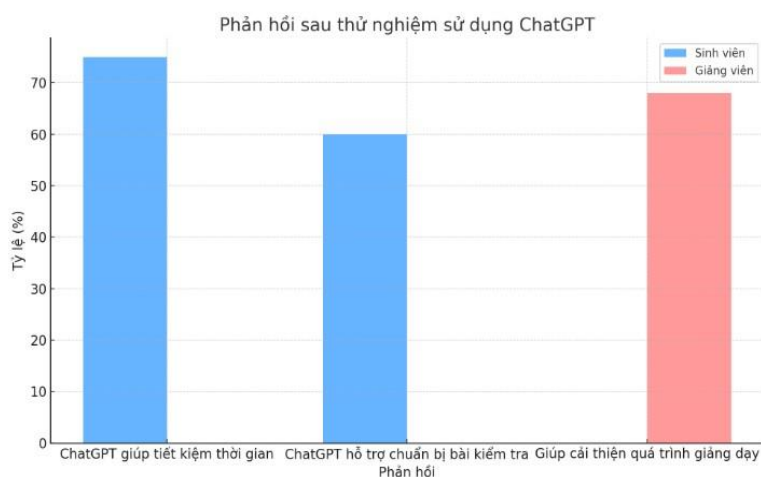
Phản hồi sau thử nghiệm sử dụng ChatGPT (Hình 2).

Sinh viên: 75% cho biết ChatGPT giúp họ tiết kiệm thời gian và 60% sử dụng ChatGPT để chuẩn bị bài kiểm tra.

Giảng viên: 68% cho rằng ChatGPT giúp cải thiện quá trình giảng dạy.

3.2 Thảo luận

3.2.1 Ưu điểm của ChatGPT



Hình 3. Biểu đồ phản hồi thử nghiệm sử dụng chat GPT.

Hỗ trợ kịp thời và hiệu quả: ChatGPT cung cấp khả năng tiếp cận thông tin và giải đáp thắc mắc ngay lập tức, giúp sinh viên tiết kiệm thời gian và nâng cao hiệu quả học tập. Thay vì phải chờ đến giờ giảng hoặc buổi gặp mặt với giảng viên, sinh viên có thể nhanh chóng giải quyết các thắc mắc của mình, giữ cho việc học tập không bị gián đoạn. Việc có một công cụ như ChatGPT cũng giúp giảm bớt áp lực cho giảng viên, khi họ không cần phải liên tục sẵn sàng giải đáp mọi câu hỏi từ sinh viên. Thay vào đó, giảng viên có thể tập trung vào các khía cạnh chiến lược hơn trong việc giảng dạy.

Tăng cường sự tự tin cho sinh viên: Đối với nhiều sinh viên, việc đối mặt với các môn học phức tạp có thể gây ra nhiều khó khăn và thiếu tự tin. ChatGPT đóng vai trò quan trọng trong việc thu hẹp khoảng cách này bằng cách cung cấp sự hỗ trợ đáng tin cậy mà sinh viên có thể dựa vào bất cứ khi nào họ gặp khó khăn. Khi biết rằng họ có một nguồn tài nguyên tin cậy để giải đáp các thắc mắc, sinh viên sẽ cảm thấy tự tin hơn, đặc biệt là trong các môn học đòi hỏi tư duy cao như xác suất và thống kê, nơi mà chỉ một sai sót nhỏ cũng có thể dẫn đến sự nhầm lẫn lớn hơn. Với ChatGPT, sinh viên có thể tự mình làm rõ các khái niệm, từ đó hình thành một phong cách học tập độc lập và chủ động hơn.

Tiết kiệm thời gian cho giảng viên: Việc tích hợp ChatGPT vào môi trường học thuật có thể giúp giảng viên tiết kiệm đáng kể thời gian. Nhờ khả năng tự động trả lời các câu hỏi thường gặp và thậm chí hỗ trợ

trong việc chấm bài, ChatGPT cho phép giảng viên dành nhiều thời gian hơn cho việc thiết kế các hoạt động giảng dạy chất lượng cao, thực hiện các nghiên cứu có ý nghĩa và cung cấp sự hướng dẫn cá nhân hóa cho sinh viên. Sự chuyển hướng từ các công việc lặp đi lặp lại sang các công việc có giá trị hơn có thể cải thiện trải nghiệm giáo dục tổng thể, mang lại lợi ích cho cả sinh viên và giảng viên. Bên cạnh đó, bằng cách xử lý các câu hỏi thông thường, ChatGPT giúp tạo ra một hệ thống giao tiếp hiệu quả hơn trong lớp học, đảm bảo rằng thời gian của giảng viên được sử dụng đúng nơi, đúng chỗ.

3.2.2. Thách thức

Khả năng hiểu ngữ cảnh còn hạn chế: Mặc dù ChatGPT được đánh giá cao về khả năng xử lý ngôn ngữ tự nhiên, nhưng nó vẫn gặp khó khăn khi phải xử lý các ngữ cảnh phức tạp hoặc những câu hỏi có tính mơ hồ. Hệ thống này dựa trên các mô hình học sâu, nhưng đôi khi không thể nắm bắt hết ý nghĩa sâu xa hoặc các sắc thái ngôn ngữ trong một cuộc trò chuyện. Ví dụ, khi sinh viên đặt câu hỏi với nhiều tầng nghĩa hoặc câu hỏi yêu cầu hiểu biết sâu sắc về một chủ đề cụ thể, ChatGPT có thể cung cấp câu trả lời không đầy đủ hoặc thậm chí là sai lệch. Điều này không chỉ gây ra sự nhầm lẫn cho sinh viên mà còn có thể dẫn đến việc hiểu sai hoặc giải quyết vấn đề không hiệu quả. Khả năng hiểu ngữ cảnh là một yếu tố quan trọng trong giáo dục và hạn chế này của ChatGPT đặt ra thách thức lớn khi triển khai công cụ này vào môi trường giảng dạy, đòi hỏi sự thận trọng và cân nhắc kỹ lưỡng từ phía giảng viên.

Phụ thuộc vào dữ liệu đầu vào: ChatGPT hoạt động dựa trên các dữ liệu mà nó đã được huấn luyện trước đó, và chất lượng của dữ liệu đầu vào có ảnh hưởng trực tiếp đến chất lượng của kết quả đầu ra. Nếu dữ liệu đầu vào không chính xác, thiếu sót hoặc không đầy đủ, ChatGPT có thể tạo ra các phản hồi không chính xác hoặc thậm chí gây hiểu lầm. Ví dụ, nếu sinh viên cung cấp một câu hỏi với thông tin không rõ ràng hoặc sai lệch, ChatGPT có thể không thể sửa chữa hoặc nhận ra lỗi đó mà thay vào đó sẽ cung cấp câu trả lời dựa trên thông tin không chính xác. Điều này đòi hỏi giảng viên phải thường xuyên giám sát và kiểm tra các phản hồi của ChatGPT để đảm bảo tính chính xác và phù hợp của thông tin. Hơn nữa, các giảng viên cần phải hướng dẫn sinh viên cách đặt câu hỏi một cách rõ ràng và chính xác để tối đa hóa lợi ích của việc sử dụng ChatGPT.

Vấn đề bảo mật và quyền riêng tư: Khi triển khai ChatGPT trong môi trường giảng dạy, vấn đề bảo mật và quyền riêng tư trở thành một mối quan tâm hàng đầu. Việc sử dụng công nghệ này đòi hỏi phải thu thập và xử lý dữ liệu cá nhân của sinh viên và giảng viên, bao gồm thông tin về tiến trình học tập, phản hồi và các cuộc trò chuyện. Nếu không được quản lý và bảo vệ đúng cách, dữ liệu này có thể bị lạm dụng hoặc bị rò rỉ, gây ra các rủi ro về bảo mật và vi phạm quyền riêng tư. Do đó, cần có các biện pháp bảo vệ chặt chẽ như mã hóa dữ liệu, quản lý quyền truy cập và tuân thủ các quy định về bảo mật thông tin. Ngoài ra, sinh viên và giảng viên cần được thông báo rõ ràng về cách thức dữ liệu của họ được sử dụng và bảo vệ khi sử dụng ChatGPT. Điều này không chỉ giúp bảo vệ quyền lợi của các bên liên quan mà còn tạo ra một môi trường học tập an toàn và đáng tin cậy. Việc đảm bảo bảo mật và quyền riêng tư là yếu tố then chốt để xây dựng lòng tin trong việc ứng dụng các công nghệ tiên tiến như ChatGPT vào giáo dục.

3.2.3. Đề xuất

a) Tăng cường đào tạo và hướng dẫn

Tăng cường đào tạo và hướng dẫn: Để tận dụng tối đa lợi ích mà ChatGPT mang lại, việc triển khai các chương trình đào tạo và hướng dẫn chi tiết cho cả sinh viên và giảng viên là vô cùng cần thiết. Đối với sinh viên, việc nắm bắt cách thức sử dụng ChatGPT một cách hiệu quả không chỉ giúp họ khai thác tối đa các tính năng của công cụ mà còn giúp họ biết cách đặt câu hỏi một cách thông minh, rõ ràng để nhận được những câu trả lời chính xác và hữu ích nhất. Chương trình đào tạo nên bao gồm các nội dung như cách xác định nguồn thông tin, cách đặt câu hỏi chính xác và cách đánh giá các phản hồi của ChatGPT. Điều này sẽ giúp sinh viên phát triển khả năng tự học và nâng cao kỹ năng nghiên cứu.

Về phía giảng viên, các chương trình đào tạo nên tập trung vào cách tích hợp ChatGPT vào kế hoạch giảng dạy và cách sử dụng công cụ này để hỗ trợ việc kiểm tra, đánh giá cũng như hướng dẫn sinh viên. Giảng viên cần hiểu rõ các giới hạn của ChatGPT để biết cách xử lý các tình huống mà công cụ này không thể giải quyết. Hơn nữa, việc đào tạo còn cần bao gồm các nguyên tắc về bảo mật và quyền riêng tư, đảm bảo rằng việc sử dụng ChatGPT diễn ra an toàn và tuân thủ các quy định pháp lý. Ngoài ra, giảng viên cần được trang bị các kỹ năng để theo dõi và đánh giá hiệu quả của việc sử dụng ChatGPT trong lớp học, từ đó điều chỉnh phương pháp giảng dạy sao cho phù hợp nhất với nhu cầu của sinh viên.

b) Kết hợp với các phương pháp giảng dạy truyền thống

Kết hợp với các phương pháp giảng dạy truyền thống: Mặc dù ChatGPT mang lại nhiều lợi ích trong việc hỗ trợ học tập, nó không nên được coi là một giải pháp thay thế hoàn toàn cho các phương pháp giảng dạy truyền thống. Thay vào đó, ChatGPT nên được sử dụng như một công cụ bổ trợ để tăng cường hiệu quả giảng dạy và học tập. Các phương pháp giảng dạy truyền thống, như thảo luận nhóm, thực hành trực

tiếp, và hướng dẫn cá nhân, vẫn đóng vai trò quan trọng trong việc phát triển các kỹ năng mềm, khả năng tư duy phản biện, và tương tác xã hội của sinh viên.

Việc kết hợp giữa ChatGPT và các phương pháp giảng dạy truyền thống có thể tạo ra một môi trường học tập đa dạng và phong phú hơn. Ví dụ, ChatGPT có thể hỗ trợ sinh viên chuẩn bị trước cho các buổi thảo luận, cung cấp các tài liệu tham khảo và giải thích các khái niệm khó. Sau đó, trong các buổi học trực tiếp, giảng viên có thể sử dụng thời gian để đào sâu vào các khía cạnh phức tạp hơn của chủ đề, khuyến khích sinh viên tham gia thảo luận và ứng dụng kiến thức vào thực tiễn. Sự kết hợp này không chỉ giúp nâng cao chất lượng giảng dạy mà còn tạo ra một trải nghiệm học tập toàn diện hơn, đáp ứng nhu cầu đa dạng của sinh viên.

c) Đánh giá và cải tiến liên tục

Đánh giá và cải tiến liên tục: Để đảm bảo rằng ChatGPT luôn đáp ứng tốt nhất nhu cầu của người dùng và tiếp tục phát huy hiệu quả trong môi trường giáo dục, cần có các cơ chế đánh giá và cải tiến liên tục. Việc này bao gồm không chỉ việc theo dõi hiệu suất của ChatGPT mà còn cần phản hồi từ sinh viên và giảng viên để xác định các điểm mạnh và yếu của công cụ này trong thực tế sử dụng. Các buổi khảo sát định kỳ, thảo luận nhóm, và các công cụ đánh giá trực tuyến có thể được sử dụng để thu thập ý kiến từ người dùng, từ đó cung cấp thông tin quý giá cho quá trình cải tiến.

Ngoài ra, các nhà phát triển và quản lý giáo dục cần cập nhật liên tục các tính năng và dữ liệu của ChatGPT để đảm bảo rằng nó luôn phù hợp với các yêu cầu học tập mới nhất. Việc tối ưu hóa ChatGPT cũng cần xem xét đến sự thay đổi trong nội dung giáo dục, phương pháp giảng dạy, và nhu cầu của sinh viên. Điều này đòi hỏi một quá trình phối hợp chặt chẽ giữa các nhà phát triển công nghệ và các chuyên gia giáo dục, để đảm bảo rằng ChatGPT không chỉ là một công cụ hỗ trợ học tập mà còn là một phần tích hợp hữu ích trong hệ thống giáo dục hiện đại.

Bên cạnh đó, cần có các biện pháp để đảm bảo rằng ChatGPT được sử dụng một cách có trách nhiệm và hiệu quả, tránh việc lạm dụng hoặc phụ thuộc quá mức vào công cụ này. Đánh giá liên tục và cải tiến thường xuyên sẽ giúp tối ưu hóa vai trò của ChatGPT trong giảng dạy, đảm bảo rằng nó luôn là một trợ thủ đắc lực cho cả giảng viên và sinh viên.

4. Kết luận

Việc ứng dụng ChatGPT trong giảng dạy tại trường đại học đã mang lại nhiều lợi ích rõ rệt, từ việc cải thiện kết quả học tập của sinh viên đến việc giảm tải công việc cho giảng viên. Tuy nhiên, để tận dụng tối đa tiềm năng của ChatGPT, cần có các biện pháp đảm bảo tính chính xác, bảo mật và sự kết hợp với các phương pháp giảng dạy truyền thống. Việc nghiên cứu và phát triển các công nghệ AI trong giáo dục hứa hẹn sẽ mở ra những cơ hội mới và tiềm năng vô hạn cho cả người dạy và người học trong thời đại số hóa.

Tài liệu tham khảo

- Dempere J, Modugu K, Hesham A and Ramasamy LK, 2023. The impact of ChatGPT on higher education. *Front. Educ.*
- Chinedu Wilfred Okonkwo, Abejide Ade-Ibijola, 2021. Chatbots applications in education: A systematic review. *Computers and Education: Artificial Intelligence*. Volume 2.
- Adiguzel, T., Kaya, M. H., & Cansu, F. K., 2023. Revolutionizing education with AI: Exploring the transformative potential of ChatGPT. *Contemporary Educational Technology*.
- Miguel A. Cardona, Ed.D., Roberto J. Rodríguez, Kristina Ishmael, 2023. U.S. Department of Education, Office of Educational Technology, *Artificial Intelligence and Future of Teaching and Learning: Insights and Recommendations*, Washington, DC.

ABSTRACT

ChatGPT in Universities: Opportunities and Challenge

Le Bích Phương

Hanoi University of Mining and Geology

In the era of Industry 4.0, the development of artificial intelligence has opened many new doors in the field of higher education, scientific research, and debate. ChatGPT, an advanced language model by OpenAI, is not just a tool for entertainment but also has extensive applications in supporting researchers and debaters. This article will focus on presenting the important applications of ChatGPT in these fields.

Keywords: Higher education; ChatGPT; research; debate.

Xấp xỉ phân phối chuẩn: Từ nền tảng lý thuyết đến ứng dụng thực tiễn

Lê Bích Phượng*
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Phân phối chuẩn, hay phân phối Gauss, là một công cụ quan trọng trong xác suất - thống kê. Đặc điểm nổi bật của phân phối chuẩn là khả năng xấp xỉ nhiều loại phân phối khác nhau trong các điều kiện nhất định. Bài viết này sẽ xem xét các phân phối thường được xấp xỉ bởi phân phối chuẩn, đi kèm với ví dụ minh họa qua số liệu cụ thể và biểu đồ trực quan.

Từ khóa: xấp xỉ phân phối chuẩn; phân phối nhị thức; phân phối Poisson; phân phối chi-bình phương.

1. Đặt vấn đề

Trong lĩnh vực xác suất và thống kê, việc hiểu rõ và mô tả chính xác các phân phối xác suất đóng vai trò quan trọng trong phân tích dữ liệu, ra quyết định và phát triển các mô hình dự đoán. Tuy nhiên, khi đối mặt với các phân phối phức tạp như phân phối nhị thức, phân phối Poisson hay phân phối Chi-bình phương, việc tính toán các xác suất cụ thể hoặc ước lượng các tham số phân phối có thể trở nên rất phức tạp.

Phân phối chuẩn, với tính chất đơn giản và các tính chất toán học dễ áp dụng, đã trở thành một công cụ mạnh mẽ để xấp xỉ các phân phối khác. Điều này không chỉ giúp đơn giản hóa các tính toán mà còn mở ra nhiều ứng dụng thực tiễn trong các lĩnh vực như học máy, kinh tế lượng và phân tích rủi ro.

Mặc dù các định lý kinh điển như Định lý De Moivre-Laplace đã chứng minh sự hiệu quả của xấp xỉ phân phối chuẩn trong nhiều trường hợp (Grinstead và Snell's, 2006). Câu hỏi đặt ra là khi nào và với điều kiện nào thì xấp xỉ này là hợp lý? Hơn nữa, việc hiểu rõ hơn về những hạn chế và tiềm năng cải tiến của phương pháp này có thể dẫn đến những bước tiến mới trong nghiên cứu và ứng dụng.

Trong bối cảnh đó, bài báo này sẽ trình bày các cơ sở lý thuyết của việc xấp xỉ các phân phối nhị thức, Poisson và Chi-bình phương bằng phân phối chuẩn. Đồng thời, bài viết sẽ đưa ra các số liệu minh họa và đề xuất hướng nghiên cứu tiếp theo để mở rộng và nâng cao tính ứng dụng của xấp xỉ này trong thực tiễn.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Cơ sở lý thuyết

Phân phối chuẩn (Normal Distribution), thường được ký hiệu là $N(\mu, \sigma^2)$ đóng vai trò trung tâm trong lý thuyết xác suất và thống kê. Phân phối này mô tả một tập hợp dữ liệu với hình chuông đặc trưng, có kỳ vọng bằng μ và phương sai bằng σ^2 . Một trong những tính chất quan trọng nhất của phân phối chuẩn là Định lý Giới hạn trung tâm (Central Limit Theorem), định lý này chỉ ra rằng tổng của một số lượng lớn các biến ngẫu nhiên độc lập, với phân phối giống nhau và có phương sai hữu hạn, sẽ tiệm cận phân phối chuẩn khi kích thước mẫu tăng.

Định lý De Moivre-Laplace là một trường hợp đặc biệt của Định lý giới hạn trung tâm, cho phép xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn khi số lần thử n đủ lớn. Cụ thể, nếu $X \sim B(n, p)$ (tức là X tuân theo quy luật phân phối nhị thức, với n là số lần thử và p là xác suất xảy ra A trong một lần thử), với kỳ vọng là np và phương sai là $np(1-p)$, thì khi n đủ lớn, phân phối của X có thể được xấp xỉ bởi phân phối chuẩn: $X \approx N(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Tương tự, các phân phối Poisson và Chi-Bình phương cũng có thể được xấp xỉ bằng phân phối chuẩn khi các tham số của chúng đạt đến các giá trị lớn. Với phân phối Poisson $X \sim P(\lambda)$ thì khi λ lớn, X có thể được xấp xỉ bởi phân phối chuẩn $X \approx N(\lambda, \sqrt{\lambda})$. Phân phối Chi-Bình phương với k bậc tự do $X \sim \chi^2(k)$ có thể được xấp xỉ bằng $X \approx N(k, \sqrt{2k})$ khi k lớn.

* Tác giả liên hệ

Email: lebichphuong@humg.edu.vn

2.2. Phương pháp nghiên cứu

2.2.1. Chứng minh toán học

Bài báo sẽ xây dựng các chứng minh toán học chi tiết cho việc xấp xỉ phân phối nhị thức, Poisson và Chi-Bình phương bằng phân phối chuẩn (Grinstead và Snell's, 2006; Montgomery và Runger, 2014). Cụ thể là:

- Chứng minh định lý De Moivre-Laplace: Sử dụng xấp xỉ Stirling và lý thuyết giới hạn để chứng minh phân phối nhị thức có thể được xấp xỉ bằng phân phối chuẩn khi số lần thử lớn.
- Sử dụng Định lý Giới hạn trung tâm để chỉ ra rằng các phân phối Poisson và Chi-Bình phương cũng có thể được xấp xỉ bởi phân phối chuẩn trong những điều kiện nhất định.

2.2.2. Mô phỏng và phân tích dữ liệu

Sử dụng các công cụ phần mềm như Python, tiến hành mô phỏng các phân phối nhị thức, Poisson, và Chi-Bình phương với các giá trị tham số khác nhau. Các bước thực hiện bao gồm:

- Tạo mẫu từ các phân phối nhị thức, Poisson, và Chi-bình phương: Chọn các tham số cụ thể và tạo mẫu ngẫu nhiên từ các phân phối này.
- Xấp xỉ bằng phân phối chuẩn: Chuyển đổi các mẫu này thành các biến ngẫu nhiên chuẩn hóa, sau đó so sánh phân phối thực tế của mẫu với phân phối chuẩn tương ứng.
- Phân tích sự khác biệt: Sử dụng các chỉ số như khoảng tin cậy và kiểm định Kolmogorov-Smirnov để đánh giá mức độ tương đồng giữa phân phối thực tế và phân phối chuẩn xấp xỉ.
- Biểu thị kết quả: Kết quả của các phân tích trên sẽ được trình bày dưới dạng bảng số liệu và đồ thị minh họa. Các bảng số liệu sẽ thể hiện các tham số phân phối, giá trị kì vọng và phương sai, cùng với độ lệch chuẩn của các phân phối xấp xỉ. Đồ thị minh họa sẽ trực quan hóa sự so sánh giữa phân phối thực tế và phân phối chuẩn, giúp làm rõ mức độ chính xác của các xấp xỉ trong từng trường hợp cụ thể.

3. Kết quả và thảo luận

Định lý 1. Cho một biến ngẫu nhiên X có phân phối nhị thức với tham số n và p , tức là $X \sim B(n, p)$. Khi n lớn, phân phối nhị thức có thể được xấp xỉ bởi phân phối chuẩn với kì vọng np và phương sai $np(1-p)$.

Cụ thể: với a và b là hai số thực xác định thì $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(a \leq \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) = \int_a^b \Phi(x)dx$, trong đó $\Phi(x)$ là hàm

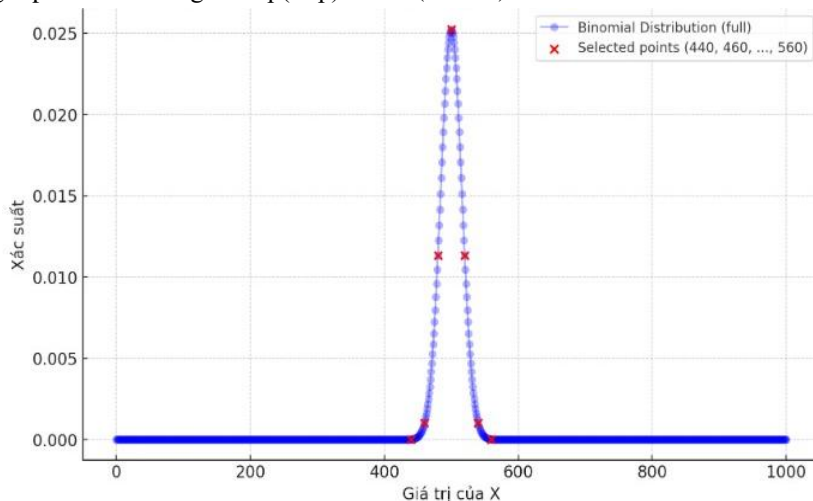
phân phối tích lũy của hàm phân phối chuẩn tắc, tức là $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Định lý này được chứng minh bằng cách sử dụng xấp xỉ Stirling (Grinstead và Snell's, 2006; Johnson và Kotz, 1970).

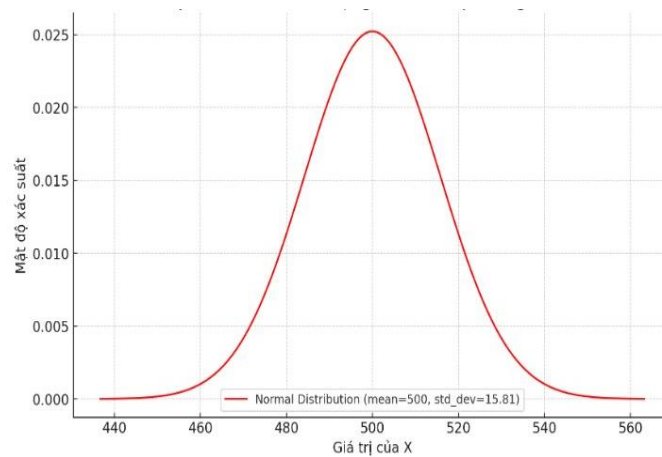
Mô phỏng các phân phối nhị thức, Poisson và Chi-bình phương

3.1. Phân phối nhị thức

- Tham số: $n = 1000$ và $p = 0,5$ (Hình 1).
- Kì vọng: $np = 500$ Phương sai: $np(1-p) = 250$ (Hình 2).



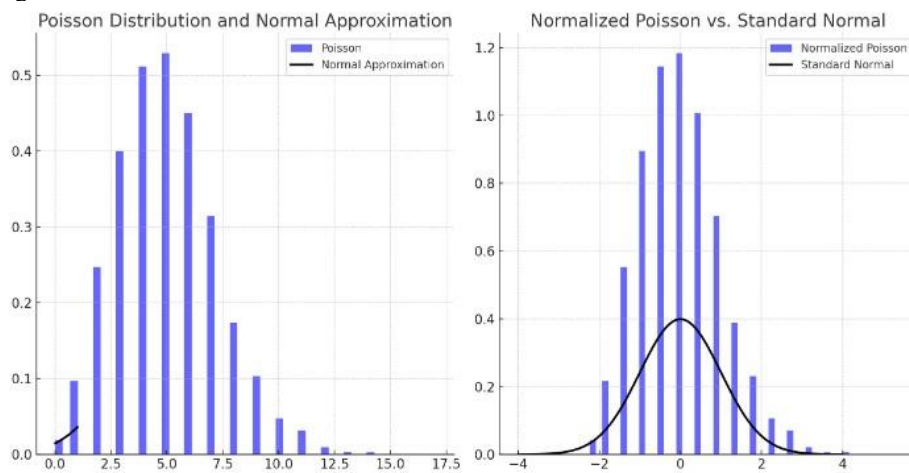
Hình 1. Phân phối nhị thức với các mốc cụ thể (440, 460, 480, 500, 520, 540, 560).



Hình 2. Phân phối chuẩn với kì vọng = 500 và phương sai = 250.

3.2. Phân phối Poisson

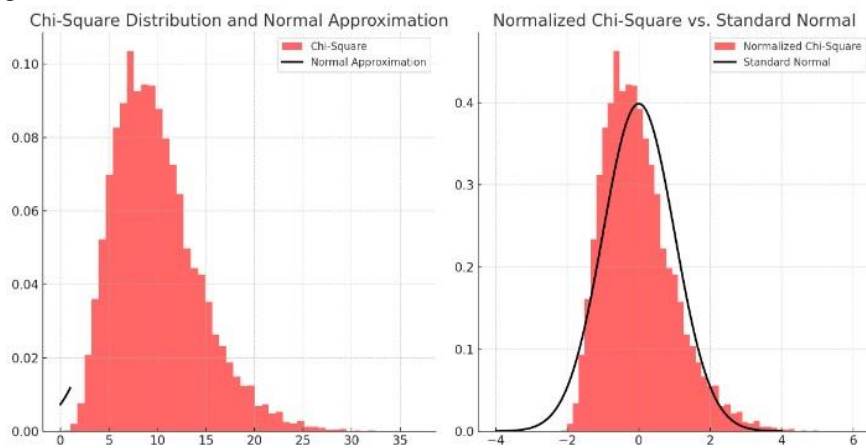
- Tham số: $\lambda=5$
- Kì vọng: $\lambda=5$
- Phương sai: $\lambda=5$



Hình 3. Phân phối Poisson.

3.3. Phân phối Chi-bình phương

- Tham số: $df=10$
- Kì vọng: $df=10$
- Phương sai: $2 \times df=20$



Hình 4. Phân phối Chi-bình phương.

Kết quả kiểm định Kolmogorov-Smirnov (Bảng 1).

Bảng 1. Kết quả kiểm định Kolmogorov-Smirnov.

Phân phối	Thống kê KS	Giá trị p
Nhị thức	0.0157	0.0142
Poisson	0.1135	$1,13 \cdot 10^{-112}$
Chi-bình phương	0.0662	$1,53 \cdot 10^{-38}$

4. Phân tích và thảo luận

4.1. Phân phối nhị thức

- Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối chuẩn cho kết quả khá chính xác. Biểu đồ của phân phối nhị thức và đường cong phân phối chuẩn trùng khớp khá tốt.

- Giá trị kiểm định KS cho thấy sự khác biệt không đáng kể giữa phân phối nhị thức và phân phối chuẩn xấp xỉ.

4.2. Phân phối Poisson

- Xấp xỉ phân phối Poisson bằng phân phối chuẩn cho thấy một số khác biệt. Biểu đồ của phân phối Poisson và đường cong phân phối chuẩn không trùng khớp hoàn toàn.

- Giá trị kiểm định KS cao cho thấy sự khác biệt đáng kể giữa phân phối Poisson và phân phối chuẩn xấp xỉ. Điều này có thể do λ không đủ lớn để xấp xỉ tốt bằng phân phối chuẩn.

4.3. Phân phối Chi-Bình phương

- Xấp xỉ phân phối Chi-Bình phương bằng phân phối chuẩn có kết quả tốt hơn so với Poisson nhưng vẫn có một số khác biệt.

- Giá trị kiểm định KS cho thấy sự khác biệt giữa phân phối Chi-Bình phương và phân phối chuẩn xấp xỉ là có nhưng không quá lớn.

4.4. Điều kiện áp dụng các xấp xỉ trên

- Xấp xỉ phân phối nhị thức bằng phân phối: thường áp dụng khi $np \geq 5; n(1-p) \geq 5$. Đây là điều kiện để đảm bảo rằng phân phối nhị thức đủ "cân đối" để có thể xấp xỉ bằng phân phối chuẩn.

- Xấp xỉ phân phối Poisson bằng phân phối chuẩn: thường áp dụng khi $\lambda \geq 10$

- Xấp xỉ phân phối Chi-bình phương bằng phân phối chuẩn: thường áp dụng khi số bậc tự do $df > 20$.

4.5. Một số bài toán thực tế

4.5.1. Xấp xỉ phân phối nhị thức

Bài toán 1: Một nhà máy sản xuất bóng đèn có tỷ lệ bóng đèn hỏng là 1%. Nếu một lô hàng có 2000 bóng đèn, hãy tính xác suất để có ít nhất 30 bóng đèn hỏng trong lô hàng này.

Bài toán 2: Trong một cuộc khảo sát với 1000 người, 60% cho biết họ ủng hộ một chính sách mới. Tính xác suất để trong một mẫu ngẫu nhiên 100 người từ khảo sát này có từ 50 đến 70 người ủng hộ chính sách.

4.5.2. Xấp xỉ phân phối Poisson

Bài toán 3: Một phòng cấp cứu bệnh viện nhận trung bình 5 ca cấp cứu mỗi giờ. Hãy tính xác suất nhận được hơn 8 ca cấp cứu trong một giờ.

Bài toán 4: Một trung tâm chăm sóc khách hàng nhận được trung bình 10 cuộc gọi mỗi giờ. Hãy tính xác suất trung tâm này sẽ nhận được từ 7 đến 13 cuộc gọi trong một giờ nhất định.

4.5.3. Xấp xỉ phân phối Chi-bình phương

Bài toán 5: Một nhà nghiên cứu muốn kiểm tra giả thuyết về sự phù hợp của một mô hình lý thuyết với dữ liệu thực nghiệm. Dữ liệu có 10 mức độ tự do, và giá trị thống kê Chi-bình phương thu được là 12. Hãy ước tính xác suất để có giá trị Chi-bình phương lớn hơn hoặc bằng 12.

4.6. Hướng nghiên cứu tiếp theo

- Thử nghiệm với các tham số khác nhau: Tiến hành thử nghiệm với các giá trị tham số khác nhau để xem xét mức độ ảnh hưởng của chúng đến sự xấp xỉ phân phối chuẩn.

- Sử dụng các phương pháp xấp xỉ khác: Áp dụng các phương pháp xấp xỉ khác như xấp xỉ Gamma hoặc xấp xỉ Poisson bằng phân phối siêu bội để so sánh hiệu quả.
- Phân tích sự ảnh hưởng của kích thước mẫu: Nghiên cứu sự ảnh hưởng của kích thước mẫu đến kết quả xấp xỉ và độ chính xác của các xấp xỉ này.
- Mô phỏng thêm các phân phối khác: Tiến hành mô phỏng và xấp xỉ các phân phối khác như phân phối Beta, phân phối Gama, và phân phối Student's t để mở rộng phạm vi nghiên cứu.

5. Kết luận

Bài báo đề cập đến khả năng xấp xỉ phân phối chuẩn đối với các phân phối khác như phân phối nhị thức, phân phối Poisson và phân phối Chi-bình phương, từ nền tảng lý thuyết đến ứng dụng thực tiễn. Các kết quả phân tích cho thấy phân phối chuẩn, với những đặc tính toán học rõ ràng và dễ áp dụng, đóng vai trò quan trọng trong việc đơn giản hóa các tính toán phức tạp liên quan đến các phân phối khác. Bài viết cũng đã cung cấp những ví dụ minh họa và biểu đồ trực quan, chứng minh hiệu quả của phương pháp xấp xỉ này trong thực tiễn. Tuy nhiên, bài báo cũng nhận diện những hạn chế của phương pháp xấp xỉ phân phối chuẩn, đặc biệt là khi các điều kiện cần thiết không được đảm bảo. Việc hiểu rõ hơn về những hạn chế này sẽ là nền tảng cho các nghiên cứu tiếp theo nhằm cải thiện độ chính xác và mở rộng ứng dụng hơn.

Tài liệu tham khảo

- Grinstead and Snell's, 2006. *Introduction to Probability*, New York: Wiley.
- Johnson, N. L., & Kotz, S., 1970. *Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions*. New York: Wiley.
- Montgomery, D. C., & Runger, G. C., 2014. *Applied Statistics and Probability for Engineers*. Hoboken, NJ: Wiley.

ABSTRACT

Normal distribution approximation: From theoretical foundation to practical application

Le Bich Phuong
Hanoi University of Mining and Geology

The normal distribution, also known as the Gaussian distribution, is a crucial tool in statistics and probability. One of its prominent features is the ability to approximate various types of distributions under certain conditions. This paper examines distributions commonly approximated by the normal distribution, accompanied by illustrative examples through specific data and visual charts.

Keywords: normal distribution approximation; binomial distribution; Poisson distribution; Chi-distribution.

Phương pháp tính và ứng dụng kinh tế của tích phân

Nguyễn Thị Kim Sơn*
Trường Đại học Hà Nội

TÓM TẮT

Mục đích thứ nhất của chúng tôi trong bài báo này là trình bày hai phương pháp tính tích phân, đó là phương pháp đổi biến và phương pháp tích phân từng phần. Mục đích thứ hai là chúng tôi đưa ra một số ứng dụng trong kinh tế của tích phân.

Từ khóa: Phương pháp đổi biến; phương pháp tích phân từng phần; ứng dụng của tích phân; tích phân.

1. Đặt vấn đề

Tích phân là phép tính ngược của phép tính đạo hàm. Tuy nhiên, việc tính tích phân thường sẽ khó thực hiện hơn. Nếu một hàm số là một biểu thức liên quan đến các hàm cơ bản (ví dụ các hàm x' , $\sin x$, e^x , K) thì đạo hàm của nó cũng là các hàm cơ bản. Ngoài ra, chúng ta có thể phát triển các phương pháp tính cho phép chúng ta có thể đạo hàm hầu hết mọi hàm mà chúng ta có một cách dễ dàng. Nhiều bài toán tích phân cũng có đặc điểm này nhưng một số thì không. Có những hàm số là hàm số cơ bản (chẳng hạn e^{x^2}) nhưng nguyên hàm của nó lại không thể biểu diễn được dưới dạng hàm số cơ bản. Ngay cả khi nguyên hàm cơ bản tồn tại thì kỹ thuật tìm ra nó lại quá phức tạp.

Vì lý do này nên chúng ta cần phải có nhiều công cụ để giải các bài toán tính tích phân. Trong bài báo này, chúng tôi tập trung trình bày hai phương pháp tính tích phân, đó là phương pháp đổi biến và phương pháp tích phân từng phần.

Trước tiên, chúng tôi sẽ nhắc lại kiến thức cơ bản nhất về tích phân.

Tích phân bất định $\int f(x)dx$, theo định nghĩa, là một hàm số mà đạo hàm của nó là $f(x)$. Nếu $F(x)$ là một hàm số như vậy thì mọi hàm số có đạo hàm là $f(x)$ đều có dạng $F(x) + C$, trong đó C là một hằng số tùy ý. Ta viết:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Mỗi lần đạo hàm một hàm số, ta cũng suy ra một công thức cho tích phân. Chẳng hạn, $\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$ có thể chuyển thành công thức tích phân $\int 6x dx = 3x^2 + C$.

Một số công thức có thể được suy ra trực tiếp từ công thức đạo hàm dựa vào bảng các nguyên hàm cơ bản.

Từ bảng các nguyên hàm cơ bản ta thấy sự cần thiết của các kỹ thuật tính tích phân. Vì mặc dù $\sin x$, $\cos x$ tồn tại như là đạo hàm của các hàm số lượng giác đơn giản nhưng hàm $\tan x$, $\cot x$ lại không có trong bảng. Trong thực tế, nếu chúng ta thực hiện các phép kết hợp cơ bản của các hàm số lượng giác thì ta sẽ thấy rằng nguyên hàm của $\tan x$, $\cot x$ không dễ để tính được. Vì vậy, trong bài báo này, chúng tôi sẽ phát triển các kỹ thuật để tính các nguyên hàm như vậy (và các nguyên hàm khác nữa) (Larry và nnk, 2018).

Bố cục của bài viết như sau: Trong Phần 2, chúng tôi trình bày hai phương pháp tính tích và các bài toán áp dụng của chúng. Trong Phần 3, chúng tôi trình bày một số ứng dụng của trong kinh tế của tích phân.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Phương pháp đổi biến số

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số cho trước, và giả sử $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Theo quy tắc hàm hợp ta có:

$$\frac{d}{dx}[F(g(x))] = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

* Tác giả liên hệ

Email: sonntk@hanu.edu.vn

Trở lại công thức tích phân, ta có $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$, trong đó C là hằng số tùy ý (Nguyễn Đình Trí và nnk, 2006).

2.2. Phương pháp tích phân từng phần

Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số và $G(x)$ là một nguyên hàm của $g(x)$. Theo quy tắc tính đạo hàm của một tích ta có:

$$\frac{d}{dx}[f(x)G(x)] = f(x)G'(x) + f'(x)G(x) = f(x)g(x) + f'(x)G(x).$$

$$\text{Do đó, } f(x)G(x) = \int f(x)g(x)dx + \int f'(x)G(x)dx.$$

Công thức cuối cùng này có thể được viết lại ở dạng hữu ích hơn như sau.

$$\int f(x)g(x)dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)dx \quad (1)$$

$$\text{Nếu đặt } \begin{cases} u = f(x) \\ dv = g(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(x)dx \\ v = \int g(x)dx = G(x) + C. \end{cases}$$

Khi đó, công thức (1.1) trở thành $\int f(x)g(x)dx = uv - \int vdu$ (Nguyễn Đình Trí và nnk, 2006).

3. Kết quả và thảo luận

3.1. Các bài toán ôn luyện cho Kỳ thi Olympic sinh viên toàn quốc

Bài toán 1. (OLP-1993). Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (\tan x)^{\sqrt{2}}}$.

Lời giải.

$$\text{Đổi biến } t = \tan x \text{ ta có: } I = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{\sqrt{2}})} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{\sqrt{2}})} + \int_1^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^{\sqrt{2}})} = I_1 + I_2.$$

$$\text{Với } I_2, \text{ ta đổi biến } u = \frac{1}{t}. \text{ Khi đó, } I_2 = \int_0^1 \frac{u^{\sqrt{2}} du}{(1+u^2)(1+u^{\sqrt{2}})} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} - \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)(1+u^{\sqrt{2}})} = \frac{\pi}{4} - I_1.$$

$$\text{Do đó, } I = \frac{\pi}{4}.$$

Bài toán 2. (OLP-1994). Tìm nguyên hàm $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Lời giải.

$$\text{Đặt } \sqrt{x^2 + x + 1} = x + t, \text{ ta có: } x = \frac{1-t^2}{2t-1} \left(t \neq \frac{1}{2} \right), dx = \frac{-2(t^2-t+1)}{(2t-1)^2} dt.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} &= \int \frac{-2(t^2-t+1)dt}{(2t-1)^2 \left(2\frac{1-t^2}{2t-1} + t \right)} = \int \frac{-2(t^2-t+1)dt}{(2t-1)(2-t)} = \int \frac{2t^2-2t+2}{2t^2-5t+2} dt \\ &= \int \left(1 + \frac{3t}{2t^2-5t+2} \right) dt = t + \int \frac{3t}{(2t-1)(t-2)} dt \\ &= t + \int \left(\frac{2}{t-2} - \frac{1}{2t-1} \right) dt = t + 2 \ln|t-2| - \frac{1}{2} \ln|2t-1| + C \\ &= \sqrt{x^2 + x + 1} - x + 2 \ln \left| \sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2 \right| - \frac{1}{2} \ln \left| 2\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x - 1 \right| + C. \end{aligned}$$

Bài toán 3. Tính tích phân $I = \int \frac{\ln x}{(x+1)^2}$ (Vũ Tiến Việt và Phan Thế Hải, 2021).

Lời giải.

+) Cách giải thông thường:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x+1} \end{cases} \Rightarrow I = -\ln x \cdot \frac{1}{x+1} + \int \frac{1}{x(x+1)} dx.$$

Đến đây để thực hiện nguyên hàm hữu tỉ ta cần tách thành dạng $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$ và để làm được điều này thì ta phải tốn thêm thời gian đồng nhất thức.

+) Khi cộng thêm hằng số C:

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \rightarrow v = -\frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1} \end{cases}$$

$$\text{Do đó, } I = \ln x \cdot \frac{x}{x+1} - \int \frac{x}{x(x+1)} dx = \ln x \cdot \frac{x}{x+1} - \int \frac{1}{x+1} dx.$$

Đến đây ta có thể dễ dàng sử dụng nguyên hàm cơ bản để tính.

Bài toán 4. Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trong (a, b) , thỏa mãn $f(a) = f(b) = 0$ và

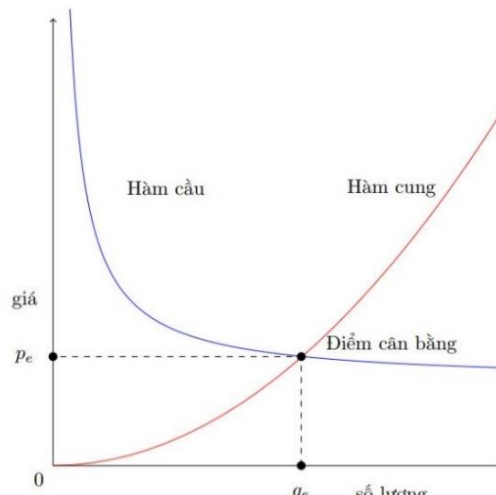
$$\int_a^b [f(x)]^2 dx = 1. \text{ Chứng minh rằng: } \int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2} \text{ (Vũ Tiến Việt và Phan Thế Hải, 2021).}$$

Lời giải.

$$\text{Sử dụng tích phân từng phần, ta có: } \int_a^b xf(x)f'(x)dx = \frac{x}{2}[f(x)]^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx = -\frac{1}{2}.$$

3.2. Thặng dư của người tiêu dùng và nhà sản xuất

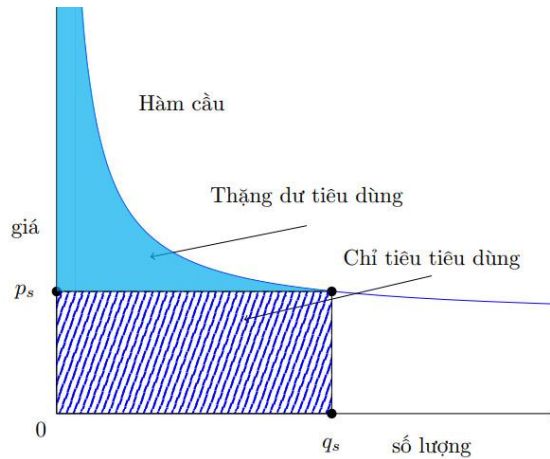
Khi nhìn vào đường cung và cầu, chúng ta thấy điểm cân bằng tại đó số lượng được bán bằng với số lượng mọi người muốn mua.



Hình 1. Quan hệ cung và cầu.

Tuy nhiên, trong mô hình đó, có những người sẵn sàng bán với giá thấp hơn giá cân bằng và có những người sẵn sàng mua với giá cao hơn giá cân bằng. Những người này có được một thỏa thuận đặc biệt tốt trong giao dịch. Chúng ta muốn đo lường lợi ích đó vì chúng ta có thể coi nó là lợi nhuận tăng thêm mà nhà cung cấp và người mua có được từ giao dịch. Chúng ta lưu ý rằng mỗi bên sẽ có mong muốn để tối đa hóa lợi ích đó.

Đầu tiên, ta tập trung về phía người tiêu dùng. Vùng bên dưới hàm cầu, từ 0 đến số lượng bán ra, đo lường mức độ sẵn lòng chi tiêu của người tiêu dùng. Diện tích trong hình chữ nhật có cùng đáy và chiều cao bằng giá bán đo lường mức chi tiêu thực tế của người tiêu dùng. Sự khác biệt giữa hai giá trị này là số lượng mà chúng ta gọi là thặng dư tiêu dùng.

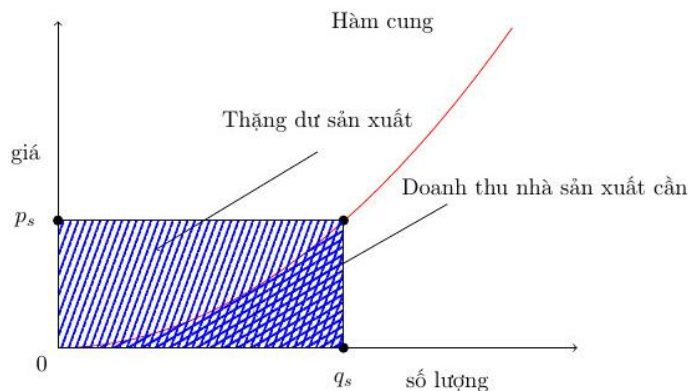


Hình 2. Thặng dư tiêu dùng.

Về mặt tính toán, thặng dư tiêu dùng $= \int_0^{q_s} (\text{hàm cầu } (q) - p_s) dq$.

Miễn là giá vẫn nằm trên đường hàm cầu, giá thấp hơn có nghĩa là số lượng bán ra nhiều hơn và thặng dư tiêu dùng lớn hơn.

Theo cách tương tự, chúng ta có thể tập trung vào phía nhà sản xuất. Diện tích dưới hàm cung, từ 0 đến số lượng bán ra, đo lường nhu cầu doanh thu của nhà sản xuất. Diện tích trong hình chữ nhật có cùng đáy và chiều cao bằng giá bán đo lường doanh thu thực tế của nhà sản xuất. Sự khác biệt giữa hai giá trị này là một đại lượng mà chúng ta gọi là thặng dư sản xuất.



Hình 3. Thặng dư sản xuất.

Về mặt tính toán, thặng dư sản xuất $= \int_0^{q_s} (p_s - \text{hàm cung } (q)) dq$.

Miễn là giá vẫn nằm trên đường cung, giá cao hơn có nghĩa là lượng bán ra lớn hơn và thặng dư của nhà sản xuất lớn hơn.

Sau đây, ta xem xét một ví dụ trong đó hàm cung và hàm cầu đơn giản để việc tính toán có thể thực hiện được bằng tay.

Bài toán 1. Giả sử giá cung $(q) = 30 + q$ và giá cầu $(q) = 170 - q$.

- Tìm thặng dư tiêu dùng, thặng dư sản xuất và tổng lợi ích xã hội tại điểm cân bằng thị trường.
- Nếu các nhà sản xuất có thể thành lập một cartel và giới hạn số lượng sản có ở mức 50, bán với giá cung là 50 thì thặng dư tiêu dùng, thặng dư nhà sản xuất và tổng lợi ích xã hội là bao nhiêu?
- Tìm mức giá mà một cartel sản xuất sẽ tối đa hóa thặng dư nhà sản xuất. Tìm thặng dư sản xuất ở mức giá đó.

Lời giải.

- Hai đường cong cắt nhau tại điểm cân bằng thị trường, $(70, 100)$.

$$\text{Thặng dư sản xuất} = \int_0^{70} [100 - (30 + q)] dq = 2450;$$

$$\text{Thặng dư tiêu dùng} = \int_0^{70} [(170 - q) - (100)] dq = 2450;$$

$$\text{Tổng lợi ích xã hội} = \text{Thặng dư sản xuất} + \text{Thặng dư tiêu dùng} = 4900.$$

- Giá cầu $(50) = 120$

$$\text{Thặng dư sản xuất} = \int_0^{50} [(120) - (30 + q)]dq = 3250;$$

$$\text{Thặng dư tiêu dùng} = \int_0^{50} [(170 - q) - (120)]dq = 1250;$$

$$\text{Tổng lợi ích xã hội} = \text{Thặng dư sản xuất} + \text{Thặng dư tiêu dùng} = 4500.$$

c) Công thức thặng dư sản xuất x là $\int_0^x (\text{Giá cầu}(t) - \text{Giá cung}(x))dt$.

$$\text{Trong trường hợp này, ta có } \int_0^x [(170 - t) - (30 + x)]dt = \int_0^x (140 - t - x)dt.$$

$$\text{Do đó, } \left(140t - \frac{t^2}{2} - xt\right)\Big|_0^x = 140x - \frac{3x^2}{2}.$$

Thặng dư sản xuất tối đa là 3266.67 khi $x = 46.67$.

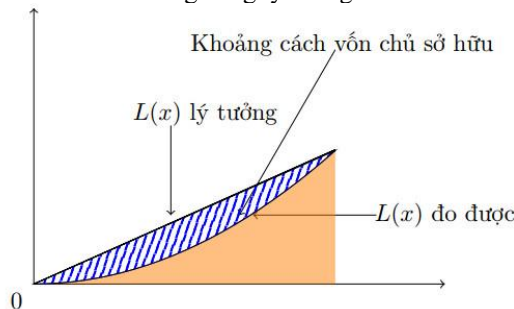
3.3. Đường cong Lorenz và chỉ số Gini

Một câu hỏi đặt ra trong kinh tế học là xem xét sự công bằng trong thu nhập hoặc phân phối của cải trong một quốc gia. Trong các lý thuyết kinh tế tiêu chuẩn, quá nhiều hoặc quá ít vốn chủ sở hữu đều cho thấy thiếu cơ hội và là trở ngại cho tăng trưởng. Tuy nhiên, trước khi có thể giải quyết những thuận lợi hay khó khăn của mức độ bất bình đẳng, chúng ta cần có khả năng định lượng mức độ công bằng hoặc bất bình đẳng. Phương pháp tiêu chuẩn là sử dụng đường cong Lorenz và chỉ số Gini.

Đường cong Lorenz được xác định bởi một hàm $L(x)$ với $0 \leq x \leq 1$, đo lường tỷ lệ của một thứ gì đó được nắm giữ bởi x tỷ lệ dưới cùng của dân số. Do đó, nếu $L(0.2) = 0.1$, đối với hàm Lorenz về thu nhập ở một quốc gia, thì 20% phần dân số ở dưới cùng kiếm được 10% thu nhập ở quốc gia đó. Vì theo định nghĩa thông thường, một người không thể có thu nhập âm nên hàm Lorenz không âm và tăng dần. Vì hàm Lorenz được tính từ dưới lên nên ta cũng có $L(x) \leq x$ với mọi x .

Chúng ta có thể thực hiện thêm một vài quan sát nữa. Toàn bộ dân số có toàn bộ thu nhập của người dân. Một tập hợp dân số trống không có thu nhập nào bằng thu nhập của dân số. Bất kỳ phân khúc dưới cùng nào cũng sẽ có thu nhập không âm. Trong các công thức, những quan sát này lần lượt trở thành $L(1) = 1, L(0) = 0$, và $L(x) \geq 0$ với mọi x .

Nếu có vốn chủ sở hữu hoàn hảo thì hàm Lorenz sẽ là $L(x) = x$. Bất kỳ đường cong Lorenz nào chúng ta tìm được cho một dân số thực sẽ nằm dưới đường cong này. Chỉ số Gini (hoặc hệ số Gini) đo tỷ lệ phần trăm mà đường cong Lorenz thực nằm dưới đường cong lý tưởng.



Hình 4. Đường cong Lorenz.

$$\text{Về mặt tính toán, } G = \frac{\int_0^1 (x - L(x))dx}{\int_0^1 xdx} = 2 \int_0^1 (x - L(x))dx.$$

Trong thực tế, con số này thường được nhân với 100, cho biết tỷ lệ phần trăm (từ 0 đến 100) thay vì tỷ lệ (từ 0 đến 1) của diện tích dưới hàm lý tưởng và phía trên hàm đo được.

Bài toán 2. Chỉ số Gini với công thức phân phối thu nhập.

Đường cong Lorenz về thu nhập của một quốc gia được cho bởi $L(x) = 0.8x^3 + 0.2x$. Tỷ lệ thu nhập của nửa dưới dân số là bao nhiêu? Tìm chỉ số Gini.

Lời giải.

Để tìm tỷ lệ thu nhập của nửa dưới cùng của dân số, chúng ta thay $x = 0.5$ vào phương trình của $L(x)$ và được:

$$L(0.5) = (0.8)(0.5)^3 + (0.2)(0.5) = 0.1 + 0.1 = 0.2.$$

Do đó, 50% dưới cùng của dân số chiếm 20% tổng thu nhập. Để tính chỉ số Gini, ta có:

$$G = 2 \int_0^1 (x - 0.8x^3 - 0.2x)dx = 2(0.4x^2 - 0.2x^4)|_0^1 = 0.4.$$

Vậy chỉ số Gini ở quốc gia giả định này là 40.

4. Kết luận

Chúng tôi đã trình bày hai kỹ thuật quan trọng có thể sử dụng tính tích phân cho các hàm phức tạp. Bên cạnh đó, một số ứng dụng trong kinh tế của tích phân đã được đưa ra qua các bài toán về tính thặng dư tiêu dùng, thặng dư sản xuất và tính chỉ số Gini.

Tài liệu tham khảo

Larry J. G., David C. L. and David I. S., 2018. *Calculus and Its Applications* (14th ed), Pearson.

Vũ Tiến Việt và Phan Thế Hải, 2021. *Một số chuyên đề ôn tập thi Olympic toán sinh viên*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Vĩnh và Nguyễn Hồ Quỳnh, 2006. *Toán học cao cấp tập hai*, Nhà xuất bản Giáo dục.

ABSTRACT

Methods of integration and economic applications of integration

Nguyen Thi Kim Son*
Hanoi University

Our first purpose in this paper is to present two methods of calculating integration which are integration by substitution and integration by parts. Then we present some economic applications of calculus.

Keywords: Integration by substitution; integration by parts; application of integration; integral.

Thuật toán phân tích thành phần chính và ứng dụng trên phần mềm R

Hoàng Thuỳ Linh*
Trường Đại học Giao thông vận tải

TÓM TẮT

Phương pháp phân tích thành phần chính (tên Tiếng Anh: Principal Component Analysis, viết tắt là PCA) từ lâu đã là một trong những công cụ phổ biến nhất trong việc phân tích dữ liệu thống kê, nhất là khi các nhà thống kê phải đối mặt với các bộ dữ liệu có số chiều lớn. Phương pháp PCA giúp giảm số chiều của bộ dữ liệu mà không làm mất đi những thông tin cần thiết cho việc xây dựng mô hình và đưa ra kết luận. Đây là phương pháp được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực nghiên cứu như khoa học máy tính, kinh tế, sinh hoá,... Trong bài báo này, tác giả đưa ra cơ sở lý thuyết và một ứng dụng vô cùng quan trọng của phương pháp PCA là phân tích dữ liệu. Song hành cùng PCA, nhiều phần mềm được phát triển để thực hiện phương pháp này trong việc tiền xử lý dữ liệu và phân tích dữ liệu. Trong đó, phần mềm R là một phần mềm dễ sử dụng, có tính ứng dụng cao và rất thân thiện với người dùng. Bài viết dưới đây trình bày về nội dung của phương pháp phân tích thành phần chính PCA và sử dụng ngôn ngữ R để hỗ trợ lập trình.

Từ khóa: Xử lý dữ liệu; Phân tích thành phần chính; PCA; Tiền xử lý dữ liệu.

1. Đặt vấn đề

Ngày nay, dữ liệu đang trở thành trung tâm của thế giới hiện đại, không chỉ là thông tin mà còn là nguồn lực quan trọng thay đổi cả ngành công nghiệp và xã hội. Tuy nhiên, với một lượng dữ liệu khổng lồ hiện tại thì đa phần các bộ dữ liệu đều chưa thực sự hoàn thiện và cần nhiều bước tiền xử lý cũng như sau đó người làm khoa học cần rút ra được các kết luận và ý nghĩa của bộ dữ liệu đó.

Phương pháp phân tích thành phần chính (PCA) được xem là một kỹ thuật phân tích dữ liệu đa chiều lâu đời và được biết đến nhiều nhất. Phương pháp này được giới thiệu lần đầu bởi Karl Pearson năm 1901 và được phát triển bởi Hotelling vào năm 1933 (Jolliffe, 2002). Giống như các phương pháp đa biến khác, PCA không được sử dụng rộng rãi cho đến khi máy tính ra đời, nhưng hiện nay nó đã có mặt trong hầu hết mọi gói thống kê. Ý tưởng chính của phương pháp PCA là giảm số chiều của bộ dữ liệu trong đó có một số lượng lớn các biến có mối quan hệ với nhau, mà vẫn giữ lại được nhiều thông tin nhất có thể trong bộ dữ liệu. PCA được nhắc đến một cách ngắn gọn bởi Fisher và MacKenzie, đây là phương pháp phù hợp hơn so với việc phân tích phương sai cho mô hình hóa dữ liệu phản hồi (Fisher and MacKenzie, 1923).

Kể từ đó, tiện ích của PCA đã được khám phá lại trong nhiều lĩnh vực khoa học đa dạng, dẫn đến vô số thuật ngữ khác được ra đời. Phương pháp PCA hiện tại được gọi bằng nhiều tên khác nhau. Ngoài những điều đã được đề cập bên trên, phương pháp phân tích suy biến (SVD) cũng có mối quan hệ chặt chẽ với PCA, được sử dụng trong giải tích số (Gdub, VanLoan, 1983; Mandel, 1982) và khai triển Karhunen-Loève (Karhunen, 1947; Loève, 1948) trong kỹ thuật điện. Ngoài ra, phương pháp PCA còn có rất nhiều ứng dụng. Vector riêng và vector đặc trưng thường được sử dụng trong khoa học vật lý. Trong kỹ thuật phân tích hình ảnh, thuật ngữ phép biến đổi Hotelling thường được sử dụng cho phép chiếu thành phần chính. Ngoài ra, phân tích thư từ là một biến thể kép đặc biệt của PCA được ưa chuộng ở các nước nói tiếng Pháp và Canada cũng như trong một số lĩnh vực khoa học.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Tiền xử lý dữ liệu

Dữ liệu nhiều chiều được biểu diễn dưới dạng một ma trận gồm n hàng và p cột, trong đó n là số quan trắc (observations) và p là số biến (variables) khảo sát, được biểu diễn qua ma trận dữ liệu như sau:

*Tác giả liên hệ
Email: linhht@utc.edu.vn

$$\mathbf{X}_{n \times p} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Trong đó: $\mathbf{x}'_i = (x_{i1} \ x_{i2} \ \cdots \ x_{ip})$, $i = \overline{1, n}$.

Tức là, mỗi véc-tơ hàng \mathbf{x}'_i biểu diễn quan trắc thứ i trong không gian p -chiều.

Đối với một ma trận dữ liệu $\mathbf{X}_{n \times p}$, ta thường quan tâm tới các đại lượng sau:

- Véc-tơ trung bình (mean vecto);
- Ma trận hiệp phương sai (covariance matrix);
- Ma trận hệ số tương quan (correlation matrix).

Tiền xử lý dữ liệu (data pre-processing) là một bước quan trọng để làm sạch dữ liệu, biến đổi dữ liệu về dạng phù hợp cho bước phân tích, xử lý hình thức. Có nhiều kỹ thuật tiền xử lý dữ liệu khác nhau tùy thuộc vào tính chất của bộ dữ liệu, phương pháp phân tích,... Một số kỹ thuật tiền xử lý thường dùng bao gồm:

- Xử lý dữ liệu khuyết thiếu;
- Mã hoá các biến nhóm;
- Chuẩn hoá dữ liệu: co giãn và quy tâm dữ liệu;
- Phát hiện và xử lý các giá trị ngoại lai.

2.2. Phương pháp phân tích thành phần chính

Phương pháp phân tích thành phần chính (*Principal Component Analysis – PCA*) là phương pháp được dùng để giảm số chiều của một bộ dữ liệu mà trong đó có một số lượng lớn các biến có tương quan với nhau, trong khi vẫn giữ được lượng thông tin nhiều nhất có thể của bộ dữ liệu gốc.

Việc giảm số chiều được thực hiện bởi việc biến đổi tập hợp các biến gốc sang một tập hợp các biến mới, gọi là các “thành phần chính”. Các thành phần mới này không tương quan với nhau và có thứ tự sao cho một vài thành phần đầu tiên giữ được nhiều nhất thông tin có thể của bộ dữ liệu.

Có hai cách tiếp cận phương pháp PCA:

• **Tiếp cận theo hình học:** ta thực hiện phép xoay để chuyển về một hệ trục tọa độ mới có khả năng biểu diễn dữ liệu tốt hơn, cho phép khám phá được những liên kết tiềm ẩn trong bộ dữ liệu cũ mà ta không thể thấy rõ trên hệ trục tọa độ cũ. Các trục tọa độ mới phải được đảm bảo là luôn trực giao đôi một với nhau.

Nói cách khác, các thành phần chính sẽ biểu diễn một hệ trục tọa độ mới thu được bằng cách xoay các trục gốc tới một tập hợp các trục mới:

- Thành phần chính thứ nhất có hướng mà mô tả được lớn nhất sự biến thiên của dữ liệu;
- Thành phần chính thứ hai có hướng mà mô tả được lớn nhất sự biến thiên của dữ liệu và trực giao với thành phần chính thứ nhất;
- Cứ tiếp tục như vậy cho đến khi thành phần chính cuối cùng có hướng mà mô tả được ít nhất sự biến thiên của dữ liệu và trực giao với tất cả các thành phần chính khác.

• **Tiếp cận theo đại số:** các thành phần chính là các tổ hợp tuyến tính của p biến gốc X_1, \dots, X_p sao cho:

- Thành phần chính thứ nhất có phương sai lớn nhất có thể;
- Thành phần chính thứ hai có phương sai lớn nhất có thể và trực giao với thành phần chính thứ nhất; ...

Phần dưới đây của bài báo sẽ trình bày phân tích thành phần chính mẫu (Sample PCA) theo **hướng tiếp cận đại số**.

2.2.1. Phân tích thành phần chính mẫu (Sample PCA)

Ta xét bộ dữ liệu gồm n quan sát (véc-tơ) độc lập $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ được chọn từ một quần thể p -chiều, quần thể này có véc-tơ trung bình (population mean) $\boldsymbol{\mu}$ và ma trận hiệp phương sai (population covariance matrix) $\boldsymbol{\Sigma} = \text{Cov}(\mathbf{x}_i)$. Giả sử bộ dữ liệu được chọn có véc-tơ trung bình mẫu (sample mean) $\bar{\mathbf{x}}_{1 \times p} = n^{-1} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i$ và ma trận hiệp phương sai mẫu (sample covariance matrix) $\mathbf{S}_{p \times p}$ với:

$$\mathbf{S} = (n - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n (\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}})^T \quad (2)$$

Để hình dung đơn giản, ta xét duy nhất một véc-tơ ngẫu nhiên $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ (ta tạm bỏ qua chỉ số i , chú ý phân biệt với các quan sát). Ý tưởng của phương pháp PCA là mô tả sự biến thiên của dữ liệu trong một tập hợp các biến có tương quan với nhau x_1, x_2, \dots, x_p bởi một tập hợp các biến mới không tương quan với nhau y_1, y_2, \dots, y_p . Mỗi biến y_1, y_2, \dots, y_p là một tổ hợp tuyến tính của các biến x_1, x_2, \dots, x_p , tức là:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = \mathbf{a}'_1\mathbf{x}, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = \mathbf{a}'_2\mathbf{x}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$y_p = a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \dots + a_{pp}x_p = \mathbf{a}'_p \mathbf{x}.$$

Dạng ma trận:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}_{p \times p} \mathbf{x} \quad (3)$$

Với \mathbf{S} là ma trận hiệp phương sai, từ tổ hợp tuyến tính $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ trên, ta có kết quả (Richard, Wichern, 2007):

$$\text{Cov}(\mathbf{y}) = \text{Cov}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{S}\mathbf{A}' \quad (4)$$

Tập hợp các biến mới y_1, y_2, \dots, y_p được xây dựng sao cho:

- y_1 có thể mô tả được nhiều nhất có thể sự biến thiên (phương sai) của dữ liệu gốc trong số tất cả các tổ hợp tuyến tính tạo từ x_1, x_2, \dots, x_p .

- Tiếp theo, y_2 được chọn sao cho có thể mô tả được nhiều nhất có thể sự biến thiên của dữ liệu còn lại và không tương quan với y_1 .

- ...

Các biến y_1, y_2, \dots, y_p được xây dựng như trên gọi là các thành phần chính. Các thành phần chính này tạo thành một hệ toạ độ trực giao mới.

Với cách xây dựng như trên, ta chỉ cần sử dụng y_1, y_2, \dots, y_q , với $q \ll p$, là có thể mô tả được hầu hết sự biến thiên của bộ dữ liệu từ các biến gốc x_1, x_2, \dots, x_p , từ đó dẫn tới mục tiêu giảm số chiều của bộ dữ liệu. Xét $y_j = a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jp}x_p = \mathbf{a}'_j \mathbf{x}, j = 1, \dots, p$. Sử dụng kết quả của tổ hợp tuyến tính bên trên ta có:

$$\text{Cov}(y_j, y_i) = \text{Var}(y_j) = \mathbf{a}'_j \mathbf{S} \mathbf{a}_j \quad (5)$$

$$\text{và } \text{Cov}(y_j, y_k) = \mathbf{a}'_j \mathbf{S} \mathbf{a}_k, \forall k \neq j \quad (6)$$

Do đó, để xây dựng các thành phần chính y_1, y_2, \dots, y_p , ta đi tìm các véc-tơ hệ số $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ sao cho:

- Thành phần chính thứ 1 là tổ hợp tuyến tính $\mathbf{a}'_1 \mathbf{x}$ mà làm cực đại:

$$\text{Var}(y_1) = \mathbf{a}'_1 \mathbf{S} \mathbf{a}_1 \text{ với ràng buộc } \mathbf{a}'_1 \mathbf{a}_1 = 1$$

Một lưu ý ở đây về lý do xuất hiện của ràng buộc $\mathbf{a}'_1 \mathbf{a}_1 = 1$ là do ta mong muốn $\text{Var}(y_1) = \mathbf{a}'_1 \mathbf{S} \mathbf{a}_1$ đạt giá trị lớn nhất, tuy nhiên giá trị phương sai này có thể tăng khi ta nhân $y_1 = \mathbf{a}'_1 \mathbf{x}$ với một hằng số $|c| > 1$, khiến phép tính trở thành: $\text{Var}(cy_1) = \text{Var}(c\mathbf{a}'_1 \mathbf{x}) = c^2 \text{Var}(\mathbf{a}'_1 \mathbf{x})$. Do đó, để ngăn việc này xảy ra, ta cần chuẩn hoá tổ hợp véc-tơ: $\mathbf{a}'_1 \mathbf{a}_1 = 1$.

Tương tự:

- Thành phần chính thứ hai là tổ hợp tuyến tính $\mathbf{a}'_2 \mathbf{x}$ mà làm cực đại:

$$\text{Var}(y_2) = \mathbf{a}'_2 \mathbf{S} \mathbf{a}_2 \text{ với ràng buộc } \mathbf{a}'_2 \mathbf{a}_2 = 1$$

$$\text{và } \text{Cov}(y_1, y_2) = \text{Cov}(\mathbf{a}'_1 \mathbf{x}, \mathbf{a}'_2 \mathbf{x}) = \mathbf{a}'_1 \mathbf{S} \mathbf{a}_2 = 0$$

...

- Thành phần chính thứ j là tổ hợp tuyến tính $\mathbf{a}'_j \mathbf{x}$ mà làm cực đại:

$$\text{Var}(y_j) = \mathbf{a}'_j \mathbf{S} \mathbf{a}_j \text{ với ràng buộc } \mathbf{a}'_j \mathbf{a}_j = 1$$

$$\text{và } \text{Cov}(y_j, y_k) = \text{Cov}(\mathbf{a}'_j \mathbf{x}, \mathbf{a}'_k \mathbf{x}) = \mathbf{a}'_j \mathbf{S} \mathbf{a}_k = 0, \forall k < j.$$

Như vậy, tiêu chuẩn cực đại hoá ta cần xét là: $\max(\mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a})$. Ta cần tìm \mathbf{a}_1 sao cho:

$$\max_{\mathbf{a}} \frac{\mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a}}{\mathbf{a}' \mathbf{a}} = \text{Var}(y_1) \quad (7)$$

Giả sử ma trận hiệp phương sai \mathbf{S} có các giá trị riêng là $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$ và tương ứng với các véc-tơ riêng đã chuẩn hoá $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_p$.

Khi đó, ta có thể chỉ ra được rằng (Richard and Wichern, 2007):

$$\max_{\mathbf{a}} \frac{\mathbf{a}' \mathbf{S} \mathbf{a}}{\mathbf{a}' \mathbf{a}} = \lambda_1 \quad (8)$$

Giá trị này đạt được khi $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1$.

2.2.2. Phương sai mẫu toàn phần

Xét $y_1 = \mathbf{e}'_1 \mathbf{x}, y_2 = \mathbf{e}'_2 \mathbf{x}, \dots, y_p = \mathbf{e}'_p \mathbf{x}$, ta có:

Phương sai mẫu toàn phần của dữ liệu gốc là: $\sum_{i=1}^p s_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p$, với $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p \geq 0$ là các giá trị riêng của ma trận hiệp phương sai mẫu \mathbf{S} . Khi đó:

- Tỷ lệ phương sai mẫu toàn phần được giải thích bởi thành phần chính thứ k là:

$$\frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p} = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^p \lambda_i}, k = 1, \dots, p. \quad (9)$$

- Đóng góp của biến x_k vào thành phần chính y_j :

$$r_{y_j, x_k} = \frac{e_{jk} \sqrt{\lambda_j}}{s_{kk}}, j, k = 1, 2, \dots, p. \quad (10)$$

Nếu các thành phần chính được xây dựng từ ma trận hệ số tương quan \mathbf{R} (tức là $s_{kk} = 1$) ta có:

$$r_{y_j, x_k} = e_{jk} \sqrt{\lambda_j}. \quad (11)$$

2.2.3. Ma trận các hệ số tải và ma trận chứa các điểm thành phần

Ta xét ma trận dữ liệu:

$$\mathbf{X}_{n \times p} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n1} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Đặt $\mathbf{P} = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_p)$ với $e'_j = (e_{j1}, \ \cdots, \ e_{jp})$, $j = 1, \dots, p$ là các véc-tơ riêng của ma trận hiệp phương sai \mathbf{S} . Với $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$ thì y_{ij} (là hình chiếu của quan trắc thứ i trên thành phần chính thứ j) xác định bởi:

$$y_{ij} = e_{j1}x_{i1} + e_{j2}x_{i2} + \cdots + e_{jp}x_{ip}.$$

Ta có:

$$\mathbf{Y}_{n \times p} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1p} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n1} & \cdots & y_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \mathbf{X}_{n \times p} \mathbf{P}.$$

Và:

$$\mathbf{X}_{n \times p} = \mathbf{Y}_{n \times p} \mathbf{P}'. \quad (12)$$

Khi đó, \mathbf{P} được gọi là ma trận các hệ số tải (loadings matrix) và \mathbf{Y} là ma trận chứa các điểm thành phần (scores matrix). Cụ thể,

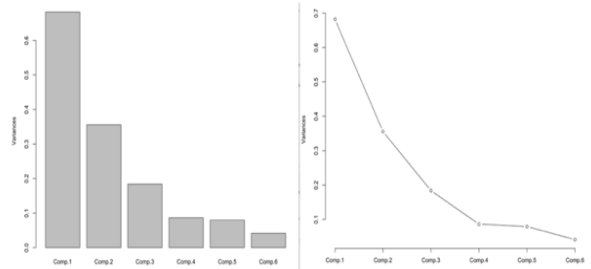
- Ma trận các điểm thành phần (Scores): ứng với mỗi quan trắc (x_{ij}), ta có một điểm thành phần (score) (y_{ij}). Cột đầu tiên của ma trận các điểm thành phần \mathbf{Y} (tương ứng với thành phần chính thứ nhất) mô tả nhiều nhất sự biến thiên của dữ liệu, tiếp theo đến cột thứ hai, Đồ thị các điểm thành phần cho phép ta xác định được các quan trắc tương tự nhau, cụm (clusters), các điểm ngoại biên (outliers) hay các giá trị cực biên (extreme values).

- Ma trận các hệ số tải (Loadings): mô tả trọng số/sự quan trọng của mỗi biến trong dữ liệu gốc. Từ các hệ số tải ta có thể: xác định biến nào có ý nghĩa lớn nhất đối với mỗi thành phần chính, sự tương quan giữa các biến, xác định các biến nào tạo nên sự hình thành cụm của các điểm thành phần.

2.2.4. Xác định số thành phần chính cần giữ lại bằng biểu đồ Scree-plot

Có rất nhiều tiêu chuẩn để xác định số thành phần chính cần giữ lại. Bài báo này trình bày về một trong các phương pháp phổ biến nhất để xác định số thành phần chính được giữ lại, biểu đồ scree-plot (Hình 1). Biểu đồ scree-plot là một biểu đồ phân đoạn đơn giản, nó cho biết các giá trị riêng đối với từng thành phần chính riêng lẻ. Biểu đồ hiển thị các giá trị riêng trên trục y và số lượng các thành phần chính trên trục x. Hình ảnh của biểu đồ luôn là một đường cong đi xuống. Hầu hết các biểu đồ này đều có hình dáng tương tự nhau, bắt đầu ở vị trí cao ở bên trái, rơi xuống khá nhanh và sau đó bắt đầu trải phẳng ra ở một điểm nào đó. Điều này do thành phần chính đầu tiên thường đã giải thích phần lớn độ biến thiên, một số thành phần chính tiếp theo giải thích một lượng vừa phải và các thành phần chính sau cùng chỉ giải thích một phần nhỏ trong tổng thể độ biến thiên. Ta tìm kiếm “khuỷu tay” trong đường cong và chọn tất cả các thành phần chính ngay trước khi đường thẳng bắt đầu. Như trong hình 1 gồm 6 thành phần chính, ta thấy phần “khuỷu tay” rơi vào Comp.4 tức là thành phần chính thứ 4, vì vậy ta có thể giảm số chiều của bộ dữ liệu xuống còn 4 thành phần chính.

Hình 1. Ví dụ minh họa phần “khuỷu tay” trong PCA.



3. Ứng dụng phương pháp phân tích thành phần chính bằng phần mềm R

3.1. Mô tả dữ liệu

- **Nguồn dữ liệu:** Bộ dữ liệu về rượu (wines dataset), R. Wehrens. *Chemometrics with R: Multivariate Data Analysis in the Natural Science and Life Sciences*. Heidelberg, Germany: Springer, 2011.

- Bộ dữ liệu mô tả về 3 loại rượu (Barbera, Barolo và Grignolino) ở vùng Piedmont nước Ý. Trong đó, rượu Barolo được làm từ nho Nebbiolo, hai loại rượu còn lại được làm từ loại nho có cùng tên với chúng. Bộ dữ liệu gồm 14 biến (variables) và 177 quan trắc (observations).


```
setwd("/Users/hoanglinh/Downloads/3. GTVT/6. NCKH/ERSD2024")
wines <- read.csv("wines.csv", header = T, sep = ";")
colnames(wines) #cho biết tên các biến
## [1] "alcohol" "malic.acid" "ash"
## [4] "ash.alkalinity" "magnesium" "tot..phenols"
## [7] "flavonoids" "non.flav..phenols" "proanth"
## [10] "col..int." "col..hue" "OD.ratio"
## [13] "proline" "vintages"
```

Trong 14 biến, biến thứ 14 là *vintages* là biến nhãn cho biết tên loại rượu của từng quan trắc tương ứng. Ta có *col..int* = color intensity, *col..hue* = color hue và *OD.ratio* = tỷ số giữa sự hấp thụ (absorbance) tại các bước sóng 280 và 315 nm. Ngoại trừ các biến *col..int*, *col..hue*, *OD.ratio*, các biến còn lại đều là các biến mô tả nồng độ (concentration).

Trước tiên, ta tạo một data.frame mới gồm 13 cột đầu tiên từ bộ dữ liệu ban đầu *wines* (gồm các biến định lượng) để thực hiện thống kê mô tả (biến thứ 14 là *vintages* là biến định tính).

```
dat_wines <- wines[, 1:13] # chỉ giữ lại 13 biến định lượng
head(dat_wines)
```

	alcohol	malic.acid	ash	ash.alkalinity	magnesium	tot..phenols	flavonoids	non.flav..phenols	proanth	col.int.	col.hue	OD.ratio	proline
1	13.20	1.78	2.14	11.2	100	2.65	2.76	0.26	1.28	4.38	1.050	3.40	1050
2	13.16	2.36	2.67	18.6	101	2.80	3.24	0.30	2.81	5.68	1.030	3.17	1185
3	14.37	1.95	2.50	16.8	113	3.85	3.49	0.24	2.18	7.80	0.860	3.45	1480
4	13.24	2.59	2.87	21.0	118	2.80	2.69	0.39	1.82	4.32	1.040	2.93	735
5	14.20	1.76	2.45	15.2	112	3.27	3.39	0.34	1.97	6.75	1.050	2.85	1450
6	14.39	1.87	2.45	14.6	96	2.50	2.52	0.30	1.98	5.25	1.020	3.58	1290

Hình 2. 6 quan trắc đầu của bộ dữ liệu *dat_wines*.

3.2. Thống kê mô tả

```
# Tính phạm vi biến thiên của dữ liệu (range)
apply(dat_wines, 2, range)
##      alcohol malic.acid ash ash.alkalinity magnesium tot..phenols flavonoids
## [1,] 11.03      0.74 1.36      10.6          70      0.98      0.34
## [2,] 14.83      5.80 3.23      30.0         162      3.88      5.08
##      non.flav..phenols proanth col.int. col.hue OD.ratio proline
## [1,]      0.13      0.41      1.28      0.48      1.27      278
## [2,]      0.66      3.58     13.00      1.71      4.00     1680
# Đồ thị boxplot biểu diễn bộ dữ liệu ban đầu
boxplot(dat_wines)
```

Nhận xét: từ đồ thị boxplot (Hình 3) và kết quả tính phạm vi biến thiên của dữ liệu, ta thấy rằng đơn vị và phương sai của các biến rất khác biệt. Do đó, ta cần thực hiện chuẩn hóa dữ liệu (standardizing data) trước khi xử lý. Ta có thể thực hiện quy tâm (mean-centering) hoặc/và co giãn (scaling) dữ liệu.

```
# Quy tâm và co giãn dữ liệu (chuẩn hoá dữ liệu)
sc_wines <- as.data.frame(scale(dat_wines))
boxplot(sc_wines)
```

3.3. Phân tích thành phần chính

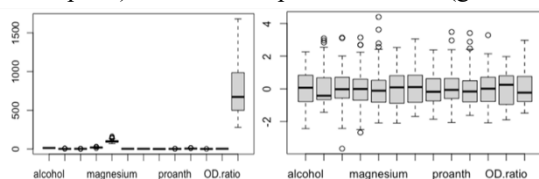
Ta thực hiện PCA từ bộ dữ liệu đã được chuẩn hóa *sc_wines*.

```
pca_wines <- princomp(sc_wines)
summary(pca_wines)
z# Importance of components:
##      Comp.1      Comp.2      Comp.3      Comp.4      Comp.5
## Standard deviation 2.1567037 1.5770968 1.2021310 0.95876028 0.92567174
## Proportion of Variance 0.3598307 0.1924128 0.1117946 0.07111109 0.06628744
## Cumulative Proportion 0.3598307 0.5522435 0.6640381 0.73514919 0.80143663
##      Comp.6      Comp.7      Comp.8      Comp.9      Comp.10
## Standard deviation 0.80075246 0.74085307 0.59055673 0.53623338 0.49539305
## Proportion of Variance 0.04960367 0.04246014 0.02697991 0.02224462 0.01898528
## Cumulative Proportion 0.85104030 0.89350044 0.92048035 0.94272497 0.96171025
##      Comp.11      Comp.12      Comp.13
## Standard deviation 0.47346227 0.40917666 0.321500291
## Proportion of Variance 0.01734155 0.01295206 0.007996133
## Cumulative Proportion 0.97905180 0.99200387 1.000000000
```

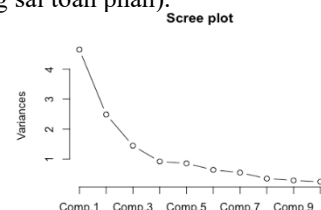
Xác định số thành phần chính bằng đồ thị scree-plot.

```
screeplot(pca_wines, type = "lines", main = "Scree plot")
```

Nhận xét: từ Hình 4, ta thấy rằng có thể giữ lại 4 thành phần chính đầu (giải thích được 73.51 phương sai toàn phần) hoặc 5 thành phần chính đầu (giải thích được 80.14 phương sai toàn phần).



Hình 3. So sánh đồ thị boxplot biểu diễn bộ dữ liệu ban đầu (trái) và bộ dữ liệu sau khi chuẩn hoá (phải).



Hình 4. Đồ thị scree-plot biểu diễn các thành phần chính và phương sai tương ứng.

3.3. Áp dụng các thành phần chính để phân cụm và tìm các điểm ngoại lai

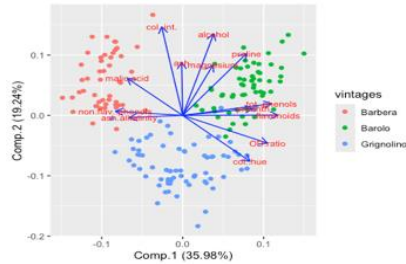
Để xác định cụm (clusters) để phân loại các loại rượu, ta vẽ các scores tương ứng với hai thành phần chính đầu tiên.

```
autoplot(pca_wines, loadings = TRUE, loadings.colour = 'blue', loadings.label = TRUE, loadings.label.size = 3, colour = "vintages", data = wines)
```

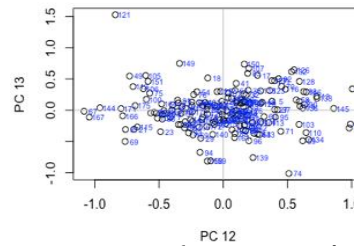
Sau khi làm PCA, khi vẽ đồ thị ta thấy có 3 cụm màu đỏ, xanh lá và xanh dương lần lượt tương ứng với 3 loại rượu Barbera, Barolo và Grignolino. Đồng thời, ta cũng có thể thấy những chất nào đặc trưng cho từng loại rượu (Hình 5).

Ngoài ra, để xác định các điểm ngoại lai (outliers), ta vẽ các scores tương ứng với các thành phần chính cuối (Hình 6).

```
plot(wines_scores[,12:13], xlab = "PC 12", ylab = "PC 13", main = "Scores plot")
abline(h = 0, v = 0, col = "gray")
text(wines_scores[, 12] + 0.07, wines_scores[, 13], label = rownames(sc_wines), col="blue", cex = 0.6)
```



Hình 6. Phân cụm dữ liệu bằng PCA.



Hình 7. Xác định điểm ngoại lai bằng PCA.

4. Kết luận

Bài viết bước đầu tìm hiểu chung về thuật toán phân tích thành phần chính PCA và ứng dụng của nó trong việc xử lý dữ liệu và phân tích một bộ dữ liệu cho trước. Phương pháp phân tích thành phần chính sử dụng phép biến đổi trực giao biến đổi một bộ dữ liệu từ một không gian nhiều chiều sang một không gian mới ít chiều hơn nhằm tối ưu hóa việc thể hiện sự biến thiên của dữ liệu. Một điểm thuận lợi của phương pháp này là các code lập trình đều được khai thác và thực hiện trên nhiều ngôn ngữ như R, Python,..., đó là các ngôn ngữ lập trình mở, được phát triển gần đây khi mà xu hướng kỹ thuật số, công nghệ 4.0 ngày càng phát triển. Đây là một hướng nghiên cứu thú vị cho tác giả cũng như cho sinh viên ngành Toán và Công nghệ thông tin trong thời gian tới.

Tài liệu tham khảo

- Fisher, R; MacKenzie, W. 1923. Studies in crop variation,II, The manurial response of different potato varieties. *Journal of Agricultural Science*, 13: 311-320.
- Gdub, G; VanLoan, C.1983. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, Oxford.
- Jolliffe, I.T. 2002. *Principal Component Analysis, Second Edition*. Springer, p.9.
- Karhunen, K. 1947. Uber lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ*, Series A, p.137.
- Loève, M. 1948. Fonctions aleatoires de seconde ordre, in P. Levy (Editor). *Processus Stochastiques et Mouvement Brownien*. Hermann, Paris.
- Mandel, J. 1982. Use of the singular value decomposition in regression analysis. *American Statistician*, 36: 15-24.
- Richard, A.J; Wichern D.W. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis (6th Edition)*. Prentice Hall, p.76, 432.

ABSTRACT

Principal Component Analysis and application in R

Hoang Thuy Linh

University of Transport and Communications

Principal Component Analysis (PCA) is one of the most popular tools in data analysis. The PCA method helps reduce the dimensionality of a dataset without losing essential information. It is widely used in many research fields. In this paper, the author presents the theoretical basis of PCA and an important application of the method: data analysis. The paper also uses the R programming language to demonstrate how to support this process. This program shows the number of principal components that need to be retained, as well as other important information from the given dataset.

Keywords: Data processing; Principal component analysis; PCA; Data pre-processing.

Bài toán vận tải và ứng dụng trong Python

Nguyễn Hà Trang*

Trường Đại học Giao thông vận tải

TÓM TẮT

Lý thuyết tối ưu hóa là một trong những nội dung quan trọng của Toán học, gắn liền với các nhánh hiện đại của lý thuyết Toán học. Đặc biệt trong xã hội hiện nay, xu hướng ứng dụng của các vấn đề nghiên cứu, tính tối ưu của các giải pháp đang được đề cao, lý thuyết tối ưu hóa đang rất được quan tâm. Một trong những nội dung của liên quan đến lý thuyết tối ưu hóa là bài toán vận tải. Vấn đề cần giải quyết trong bài toán này là xác định một kế hoạch vận chuyển tối ưu giữa các kho và các cửa hàng, tùy thuộc vào các nguồn cung cấp và nhu cầu xác định. Bài viết này sẽ trình bày mô hình toán học của bài vận chuyển. Bên cạnh đó, bài viết trình bày ứng dụng và thư viện hỗ trợ tính toán nghiệm của bài toán trên ngôn ngữ lập trình Python.

Từ khóa: Bài toán vận tải; Tối ưu hóa; Python; OR-Tools.

1. Đặt vấn đề

Bài toán vận tải là một trong những bài toán cơ bản, gắn với thực tế, đóng vai trò quan trọng trong logistics và chuỗi cung ứng, của lý thuyết tối ưu hóa, đặc biệt là bài toán quy hoạch tuyến tính. Nó giúp giải quyết các vấn đề vận chuyển từ nơi xuất phát đến nơi đến phù hợp. Mục tiêu cơ bản của bài toán là giảm thiểu chi phí vận chuyển từ điểm đi đến điểm đến. Chúng ta có bài toán quy hoạch tuyến tính trong trường hợp mô hình hệ tuyến tính và hàm mục tiêu đều là phương trình tuyến tính. Vì vận tải là yếu tố then chốt rất quan trọng nên rất nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước đã tham gia nghiên cứu và mở rộng bài toán. Nhiều nhà khoa học như : Ahmed và cộng sự năm 2017, Abdul và cộng sự năm 2012, Nigus và Tripti năm 2013 (V. Prifti, 2020) đã đưa ra những phương pháp giải khác. Bên cạnh đó, Toán ứng dụng là một trong những chủ đề thu hút sự hứng thú của sinh viên, rất nhiều ngành học (logistics, cung ứng, vận tải, kinh tế,...) ở Việt Nam có các học phần liên quan đến tối ưu hóa, quy hoạch tuyến tính và bài toán vận tải. Vì vậy, bài báo này đã trình bày bài toán vận tải cùng với những kiến thức căn bản nhằm giúp những người mới tiếp xúc với Toán ứng dụng có cái nhìn dễ hiểu mà vẫn nắm được kiến thức.

Thiết bị máy tính hiện đại từ lâu đã được áp dụng vào việc tìm nghiệm của bài toán vận tải. Tuy nhiên, phương pháp phổ biến trước giờ là dùng Excel (A.Vamsikrishna, 2021). Xu hướng hiện nay, Python là ngôn ngữ mã nguồn mở, có các thư viện đa dạng, mà lại dễ cài đặt và sử dụng. Bên cạnh đó, một trong những công cụ đặc lực để giải quyết bài toán quy hoạch tuyến tính là phần mềm OR-Tools. Đây là một phần mềm nguồn mở nhằm tối ưu hóa tổ hợp, tìm kiếm giải pháp tốt nhất cho một vấn đề trong số rất nhiều các giải pháp có thể có. Bài viết này tập trung nghiên cứu về mô hình hóa bài vận tải và ứng dụng tính toán trên ngôn ngữ Python với gói thư viện OR-Tools.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên

2.1.1. Bài toán quy hoạch tuyến tính

Một bài toán quy hoạch tuyến tính là một bài toán tối ưu hóa. Trong đó, ta có một tập hợp các biến, nhận giá trị thực, thỏa mãn các ràng buộc là một tập hợp bất đẳng thức tuyến tính và làm một hàm tuyến tính cho trước nhận giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

Một bài toán quy hoạch tuyến tính được xác định dưới dạng sau:

$$\max (\text{hoặc min}) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Thỏa mãn:} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

* Tác giả liên hệ

Email: trangnh@utc.edu.vn

Hoặc ta có thể biểu diễn dưới dạng vector và ma trận như sau (Krasimira và nnk, 2011):

$$\max(\text{hoặc min}) c^T \vec{x}$$

Thỏa mãn $A\vec{x} \leq \vec{b}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^n$.

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$, c là ma trận cấp $1 \times n$ và b là ma trận cấp $m \times 1$.

Hàm tuyến tính f mà ta muốn tối ưu hóa ở trên được gọi là hàm mục tiêu. Nghiệm khả dĩ của bài toán là các giá trị thực thỏa mãn các bất đẳng thức.

2.1.2. Bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên

Theo (Krasimira và nnk, 2011), một bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên là một bài toán quy hoạch tuyến tính mà tất cả các biến của bài toán là nguyên. Bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên có thể được trình bày dưới dạng sau:

$$\max(\text{hoặc min}) c^T \vec{x}$$

Thỏa mãn $A\vec{x} \leq b$, $\vec{x} \in \mathbb{Z}^n$.

Trong đó A là ma trận cấp $m \times n$, c là ma trận cấp $1 \times n$ và b là ma trận cấp $m \times 1$.

Nếu chỉ có một bộ phận các biến là nguyên (ví dụ $x_i \in \mathbb{Z}^+ \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$) thì bài toán trở thành bài toán quy hoạch tuyến tính hỗn hợp.

Có rất nhiều thuật toán được nghiên cứu để giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên. Trong đó, có 2 thuật toán phổ biến là thuật toán cắt Glomory và thuật toán nhánh cận (Branch and bound). Trong bài báo này, ta không đi vào chi tiết 2 thuật toán, độc giả có thể xem thêm tại (Krasimira và nnki, 2011; Ping-Qi PAN, 2023).

2.2. Bài toán vận tải

Bài toán vận tải là vấn đề cần giải quyết trong cung ứng hàng hóa. Ta cần xác định một kế hoạch vận chuyển tối ưu sao cho chi phí vận chuyển là thấp nhất giữa các kho hàng và các cửa hàng, tùy thuộc vào các nguồn cung cấp và nhu cầu của mỗi cửa hàng, xem thêm tại (Engr. Dr. Uzorh, 2014).

Giả sử một công ty cung cấp có m kho và n cửa hàng bán lẻ, với một loại sản phẩm duy nhất được vận chuyển từ kho đến các cửa hàng. Mỗi kho có mức độ cung cấp cố định và mỗi cửa hàng có một mức độ nhu cầu cho trước. Ta cũng nắm được chi phí vận chuyển giữa mỗi cặp kho và cửa hàng, những chi phí này được giả định là tuyến tính. Cụ thể, ta xét các giả định như sau:

- Tổng nguồn cung của các sản phẩm từ kho i có được là $a_i, i = 1, 2, \dots, m$.
- Tổng nhu cầu cho các sản phẩm tại cửa hàng j là $b_j, j = 1, 2, \dots, n$.
- Chi phí của việc gửi một đơn vị sản phẩm từ kho i tới cửa hàng j là c_{ij} với $i = 1, 2, \dots, m$ và $j = 1, 2, \dots, n$. Tổng chi phí của một lô hàng là tuyến tính trong các số lượng của lô hàng.

Bảng 1. Số liệu cung-cầu của mỗi kho và cửa hàng

Kho	Cửa hàng		
	b_1	...	b_n
a_1	c_{11}	...	c_{1n}
\vdots		...	
a_m	c_{m1}	...	c_{mn}

Để chuyển bài toán trên về bài toán quy hoạch tuyến tính (Engr. Dr. Uzorh, 2014), ta xây dựng các biến quyết định như sau.

Một phương án vận chuyển là số đơn vị sản phẩm cần phải được vận chuyển từ mỗi kho đến từng cửa hàng. Do đó, các biến quyết định là:

$$x_{ij} = \text{số lượng đơn vị hàng cần chuyển từ kho } i \text{ đến cửa hàng } j$$

Với $i = 1, 2, \dots, m$ và $j = 1, 2, \dots, n$.

Dễ thấy, đây là một tập $m \times n$ biến.

Khi đó, bài toán vận tải sẽ được chuyển thành bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên như sau:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (3)$$

Trong đó:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}^+, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \quad (6)$$

Để thấy rằng:

- Bài toán sẽ có nghiệm nếu tổng số lượng sẵn có của kho đáp ứng toàn bộ nhu cầu:

$$\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j \quad (7)$$

- Nghiệm sẽ là không tối ưu nếu tại cửa hàng j ta chuyển đến nhiều hơn b_j đơn vị. Vì thế, có thể thay thế ràng buộc (3) bởi ràng buộc:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n} \quad (8)$$

- Ngoài ra, ta có thể thêm một cửa hàng giả $n + 1$ với chi phí vận chuyển tới đó là 0, cửa hàng giả này dùng để nhận những sản phẩm còn dư:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j \quad (9)$$

Khi đó, bài toán có thể viết lại như sau:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \quad (10)$$

Trong đó:

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}^+, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n+1} \quad (13)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng mọi bài toán vận chuyển có tổng cung bằng tổng cầu. Khi đó, ta có bài toán cân bằng cung-cầu sau:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (14)$$

Trong đó:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, 2, \dots, n \quad (16)$$

$$x_{ij} \geq 0, x_{ij} \in \mathbb{Z}^+, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \quad (17)$$

Với giả thiết:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (18)$$

2.3. Ứng dụng trong Python và ví dụ

2.3.1. Ứng dụng trong Python

Theo (Google OR-Tools, 2023), để sử dụng ngôn ngữ Python giải bài toán vận tải trên, ta cần làm theo các bước sau:

- Khai báo các giá trị cung-cầu của kho và cửa hàng;
- Khai báo giá vận chuyển một đơn vị sản phẩm từ mỗi kho đến các cửa hàng;
- Định nghĩa biến quyết định;
- Khai báo hàm mục tiêu;
- Khai báo các điều kiện ràng buộc.

Để cho đơn giản, dễ hiểu đối với những người mới tiếp xúc với Python, ta có thể sử dụng ma trận (Google OR-Tools, 2023) để khai báo các giá trị a_i, b_j, c_{ij} với: $A = (a_i)_{1 \times m}, B = (b_j)_{1 \times n}, C = (c_{ij})_{m \times n}$

Nhớ lại rằng, bài toán vận tải là bài toán nghiệm nguyên. Vì thế, ta cần định nghĩa các biến quyết định là biến nguyên như sau:

$$x[i, j] = \text{solver.IntVar}(0, \text{solver.infinity}(), "")$$

Để khai báo các điều kiện ràng buộc (10), (11) ta dùng các lệnh tương ứng sau:

```
for i in range(num_kho):
    solver.Add(solver.Sum([x[i, j] for j in range(num_ch)]) <= kho[i]) #điều kiện (10)
for j in range(num_ch):
    solver.Add(solver.Sum([x[i, j] for i in range(num_kho)]) >= ch[j]) #điều kiện (11)
```

Trong đó: *num_ch* là số cửa hàng
num_kho là số kho

Lệnh khai báo hàm mục tiêu (9) như sau:

```
objective_terms = []
for i in range(num_kho):
    for j in range(num_ch):
        objective_terms.append(costs[i][j] * x[i, j])
solver.Minimize(solver.Sum(objective_terms))
```

2.3.2. Ví dụ

Ví dụ 1: Xét bài toán vận tải ở mục 2 với số liệu cung-cầu của mỗi kho, cửa hàng và chi phí vận chuyển được cho với Bảng 2 dưới đây:

Bảng 2. Số liệu cung-cầu của các kho và cửa hàng.

Kho	Cửa hàng			
	25	38	25	30
30	15	10	9	12
50	13	21	14	8
38	10	11	16	12

Ta có code Python tương ứng như sau:

```
from ortools.linear_solver import pywraplp
def main():
    costs = [ [15, 10, 9, 12],
              [13, 21, 14, 8],
              [10, 11, 16, 12], ]
    kho = [30, 50, 38]
    ch = [25, 38, 25, 30]
    num_kho = len(kho)
    num_ch = len(ch)
    solver = pywraplp.Solver.CreateSolver('SCIP') #Giải bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên
    if not solver:
        return
    x = {}
    for i in range(num_kho):
        for j in range(num_ch):
            x[i, j] = solver.IntVar(0, solver.infinity(), "")
    for i in range(num_kho):
        solver.Add(solver.Sum([x[i, j] for j in range(num_ch)]) <= kho[i])
    for j in range(num_ch):
        solver.Add(solver.Sum([x[i, j] for i in range(num_kho)]) >= ch[j])
    objective_terms = []
    for i in range(num_kho):
        for j in range(num_ch):
            objective_terms.append(costs[i][j] * x[i, j])
    solver.Minimize(solver.Sum(objective_terms))
    status = solver.Solve()
    if status == pywraplp.Solver.OPTIMAL or status == pywraplp.Solver.FEASIBLE:
        print(f'Tổng chi phí = {solver.Objective().Value()}\n')
        for i in range(num_kho):
            for j in range(num_ch):
                if x[i, j].solution_value() > 0.5:
                    print(f'Vận chuyển từ kho {i} đến cửa hàng {j}: {x[i, j].solution_value()}')
    else:
        print('Không có phương án vận chuyển.')
if __name__ == '__main__':
```

main()

Cho chạy chương trình, ta có được phương án vận chuyển tối ưu như sau:

Tổng chi phí = 1188.0

Vận chuyển từ kho 0 đến cửa hàng 1: 5.0; đến cửa hàng 2: 25.0

Vận chuyển từ kho 1 đến cửa hàng 0: 20.0; đến cửa hàng 3: 30.0

Vận chuyển từ kho 2 đến cửa hàng 0: 5.0; đến cửa hàng 1: 33.0

Như vậy với mức chi phí là 1188 đơn vị, ta có phân phối sản phẩm từ các kho đến các cửa hàng như sau (Bảng 3):

Bảng 3. Phương án vận chuyển tối ưu từ mỗi kho đến các cửa hàng.

Kho	Cửa hàng				Tổng cung
	1	2	3	4	
1	0	5	25	0	30
2	20	0	0	30	50
3	5	33	0	0	38
Tổng cầu	25	38	25	30	

Ví dụ 2: Xét bài toán vận tải ở mục 2 với số liệu cung–cầu của mỗi kho, cửa hàng và chi phí vận chuyển được cho với Bảng 4 dưới đây:

Bảng 4. Số liệu cung–cầu của các kho và cửa hàng.

Kho	Cửa hàng			
	25	38	25	30
30	15	10	9	12
50	13	21	14	8
40	10	11	16	12

Khác với Ví dụ 1: cung=cầu, Ví dụ 2, ta xét trường hợp cung>cầu ($120 > 118$). Khi đó, vẫn với cấu trúc code trên (thay đổi số liệu ở vector $kho = [30, 50, 40]$), ta có nghiệm tối ưu của bài toán như sau:

Tổng chi phí = 1182.0

Vận chuyển từ kho 0 đến cửa hàng 1: 5.0; đến cửa hàng 2: 25.0

Vận chuyển từ kho 1 đến cửa hàng 0: 18.0; đến cửa hàng 3: 30.0

Vận chuyển từ kho 2 đến cửa hàng 0: 7.0; đến cửa hàng 1: 33.0

Tức là, ta có phương án vận chuyển tối ưu như sau (Bảng 5):

Bảng 5. Phương án vận chuyển tối ưu từ mỗi kho đến các cửa hàng

Kho	Cửa hàng				Tổng cung
	1	2	3	4	
1	0	5	25	0	30
2	18	0	0	30	48
3	7	33	0	0	40
Tổng cầu	25	38	25	30	

Như vậy, do kho thứ 3 có số lượng cung ứng lớn nên bằng cách tăng số hàng đi từ kho 3 đến cửa hàng 1 (do chi phí thấp hơn từ kho 2) ta đã giảm thiểu được chi phí vận chuyển và có được phương án tốt hơn.

Ví dụ 3: Xét bài toán vận tải ở mục 2 với số liệu cung–cầu của mỗi kho và chi phí vận chuyển được cho với bảng dưới đây (Bảng 6):

Bảng 6. Số liệu cung–cầu của các kho và cửa hàng

Kho	Cửa hàng			
	25	40	25	30
30	15	10	9	12
50	13	21	14	8
38	10	11	16	12

Nhập code như đã trình bày ở Ví dụ 1 (thay đổi số liệu ở vector $ch = [25, 40, 25, 30]$), ta có kết quả chạy chương trình như sau: Không có phương án vận chuyển tối ưu.

Dễ thấy điều này xảy ra do cung<cầu ($118 < 120$)

3. Kết quả và thảo luận

Như vậy, với các trường hợp cung=cầu, cung>cầu, cung<cầu, code Python trên đều cho ra nghiệm tối ưu của bài toán. Code Python được trình bày trong bài báo là dễ áp dụng, thích hợp cho những người mới

tiếp xúc với bài toán vận tải và Python.

Mặc dù việc khai báo dữ liệu đầu vào bằng ma trận giúp ta dễ hình dung, dễ áp dụng cho những người mới tiếp xúc với Python; nhưng chưa thích hợp với lượng dữ liệu lớn, ta có thể kết hợp thêm một số lệnh khác như `pd.read_excel`, ... Code Python này mới chỉ giải quyết được bài toán cơ bản là vận chuyển một loại hàng hóa, với trường hợp cần vận chuyển nhiều hơn một loại, phức tạp hơn, ta cần nghiên cứu thêm.

4. Kết luận

Bài toán vận tải là một phần không thể thiếu của quy hoạch tuyến tính, nó đồng hành cùng chúng ta trong các hoạt động hàng ngày trong cuộc sống và chủ yếu liên quan đến lĩnh vực hậu cần. Bài toán vận tải được chuyển thành bài toán quy hoạch tuyến tính trong trường hợp hệ ràng buộc và hàm mục tiêu đều là phương trình tuyến tính. Hơn nữa, các thuật toán quy hoạch tuyến tính được sử dụng để giải quyết các vấn đề tối ưu hóa khó khăn nhất. Trong bài toán vận chuyển, nhà máy sản xuất được xác định và cung cấp số lượng sản phẩm cần thiết cho một số điểm đến nhất định. Mục tiêu của bài toán vận tải là đáp ứng đầy đủ nhu cầu về hàng hóa đến đích trong giới hạn năng lực sản xuất với chi phí thấp nhất có thể. Bài báo đã trình bày những nghiên cứu về mô hình bài toán vận chuyển và ứng dụng code Python để cho ra nghiệm tối ưu. Code được trình bày trong bài báo là đơn giản, dễ tiếp cận với những người mới tiếp xúc với Toán ứng dụng và Python. Code Python trên đã giải quyết được cả 3 trường hợp: $\text{cung} = \text{cầu}$, $\text{cung} > \text{cầu}$, $\text{cung} < \text{cầu}$. Tuy nhiên, do code được trình bày là đơn giản nên với những dữ liệu phức tạp hơn, ta cần tiếp tục nghiên cứu để xây dựng code phù hợp trong những nghiên cứu tiếp theo.

Tài liệu tham khảo

- A. Vamsikrishna, Vigneshwar Raj, S. G. Divya Sharma, 2021. Cost Optimization for Transportation Using Linear Programming. Recent Advances in Sustainable Technologies, pp.11-20.
- Engr. Dr. Uzorh, A.C, Nnanna Innocent, 2014. Supply Chain Management Optimization Problem. The International Journal Of Engineering And Science vol3 (Issue 6), pp.01-09.
- Google OR-Tools, 2023. <https://developers.google.com/optimization/flow/mincostflow?hl=vi>, truy cập ngày 12 tháng 2 năm 2023.
- Krasimira Genova, Vassil Guliashki, 2011. Linear Integer Programming Methods and Approaches – A Survey. CYBERNETICS AND INFORMATION TECHNOLOGIES Vol 11, pp.03-05.
- Ping-Qi PAN, 2023. Linear Programming Computation. Second ed., pp.275-294.
- V. Prifti, I. Dervishi, K. Dhoska, I. Markja and A. Pramono, 2020. Minimization of transport costs in an industrial company through linear programming. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering 909, Ebook.

ABSTRACT

Transportation problems and applications in Python

Nguyen Ha Trang

University of Transport and Communications

Optimization theory is one of the important contents of Mathematics, associated with modern branches of Mathematical theory. Especially in today's society, the application trend of research problems, the optimality of solutions is being promoted, optimization theory is of great interest. One of the contents related to optimization theory is the transportation problem. The problem to be solved is to determine an optimal transportation plan between warehouses and stores, depending on the supply sources and the determined demand. This report will present the mathematical model of the transportation problem. In addition, the report presents the application and library to support the calculation of the solution of the problem on the Python programming language.

Keywords: Transportation problem; Optimization; Python; OR-Tools.

Định lý Cayley-Hamilton và ứng dụng

Dư Thị Hòa Bình*
Trường Đại học Hà Nội

TÓM TẮT

Trong bài báo này, tác giả sẽ trình bày Định lý Cayley-Hamilton và một số ứng dụng. Cụ thể, tác giả sẽ trình bày cách tính ma trận mũ, các hàm giải tích của ma trận và tìm lời giải cho hệ phương trình vi phân. Để minh họa, tác giả lựa chọn các bài toán liên quan trong các kỳ thi Olympic sinh viên Toán toàn quốc và bài toán thực tế.

Từ khóa: Định lý Cayley-Hamilton; Hàm giải tích; Hệ phương trình vi phân; Ma trận.

1. Đặt vấn đề

Cho A là một ma trận thực vuông cấp n . Đa thức đặc trưng của A được xác định:

$$P_A(\lambda) = \det|A - \lambda I|, \quad I \text{ là ma trận đơn vị.}$$

Định lý Cayley-Hamilton khẳng định rằng: Ma trận A là nghiệm của đa thức đặc trưng của nó, tức là:

$$P_A(A) = 0.$$

Đây là một kết quả quan trọng về sự thiết lập mối quan hệ giữa một ma trận và đa thức đặc trưng của nó.

Định lý Cayley-Hamilton được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực không chỉ toán học mà còn các ngành khoa học khác. Định lý đưa ra một phương pháp tìm ma trận nghịch đảo đơn giản hơn. Định lý cũng đóng một phần quan trọng trong việc giải hệ phương trình vi phân thuần nhất (Shepley L. Ross, 2004). Bên cạnh đó, Định lý Cayley-Hamilton có nhiều ứng dụng trong khoa học và kỹ thuật như hệ thống điều khiển, mạch điện, hệ thống có độ trễ, hệ thống đơn, hệ thống tuyến tính đa chiều,... (T. Kaczorek, 2005). Do đó, nghiên cứu Định lý Cayley-Hamilton là cần thiết trong chương trình học Đại học cho sinh viên các ngành khoa học và kỹ thuật.

Bài viết trình bày Định lý Cayley-Hamilton và một số ứng dụng của nó.

2. Định lý Cayley-Hamilton

Giả sử đã cho đa thức với hệ số trong trường số \mathbf{F}

$$h(X) = a_k X^k + \dots + a_1 X + a_0 \in \mathbf{F}[X].$$

Định nghĩa 1. ([2]) Ma trận vuông $A \in M(n \times n, \mathbf{F})$ được gọi là một nghiệm của $h(X)$ nếu $h(A) = 0$.

Định lý 2. (Cayley-Hamilton, [2]). *Mỗi ma trận vuông A đều là một nghiệm của đa thức đặc trưng của chính nó.*

- Nếu A là ma trận vuông cấp 2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Khi đó đa thức đặc trưng của ma trận A là

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc).$$

Suy ra, $P_A(A) = A^2 - (a + d) \cdot A + \det(A) \cdot I = 0$.

- Giả sử A là ma trận vuông cấp 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Khi đó đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix}.$$

* Tác giả liên hệ

Email: binhth@hanu.edu.vn

Do đó, $P_A(\lambda) = -[\lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + \alpha\lambda - \det(A)]$.

• Trường hợp A là ma trận vuông cấp n . Khi đó, đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ của ma trận A có thể viết dưới dạng:

$$P_A(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0].$$

Bằng quy nạp ta chỉ ra:

$$a_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}); a_0 = (-1)^n \det(A).$$

3. Một số ứng dụng của Định lý Cayley - Hamilton

Trong phần này, chúng ta sẽ xem xét ứng dụng của Định lý Cayley-Hamilton về tính ma trận nghịch đảo (nếu ma trận khả nghịch), tìm ma trận mũ, hàm của một ma trận và tìm nghiệm của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất với điều kiện ban đầu.

Cho A là một ma trận vuông cấp n với các hệ số thực (hoặc phức). Áp dụng Định lý Cayley-Hamilton ta có,

$$P_A(A) = 0 \Leftrightarrow A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \dots + a_1A + a_0I = 0. \quad (1)$$

3.1. Tính ma trận nghịch đảo

Giả sử A là một ma trận có nghịch đảo. Khi đó, ta có thể viết lại (1) như sau

$$A(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I) = (-1)a_0I. \quad (2)$$

Do $a_0 = (-1)^n \det(A)$, nên $\det(A) \neq 0$ nếu A khả nghịch. Suy ra

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\det(A)} (A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I).$$

Chúng ta xem xét bài toán dưới đây.

Bài toán 1. (N. H. V. Hung, 2019) Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Lời giải. Xét đa thức đặc trưng của ma trận A :

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 8-\lambda & 0 & -4 \\ 2 & 2 & -4-\lambda & -3 \\ 3 & 8 & -1 & -6-\lambda \end{vmatrix}.$$

Suy ra:

$$P_A(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 - 27\lambda^2 - 44\lambda + 2.$$

Áp dụng Định lý Cayley-Hamilton, ta có:

$$A^4 + A^3 - 27A^2 - 44A + 2I = 0 \quad \text{hay} \quad A(A^3 + A^2 - 27A - 44I) = -2I.$$

Ta có:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 & 5 \\ 15 & 38 & 1 & -14 \\ -9 & -12 & 17 & 18 \\ 7 & 20 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 24 & 48 & -24 & -43 \\ 89 & 224 & -5 & -101 \\ 43 & 64 & -77 & -93 \\ 84 & 196 & -36 & -121 \end{pmatrix}.$$

Như vậy ma trận khả nghịch của ma trận A là:

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} (A^3 + A^2 - 27A - 44I) = \begin{pmatrix} 24 & 3 & -4 & -8 \\ -11.5 & -1 & 2 & 3.5 \\ 10 & 1 & -2 & -3 \\ -5 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2. Luỹ thừa bậc m của một ma trận vuông

Trong phần này chúng ta có thể tính ma trận với số mũ cao. Để tính ma trận A^m với số tự nhiên m bất kỳ, trước hết thực hiện phép chia Euclide của đa thức bị chia λ^m và đa thức chia $P_A(\lambda)$. Khi đó, có duy nhất đa thức thương $Q(\lambda)$ và đa thức dư $R(\lambda)$ được xác định bởi đẳng thức

$$\lambda^m = P_A(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda),$$

Trong đó $0 \leq \deg(R) < \deg(P_A(\lambda))$. Lúc đó $A^m = R(A)$.

Để rõ hơn cách làm trên chúng ta xem xét bài toán sau.

Bài toán 2. (Olympic Toán Sinh Viên Toàn Quốc, 2011)

Cho ba dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ xác định như sau: $x_0 = y_0 = z_0$ và:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 4x_n - y_n - 5z_n \\ y_{n+1} &= 2x_n - 2z_n \\ z_{n+1} &= x_n - 2z_n. \end{cases}$$

Tính x_{2011} .

Lời giải. Đặt:

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, $X_{n+1} = AX_n$. Bằng quy nạp ta chỉ ra rằng:

$$X_n = A^n X_0, \quad n \geq 1.$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$$P_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2.$$

Suy ra,

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1 \text{ hoặc } \lambda = 2.$$

Xét đa thức $g(\lambda) = \lambda^{2011}$. Thực hiện phép chia Euclide $g(\lambda)$ cho $P_A(\lambda)$ ta có,

$$\lambda^{2011} = g(\lambda) = P_A(\lambda) \cdot q(\lambda) + a\lambda^2 + b\lambda + c. \quad (*)$$

Theo Định lý Cayley-Hamilton, ta có:

$$P_A(A) = 0 \Leftrightarrow A^3 - 2A^2 - A + 2I = 0.$$

Suy ra,

$$A^{2011} = a \cdot A^2 + b \cdot A + c \cdot I.$$

Hơn nữa, thay các giá trị ± 1 và 2 vào phương trình (*) ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1 &= a + b + c \\ -1 &= a - b + c \\ 2^{2011} &= 4a + 2b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2^{2011} - 2}{3} \\ b = 1 \\ c = \frac{2 - 2^{2011}}{3} \end{cases}.$$

Do đó,

$$A^{2011} = \left(\frac{2^{2011} - 2}{3}\right) \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} + \left(\frac{2 - 2^{2011}}{3}\right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hay:

$$\begin{bmatrix} x_{2011} \\ y_{2011} \\ z_{2011} \end{bmatrix} = A^{2011} X_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(1 - 2^{2012})x_0 \\ (2 - 2^{2011})x_0 \\ -\frac{1}{3}(1 + 2^{2011})x_0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Do vậy, } x_{2011} = \frac{2}{3}(1 - 2^{2012})x_0.$$

3.3. Tính hàm của một ma trận

Giả sử rằng một hàm vô hướng $f(s)$ là giải tích trong một miền của mặt phẳng phức. Trong miền đó $f(s)$ có thể được biểu diễn dưới dạng đa thức:

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k s^k.$$

Cho A là ma trận vuông cấp n với đa thức đặc trưng $P_A(\lambda)$ và các giá trị riêng λ_i . Khi đó $f(s)$ có thể viết

$$f(\lambda) = P_A(\lambda)Q(\lambda) + R(\lambda),$$

trong đó bậc của đa thức $R(\lambda)$ không quá $n - 1$. Cụ thể, cho $s = \lambda_i$

$$f(\lambda_i) = R(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \lambda_i^k. \quad (3)$$

Từ các giá trị riêng đã biết $\lambda_i, i = 1, \dots, n$, thế vào phương trình (3) ta có một hệ phương trình tuyến tính với các hệ số $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$. Hàm ma trận $f(A)$ được định nghĩa có cùng khai triển chuỗi của đa thức $f(s)$, tức là:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k A^k = P_A(A)Q(A) + R(A)$$

Áp dụng Định lý Cayley-Hamilton $P_A(A) = 0$ suy ra:

$$f(A) = R(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k \quad (4)$$

Trong đó các giá trị α_i được xác định từ (3).

Do vậy mọi hàm giải tích của một ma trận A , có bậc n , biểu diễn được dưới dạng đa thức bậc không quá $(n - 1)$.

Bài toán 3. (Olympic Toán Sinh Viên Toàn Quốc, 2023)

Với mỗi ma trận vuông A có phần tử là các số phức, ta định nghĩa:

$$\sin A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad e^A = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{A^n}{n!}.$$

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a. Tìm ma trận $\sin(A)$ (Bài A.4., phần a).

b. Tìm ma trận e^A (Bài B.4., phần b).

Lời giải. Đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = (1 - \lambda)(2 - \lambda).$$

Khi đó, các giá trị riêng của ma trận A là $\lambda_1 = 1$ và $\lambda_2 = 2$.

a. Thực hiện phép chia $\sin(\lambda)$ cho $P_A(\lambda)$ nhận được đa thức dư có bậc không quá 1 vì ma trận A có cấp

2. Giả sử đa thức dư là $R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$. Ta có,

$$\begin{cases} \sin(\lambda_1) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 \\ \sin(\lambda_2) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2. \end{cases}$$

Thế giá trị λ_1 và λ_2 vào hệ trên ta nhận được:

$$\begin{cases} \alpha_0 = 2\sin 1 - \sin 2 \\ \alpha_1 = \sin 2 - \sin 1. \end{cases}$$

Dựa vào (4) suy ra:

$$\sin(A) = (2\sin 1 - \sin 2)I + (\sin 2 - \sin 1)A = \begin{bmatrix} \sin 1 & \sin 1 - \sin 2 \\ 0 & \sin 2 \end{bmatrix}.$$

b. Để tìm e^A , hoàn toàn tương tự, đa thức dư của chia đa thức e^λ cho đa thức $P_A(\lambda)$ là $R(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 \lambda$.

Ta có:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1} = \beta_0 + \beta_1 \lambda_1 \\ e^{\lambda_2} = \beta_0 + \beta_1 \lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e = \beta_0 + \beta_1 \\ e^2 = \beta_0 + 2\beta_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_0 = 2e - e^2 \\ \beta_1 = e^2 - e. \end{cases}$$

Do đó,

$$e^A = (2e - e^2)I + (e^2 - e)A = \begin{bmatrix} e & e - e^2 \\ 0 & e^2 \end{bmatrix}.$$

3.4. Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

Trong phương trình vi phân chúng ta có bài toán:

$$x'(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0. \quad (5)$$

Trong đó A là ma trận với hệ số thực. Định lý dưới đây khẳng định tính duy nhất nghiệm của bài toán trên.

Định lý 3. (Shepley L. Ross, 2004) Cho A là một ma trận thực vuông cấp n và $x(0)$ là một vector. Khi đó bài toán (5) có nghiệm duy nhất $x(t) = e^{At}x(0)$ với mọi $t \in \mathbf{R}$.

Giả sử $\{v_k\}_{k=1}^n$ là các véc tơ riêng của ma trận A ứng với các giá trị riêng $\lambda_k, k = 1, \dots, n$. Tức là $Av_k = \lambda_k v_k$ với mọi $k = 1, \dots, n$. Gọi S là ma trận của các véc tơ riêng. Khi đó:

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

Chúng ta xét bài toán thực tế sau.

Bài toán 4. (<https://www.math.utah.edu/~gustafso/2250systems-de.pdf>)

Để điều trị căn bệnh rối loạn nhịp tâm thất hoặc nhịp tim không đều các nhà nghiên cứu đã điều trị lâm sàng trên một số người bằng cách sử dụng thuốc lidocain. Để có hiệu quả, thuốc phải được duy trì ở nồng độ trong máu là 1.5 miligam mỗi lít, nhưng nồng độ trên 6 miligam mỗi lít được coi là gây chết người ở một số bệnh nhân. Liều lượng thực tế phụ thuộc vào trọng lượng cơ thể. Liều tối đa dành cho người lớn đối với nhịp nhanh nhất được báo cáo là 3 mg/kg. Thuốc được cung cấp ở dạng dung dịch 0.5%, 1% và 2%, được bảo quản ở nhiệt độ phòng. Một mô hình phương trình vi phân cho động lực học của điều trị bằng thuốc sử dụng:

$$\begin{cases} x'(t) = -0.09x(t) + 0.038y(t) \\ y'(t) = 0.066x(t) - 0.038y(t) \end{cases}$$

Trong đó:

$$\begin{cases} x(t) &= \text{lượng lidocain trong máu,} \\ y(t) &= \text{lượng lidocain trong mô cơ thể.} \end{cases}$$

Giả sử dữ kiện ban đầu là trong máu không có thuốc $x(0) = 0$ và liều lượng tiêm $y(0) = y_0$. Tìm lượng lidocain trong máu và trong mô cơ thể tại thời điểm t .

Lời giải.

Xét ma trận:

$$A = \begin{bmatrix} -0.09 & 0.038 \\ 0.066 & -0.038 \end{bmatrix}.$$

Đa thức đặc trưng của ma trận A là:

$$P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -0.09 - \lambda & 0.038 \\ 0.066 & -0.038 - \lambda \end{vmatrix}.$$

Do đó,

$$P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -0.1204 \\ \lambda = -0.0076 \end{cases}$$

Do đa thức đặc trưng có bậc 2 nên ma trận e^{At} có dạng:

$$e^{At} = \alpha I + \beta A$$

Trong đó α và β được xác định bởi hệ phương trình:

$$e^{\lambda_i t} = \alpha + \beta \lambda_i, \quad i = 1, 2.$$

Thay lần lượt các giá trị riêng vào phương trình trên, ta được:

$$\begin{cases} e^{-0.1204t} = \alpha + \beta(-0.1204) \\ e^{-0.0076t} = \alpha + \beta(-0.0076) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = -0.3367y_0e^{-0.1204t} + 0.3367y_0e^{-0.0076t}, \\ y(t) = 0.2696y_0e^{-0.1204t} + 0.7304y_0e^{-0.0076t}. \end{cases}$$

Như vậy tại thời điểm t , lượng lidocain trong máu và trong mô cơ thể lần lượt là $x(t) = -0.3367y_0e^{-0.1204t} + 0.3367y_0e^{-0.0076t}$ và $y(t) = 0.2696y_0e^{-0.1204t} + 0.7304y_0e^{-0.0076t}$.

Tài liệu tham khảo

- T. Kaczorek, 2005. New extensions of the Cayley-Hamilton theorem with applications. *In: Proceeding of the 19th European Conference on Modelling and Simulation*.
 N. H. V. Hưng, 2019. *Đại số tuyến tính*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, trang 200-205.
 Shepley L. Ross, 2004. *Differential Equation*. Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., trang 264-277.
<https://www.molympiad.net/2018/02/de-thi-olympic-toan-sinh-vien-toan-quoc-2011-dai-so.html>
<https://www.vms.org.vn/post/ky-yeu-cua-ky-thi-olympic-toan-hoc-sinh-sinh-vien-2023>
<https://www.math.utah.edu/~gustafso/2250systems-de.pdf>.

ABSTRACT

Cayley – Hamilton theorem and its applications

Du ThiHaa Binh
 Hanoi University

In this paper, I present Cayley-Hamilton Theorem and some applications. Specifically, I will show how to calculate exponential matrices, determine analytic functions of matrices and find solutions to systems of differential equations. For illustration, I choose related problems in the National Math Olympiad for Students and real problems.

Keywords: Cayley-Hamilton; Analytic functions; Systems of differential equations; Matrix.

Vai trò của Hình họa - Vẽ kỹ thuật đối với các ngành kỹ thuật trong thời đại khoa học công nghệ phát triển

Lê Thị Thanh Hằng*

* Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Mục đích nghiên cứu: Đánh giá vai trò của hình họa trong việc phát triển các kỹ năng và phẩm chất cần thiết cho sinh viên ngành kỹ thuật.

Mục tiêu nghiên cứu: Xác định mức độ ảnh hưởng của hình họa đến khả năng tư duy không gian, khả năng sáng tạo và kỹ năng giải quyết vấn đề của sinh viên. Đề xuất các phương pháp giảng dạy hình họa phù hợp với đặc thù của ngành kỹ thuật.

Nội dung nghiên cứu: Tổng quan về hình họa - vẽ kỹ thuật và vai trò của nó trong đào tạo kỹ thuật. Thực trạng giảng dạy hình họa trong các trường đại học kỹ thuật. Đề xuất phương pháp giảng dạy hình họa vẽ kỹ thuật phù hợp.

Phương pháp nghiên cứu: Sử dụng kết hợp phương pháp định lượng và định tính. Phương pháp định lượng: Thu thập dữ liệu qua khảo sát, phân tích kết quả học tập sinh viên. Phương pháp định tính: Phỏng vấn giảng viên, sinh viên, quan sát lớp học, phân tích tài liệu.

Các kết quả nghiên cứu: Đánh giá vai trò của hình họa trong đào tạo kỹ sư ở Việt Nam. Xác định các yếu tố ảnh hưởng đến hiệu quả giảng dạy và học tập hình họa. Đề xuất cải tiến phương pháp giảng dạy hình họa tại các trường đại học kỹ thuật.

Từ khóa: Hình họa; vẽ kỹ thuật; hình học họa hình; đồ họa kỹ thuật.

1. Đặt vấn đề

Kỷ nguyên số mang tới bước tiến vượt bậc trong lĩnh vực công nghệ, đặc biệt là sự phát triển của các phần mềm thiết kế hỗ trợ máy tính (CAD). AutoCAD, Revit, SolidWorks,... trở thành công cụ không thể thiếu của các nhà thiết kế, giúp họ ra những bản vẽ kỹ thuật chính xác, chi tiết và nhanh chóng hơn bao giờ hết. Tuy nhiên, sự tiện lợi này cũng đặt ra câu hỏi về vai trò của hình họa vẽ kỹ thuật trong thời đại số. Liệu môn học này còn giữ được vị thế quan trọng trong đào tạo kỹ sư hay đã là một di sản lạc hậu?

Trong bối cảnh công nghệ phát triển không ngừng, đòi hỏi về chất lượng nguồn nhân lực kỹ thuật ngày càng cao. Kỹ sư không chỉ cần kiến thức chuyên môn vững vàng mà còn phải có khả năng tư duy sáng tạo, giải quyết vấn đề linh hoạt và kỹ năng giao tiếp hiệu quả (Đỗ Xuân Thảo, 2015). Hình họa, với vai trò là một công cụ hỗ trợ đắc lực trong quá trình học tập và làm việc, cần được nghiên cứu một cách bài bản để hiểu rõ hơn về tác động của nó đến quá trình đào tạo kỹ sư.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Các khái niệm Hình họa, vẽ kỹ thuật trong các ngành kỹ thuật

Hình họa: Là cơ sở lý thuyết của vẽ kỹ thuật, tập trung vào việc biểu diễn các vật thể ba chiều trên mặt phẳng hai chiều (giấy vẽ, màn hình máy tính). Mục tiêu là tạo ra hình ảnh trực quan, dễ hiểu về hình dáng, kích thước, và kết cấu của vật thể. Hình họa sử dụng các kỹ thuật như phối cảnh, bóng đổ, và đường nét để tạo ảo giác về chiều sâu và không gian ba chiều (Nguyễn Văn Hùng, 2010; Trần Hồng Hải, 2019).

Vẽ kỹ thuật: Là ngôn ngữ kỹ thuật sử dụng các quy ước, ký hiệu, tiêu chuẩn để biểu diễn chính xác các vật thể, chi tiết máy, kết cấu,... Mục tiêu là truyền đạt thông tin kỹ thuật một cách rõ ràng để phục vụ cho quá trình thiết kế, sản xuất và lắp ráp (Trần Hồng Hải, 2019). Vẽ kỹ thuật sử dụng các phép chiếu (song song, vuông góc, phối cảnh), tỉ lệ, kích thước, và các ký hiệu kỹ thuật để tạo ra các bản vẽ chi tiết, mặt cắt,... (Nguyễn Văn Hùng, 2010; Trần Hồng Hải, 2019).

2.2. Thực trạng đáng báo động

* Tác giả liên hệ

Email: lethithanhhang@humg.edu.vn

Sự xuất hiện của các phần mềm vẽ như CAD đã tạo ra làn sóng xem nhẹ hình họa trong sinh viên. Nhiều bạn tin rằng việc thành thạo các phần mềm này là đủ đáp ứng yêu cầu công việc và kỹ năng vẽ tay không còn cần thiết. Điều này dẫn đến tình trạng nhiều sinh viên kỹ thuật ra trường thiếu hụt kiến thức hình họa cơ bản, gặp khó khăn trong việc vẽ, đọc hiểu, phân tích các bản vẽ kỹ thuật (Đỗ Xuân Thảo, 2015).

Không chỉ có sinh viên, một số trường đại học và một số ngành đào tạo kỹ thuật cũng đã giảm thời lượng giảng dạy môn hình họa, thậm chí bỏ hoàn toàn môn học này khỏi chương trình đào tạo. Điều này càng làm gia tăng sự xem nhẹ của sinh viên đối với hình họa vẽ kỹ thuật và tạo ra một khoảng trống lớn trong kiến thức và kỹ năng của các kỹ sư tương lai. Các thực trạng này đến từ nguyên nhân:

(i) Sự xuất hiện của các phần mềm vẽ như CAD đã tạo ra làn sóng xem nhẹ hình họa trong sinh viên. Nhiều bạn tin rằng việc thành thạo các phần mềm này là đủ đáp ứng yêu cầu công việc và kỹ năng vẽ tay không còn cần thiết. Điều này dẫn đến tình trạng nhiều sinh viên kỹ thuật ra trường thiếu hụt kiến thức hình họa cơ bản, gặp khó khăn trong việc vẽ, đọc hiểu, phân tích các bản vẽ kỹ thuật (Đỗ Xuân Thảo, 2015).

(ii) Thay đổi trong chương trình đào tạo: Nhiều trường đại học đã cắt giảm thời lượng giảng dạy môn hình họa vẽ kỹ thuật để dành thời gian cho các môn học khác. Điều này dẫn đến việc sinh viên ra trường thiếu kỹ năng vẽ kỹ thuật cơ bản (Đỗ Xuân Thảo, 2015).

(iii) Thiếu nhận thức về tầm quan trọng: Nhiều doanh nghiệp và kỹ sư chưa nhận thức đầy đủ về tầm quan trọng của hình họa vẽ kỹ thuật trong quá trình thiết kế và sản xuất. Họ cho rằng chỉ cần sử dụng phần mềm CAD là đủ, không cần thiết phải có kỹ năng vẽ kỹ thuật tốt.

(iv) Tính chất "cổ điển" và "khó học" (Bertoline và Wiebe, 2012): Hình họa vẽ kỹ thuật thường được coi là môn học "cổ điển", "khó học". Điều này khiến nhiều sinh viên và kỹ sư trẻ không hứng thú với môn học.

Thực trạng xem nhẹ hình họa vẽ kỹ thuật đặt ra thách thức lớn cho đào tạo các ngành kỹ thuật. Tuy nhiên, đây cũng là cơ hội để chúng ta nhìn nhận lại và đổi mới phương pháp giảng dạy môn học này.

Thách thức: Sinh viên thiếu hụt kiến thức và kỹ năng vẽ tay cơ bản. Giảng viên gặp khó khăn trong truyền đạt kiến thức và kỹ năng vẽ tay cho sinh viên. Chương trình đào tạo chưa đáp ứng được nhu cầu của thị trường lao động.

Cơ hội: Tận dụng công nghệ hỗ trợ dạy, học hình họa vẽ kỹ thuật như phần mềm mô phỏng 3D, thực tế ảo,... giúp sinh viên dễ hình dung không gian và các đối tượng kỹ thuật. Phát triển phương pháp giảng dạy mới, tập trung vào thực hành và ứng dụng thực tế như các dự án thiết kế sản phẩm để sinh viên có cơ hội áp dụng kiến thức vào thực tế.

3. Kết quả nghiên cứu

3.1. Vai trò quan trọng của Hình họa, vẽ kỹ thuật đối với ngành kỹ thuật

Vai trò thứ nhất: Phát triển tư duy không gian và khả năng hình dung vật thể:

- Hiểu rõ cấu trúc và hình dáng: Hình họa – vẽ kỹ thuật giúp sinh viên nắm bắt chính xác hình dáng, tỷ lệ, cấu trúc không gian của các vật thể, từ đó hình dung rõ ràng về sản phẩm cuối cùng.

- Truyền đạt ý tưởng thiết kế: Thông qua các bản vẽ hình họa - vẽ kỹ thuật, sinh viên có thể diễn đạt ý tưởng của mình một cách trực quan, dễ hiểu.

- Phân tích và giải quyết vấn đề: Hình họa hỗ trợ quá trình phân tích, tìm ra các vấn đề tiềm ẩn trong thiết kế và đề xuất giải pháp khắc phục (Earle, 2016).

Vai trò thứ hai: Nâng cao kỹ năng thiết kế và sáng tạo:

- Rèn luyện khả năng quan sát và diễn đạt: Hình họa yêu cầu sự tỉ mỉ, chính xác trong việc quan sát và tái hiện lại các chi tiết, từ đó nâng cao khả năng diễn đạt bằng hình ảnh.

- Phát triển tư duy thẩm mỹ: Việc làm quen với các nguyên tắc bố cục, màu sắc, ánh sáng trong hình họa giúp sinh viên có cái nhìn thẩm mỹ tốt hơn, áp dụng vào thiết kế sản phẩm.

- Khơi nguồn cảm hứng sáng tạo: Hình họa là một cách để thể hiện sự sáng tạo, thử nghiệm các ý tưởng mới và tìm ra những giải pháp thiết kế độc đáo.

Vai trò thứ ba: Hỗ trợ các môn học kỹ thuật khác:

- Mô hình hóa 3D: Kỹ năng hình họa là nền tảng để sinh viên có thể xây dựng các mô hình 3D trên máy tính, giúp hình dung sản phẩm một cách toàn diện hơn.

- Bản vẽ kỹ thuật: Hình họa giúp sinh viên đọc hiểu và vẽ các bản vẽ kỹ thuật một cách chính xác, đảm bảo tính khả thi của thiết kế.

- Thuyết trình và báo cáo: Các bản vẽ hình họa là công cụ hỗ trợ đắc lực trong việc thuyết trình, báo cáo về dự án, giúp người nghe dễ dàng nắm bắt thông tin.

Vai trò thứ tư: Hình họa vẽ kỹ thuật : Rèn luyện khả năng tư duy và nhận thức không gian

Mặc dù công nghệ CAD và các phần mềm vẽ khác mang lại nhiều lợi ích, hình họa - vẽ kỹ thuật vẫn giữ vai trò quan trọng không thể thay thế trong ngành kỹ thuật. Nó không chỉ đơn thuần là kỹ năng vẽ mà còn là một quá trình rèn luyện tư duy không gian, khả năng quan sát, phân tích và sáng tạo (Bertoline, G. R., &

Wiebe, E. N., 2012).

- Tư duy không gian: Hình họa vẽ kỹ thuật giúp sinh viên hình dung và tái tạo các vật thể trong không gian ba chiều. Đây là kỹ năng quan trọng để đọc hiểu bản vẽ, hình dung hình dạng và cấu trúc của các đối tượng, từ đó đưa ra các quyết định thiết kế chính xác và hiệu quả.

- Khả năng quan sát và phân tích: Vẽ tay đòi hỏi sự tập trung cao độ và khả năng quan sát tỉ mỉ các chi tiết của vật thể. Quá trình này giúp sinh viên rèn luyện khả năng phân tích và đánh giá, từ đó đưa ra những giải pháp tối ưu cho các vấn đề kỹ thuật.

- Sáng tạo và linh hoạt: Hình họa vẽ kỹ thuật khuyến khích sinh viên tư duy sáng tạo và tìm tòi các giải pháp mới (Ching, F. D. K., 2015). Việc phác thảo ý tưởng bằng tay giúp sinh viên nhanh chóng thể hiện và thử nghiệm các ý tưởng khác nhau, từ đó tìm ra giải pháp tối ưu nhất.

- Khả năng giao tiếp: Bản vẽ kỹ thuật là ngôn ngữ chung của các kỹ sư. Việc nắm vững hình họa vẽ kỹ thuật giúp sinh viên giao tiếp hiệu quả với đồng nghiệp, khách hàng,... thông qua các bản vẽ kỹ thuật rõ ràng, dễ hiểu (Ching, 2015).

3.2. Các giải pháp khắc phục

3.2.1. Cải cách giáo dục

Tăng cường thời lượng giảng dạy hình họa vẽ kỹ thuật trong chương trình đào tạo ở bậc đại học. Điều này bao gồm việc bổ sung các tiết học lý thuyết và thực hành, giúp sinh viên nắm vững các nguyên tắc, quy tắc và kỹ thuật vẽ kỹ thuật cơ bản.

Cải tiến phương pháp giảng dạy: Để môn hình họa vẽ kỹ thuật không còn là nỗi ám ảnh của sinh viên, cần sự chuyển đổi mạnh mẽ phương pháp giảng dạy, tập trung vào các yếu tố như tích hợp phương pháp giảng dạy truyền thống với các công cụ và phần mềm hiện đại như CAD, giúp sinh viên làm quen với cả hai phương pháp và tận dụng ưu điểm của từng phương pháp. Áp dụng các phương pháp học tập tích cực như học tập dựa trên các đồ án, video hướng dẫn, bài giảng tương tác,... tạo môi trường học tập cởi mở và khuyến khích sự tương tác giữa giảng viên và sinh viên.

Đổi mới phương pháp giảng dạy theo hướng tăng cường tính thực tiễn, ứng dụng công nghệ, tích cực chú trọng phát triển kỹ năng mềm, giúp sinh viên yêu thích môn học và phát triển các kỹ năng cần thiết. Thoải mái đặt câu hỏi, bày tỏ ý kiến giúp họ nắm được kiến thức, khuyến khích sự sáng tạo và tư duy phản biện. Thay vì tập trung vào lý thuyết, hãy giao các đồ án vẽ kỹ thuật, các sản phẩm, công trình thực tế, sinh viên sẽ hiểu rõ hơn ứng dụng của môn học, thêm động lực học tập.

Ứng dụng công nghệ thực tế ảo (VR) và thực tế tăng cường (AR) để tạo ra các môi trường học tập tương tác, cho phép người học trải nghiệm các bản vẽ kỹ thuật một cách chân thực nhất (Earle, 2016).

3.2.2. Khuyến khích tính chủ động học tập và rèn luyện của sinh viên

Để sinh viên không còn xem nhẹ hình họa vẽ kỹ thuật, cần khuyến khích họ thay đổi cách tiếp cận môn học này, từ bị động sang chủ động, từ lý thuyết sang thực hành:

Tự học và khám phá:

Tìm hiểu ứng dụng thực tế: Thay vì học theo giáo trình, khuyến khích sinh viên chủ động tìm hiểu ứng dụng của môn học trong các lĩnh vực khác (kiến trúc, cơ khí, thiết kế,...) để thấy sự liên quan của môn học với thực tế và thêm động lực học tập.

Sử dụng đa dạng nguồn tài liệu: Ngoài sách chính, hướng dẫn sinh viên tìm kiếm tài liệu tham khảo trên mạng, các video hướng dẫn, các khóa học trực tuyến để mở rộng kiến thức, kỹ năng.

Thực hành thường xuyên: Khuyến khích sinh viên luyện tập mỗi ngày, bắt đầu từ bài tập cơ bản rồi nâng dần độ khó để sinh viên nắm vững kiến thức và phát triển kỹ năng một cách tự nhiên.

Học tập cộng tác:

Thành lập nhóm học tập: Cùng nhau học tập, trao đổi ý kiến, giải đáp thắc mắc và thực hiện các dự án vẽ kỹ thuật sẽ giúp sinh viên học hỏi lẫn nhau, tăng cường động lực, đạt hiệu quả cao hơn.

Tham gia các diễn đàn, cộng đồng trực tuyến: Chia sẻ kinh nghiệm, học hỏi từ những người có cùng đam mê, nhận được sự hỗ trợ và góp ý từ các chuyên gia, giảng viên.

Tận dụng công nghệ:

Sử dụng các ứng dụng học tập: Các ứng dụng SketchAR, Concepts, Morpholio Trace,... cung cấp các công cụ vẽ kỹ thuật, bài tập thực hành, hướng dẫn chi tiết để học tập mọi lúc mọi nơi.

Tham gia khóa học trực tuyến: Các nền tảng học trực tuyến Coursera, Udemy, Skillshare,... cung cấp khóa học với các bài giảng chất lượng, giúp sinh viên tiếp cận kiến thức một cách linh hoạt.

Sử dụng công cụ hỗ trợ: Các phần mềm AutoCAD, SolidWorks, Revit,... là công cụ vẽ kỹ thuật mà và nguồn tài liệu tham khảo quý, giúp sinh viên tìm hiểu các tiêu chuẩn, quy tắc vẽ kỹ thuật.

Phát triển tư duy sáng tạo:

Vẽ tự do: Tăng cường vẽ tự do để sinh viên phát triển khả năng quan sát, tưởng tượng, sáng tạo.

Tham gia các cuộc thi: Đây là cơ hội để sinh viên thể hiện tài năng, học hỏi kinh nghiệm và nhận được sự công nhận từ cộng đồng.

Áp dụng hình họa vẽ kỹ thuật vào các lĩnh vực khác: Sử dụng kỹ năng vẽ kỹ thuật để thiết kế sản phẩm, sáng tạo nghệ thuật, làm video,...

Bằng cách thay đổi phương pháp học tập truyền thống, sinh viên có thể biến môn hình họa vẽ kỹ thuật khô khan thành công cụ hữu ích, giúp phát triển tư duy sáng tạo mở ra cơ hội nghề nghiệp trong tương lai.

4. Kết luận

Trong bối cảnh công nghệ số phát triển mạnh mẽ, hình họa vẽ kỹ thuật vẫn giữ một vai trò không thể thay thế trong đào tạo kỹ sư. Mặc dù các phần mềm CAD mang lại nhiều tiện ích và hiệu quả, chúng không thể thay thế hoàn toàn những giá trị mà hình họa vẽ kỹ thuật truyền thống mang lại.

Hình họa vẽ kỹ thuật không đơn thuần là kỹ năng vẽ mà còn là một quá trình rèn luyện tư duy không gian, khả năng quan sát, phân tích và sáng tạo. Nó giúp phát triển khả năng hình dung, tưởng tượng và tái tạo các vật thể trong không gian ba chiều - kỹ năng không thể thiếu trong quá trình thiết kế, chế tạo. Đồng thời, môn học còn giúp kỹ sư rèn luyện khả năng đọc hiểu, phân tích bản vẽ - ngôn ngữ của kỹ thuật.

Việc xem nhẹ hình họa vẽ kỹ thuật trong đào tạo kỹ sư là một xu hướng đáng báo động. Nó không chỉ ảnh hưởng đến chất lượng đào tạo mà còn cản trở sự phát triển của ngành kỹ thuật. Để khắc phục tình trạng này, cần có sự chung tay của cả nhà trường, giảng viên, sinh viên.

Cần đảm bảo thời lượng giảng dạy hình họa vẽ kỹ thuật, đổi mới phương pháp giảng dạy theo hướng tích hợp công nghệ và thực tiễn. Giảng viên cần nâng cao trình độ chuyên môn, cập nhật kiến thức và phương pháp giảng dạy mới, đồng thời tạo hứng thú và động lực học tập cho sinh viên. Sinh viên cần nhận thức rõ tầm quan trọng của hình họa vẽ kỹ thuật và tích cực học tập, rèn luyện kỹ năng.

Phải xây dựng một nền tảng vững chắc cho sự phát triển bền vững của ngành kỹ thuật trong tương lai, nơi hình họa vẽ kỹ thuật, công nghệ số cùng tồn tại bổ trợ nhau. Hình họa vẽ kỹ thuật sẽ tiếp tục là công cụ quan trọng để thể hiện ý tưởng, giao tiếp, cộng tác hiệu quả, trong khi công nghệ số sẽ là đòn bẩy giúp hiện thực hóa những ý tưởng đó nhanh chóng chính xác. Sự kết hợp hài hòa giữa truyền thống và hiện đại sẽ tạo ra những kỹ sư tài năng, sáng tạo, có khả năng thích ứng với sự tiến bộ của công nghệ.

Tài liệu tham khảo

Bertoline, G. R., & Wiebe, E. N., 2012. *Fundamentals of graphics communication*. McGraw-Hill Higher Education.

Ching, F. D. K., 2015. *Design drawing*. John Wiley & Sons.

Đỗ Xuân Thảo, 2015. *Phương pháp dạy và học hình họa*. Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.

Earle, J. H., 2016. *Engineering design graphics*. Pearson Education.

Nguyễn Văn Hùng, 2010. *Hình họa và vẽ kỹ thuật*, Nhà xuất bản Đại học Xây dựng.

Trần Hồng Hải, 2019. *Hình họa và vẽ kỹ thuật*. Nhà xuất bản Xây dựng.

ABSTRACT

The role of Drawing - Technical Drawing with engineering majors when science and technology develop

Le Thi Thanh Hang

Hanoi University of Mining and Geology

This study aims to explore and elucidate the indispensable role of drawing, particularly technical drawing, in the comprehensive development of essential skills for engineering students. We are interested in delving deeper into the impact of drawing on spatial reasoning, creativity, and problem-solving abilities among students. Consequently, this research will propose effective teaching methods for drawing that align with the specific characteristics of each engineering discipline. The study content includes examining the role of drawing in engineering education, the current state of teaching practices, and suggesting innovative teaching methods. To achieve this goal, we will employ both quantitative and qualitative research methods. Ultimately, this study aspires to contribute to enhancing the quality of engineering education in Vietnam by evaluating the role of drawing, identifying factors affecting teaching effectiveness, and proposing improvement solutions.

Keywords: Descriptive geometry; Technical drawing; Technical graphics.

A remark on robustness of exponential dichotomy

Bui Xuan Quang*

Faculty of Fundamental Sciences, PHENIKAA University, Hanoi 12116, Vietnam

ABSTRACT

In this note, we introduce a new concept of Yosida distance between two linear operators in a Banach space and then study the robustness of exponential dichotomy of evolution equations. An application to exponential dichotomy of linear partial functional differential equations is also discussed. Finally, we will present a generation theorem for the perturbation of strongly continuous semigroups by unbounded operators and establish a relationship with robustness of an exponential dichotomy. Our main methods are based on semigroup theory combining with the techniques in ordinary differential equations.

Keywords: Yosida distance; exponential dichotomy; robustness; generation theorem; partial functional differential equation.

1. Introduction

Consider the evolution equation:

$$u'(t) = Au(t), \quad u \in \mathbb{X} \quad (1.1)$$

Where \mathbb{X} is a Banach space. In the case of $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ and $\mathbb{X} = \mathbb{R}^{n \times n}$, it is well known that for linear system (1.1) under “small perturbation” some asymptotic behavior like exponential dichotomy persists (Coppel 1978; Engel and Nagel, 2000), that is, the perturbed evolution equation:

$$u'(t) = (A + B)u(t) \quad (1.2)$$

Also has an exponential dichotomy if B is small. In this case the small perturbation’s size can be determined by the norm of $\|B\|$. Many results from the dynamical systems in the finite-dimensional case could be extended to the infinite-dimensional case.

In this note, assuming that the evolution equation (1.1) where \mathbb{X} is a Banach space, generates a C_0 -semigroup in \mathbb{X} that has an exponential dichotomy, we consider the perturbed evolution equation (1.2) where B is (generally unbounded) linear operator in \mathbb{X} . One of the most complicated steps in studying this equation is related to understanding how to measure the size of the perturbation B . It is naturally easy to extend the persistence of exponential dichotomy under small perturbation B in the sense of its norm, that is, $\|B\|$ is sufficiently small. Certain specific classes of unbounded perturbation B are also studied (Chow and Leiva, 1996; Engel and Nagel, 2000).

As for partial functional differential equation:

$$u'(t) = Au(t) + Bu_t, \quad t \geq 0 \quad (1.3)$$

Under reasonable conditions on A and B , it generates a C_0 -semigroup (called solution semigroup) in the phase space \mathcal{C} , so its asymptotic behavior is studied via this semigroup. It is expected that many results of the non-delayed equation (1.1) could be easily extended to the delayed equations (1.3). That means, if the unperturbed equation (1.3) has an exponential dichotomy, then under “small perturbation” A_1 and B_1 , the perturbed equation:

$$u'(t) = (A + A_1)u(t) + (B + B_1)u_t \quad (1.4)$$

Also has an exponential dichotomy. Even when $A_1 = 0$ and B_1 is bounded and $\|B_1\|$ is small, the study of the persistence of exponential dichotomy, to the best of our knowledge, has yet to be complete. In fact, the problem is that the Variation-of-Constants Formula in the phase space \mathcal{C} is not available for the solution semigroups by (1.3) and (1.4).

To our knowledge, the persistence of exponential dichotomy of Eq. (1.4) under unbounded perturbations A_1 and B_1 is not been studied yet. The idea of applying the method by (Chow and Leiva, 1996) or Dunford and Schwartz, 1988) to study the persistence of exponential dichotomy of the solution semigroup generated by Eq. (1.3) in the phase space \mathcal{C} is impossible. In fact, the very first condition on

*Tác giả liên hệ

Email: quang.buixuan@phenikaa-uni.edu.vn

the domain for the generator of solution semigroups is not satisfied for delayed equations as shown in (Bui and Minh, 2024a, Corollary 4.2 and Example 4.3).

In this note, we will study the persistence of exponential dichotomy of evolution equations via the concept of Yosida distance (Bui and Minh, 2024a, 2024b). Using general results, we give an effort into studying the exponential dichotomy of the solution semigroup generated by Eq. (1.3) where both A and/or B are perturbed by unbounded operators A_1 and B_1 from some classes. The first results on the Yosida distance (Bui and Minh, 2024a, 2024b) lead to a question about the generation of perturbed semigroups. We will discuss a result about the generation in Theorem 4.1 and its relation to exponential dichotomy. These results, on the one hand, give us a criterion for robustness of an exponential dichotomy, and on the other hand, establish a relationship with known classical results (Chow and Leiva, 1996; Dunford and Schwartz, 1988).

2. Preliminaries

2.1. Notations

In this note, we will denote by \mathbb{X} and \mathbb{Y} Banach spaces with corresponding norms. The symbols \mathbb{R} and \mathbb{C} stand for the fields of real and complex numbers, respectively. Denote by $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ the Banach space of all bounded linear operators from a Banach space \mathbb{X} to a Banach space \mathbb{Y} . We will denote the domain of an operator T by $D(T)$ and its range by $R(T)$. The resolvent set of a linear operator T in a Banach space will be denoted by $\rho(T)$ while its spectrum is denoted by $\sigma(T)$. For $\lambda \in \rho(T)$, we denote the inverse $(\lambda I - T)^{-1}$ by $R(\lambda, T)$ and call it the resolvent (at λ) of linear operator T . Let P be a linear operator in a Banach space \mathbb{X} , $\ker(P)$ and $\text{Im}(P)$ are the notations of kernel and image of P .

2.2. Exponential Dichotomy

Definition 2.1 (Exponential dichotomy) A linear semigroup $(T(t))_{t \geq 0}$ in a Banach space \mathbb{X} is said to have an *exponential dichotomy* or to be *hyperbolic* if there exist a bounded projection P on \mathbb{X} and positive constants N and α satisfying:

1. $T(t)P = PT(t)$, for $t \geq 0$;
2. $T(t)|_{\ker(P)}$ is an isomorphism from $\ker(P)$ onto $\ker(P)$, for all $t \geq 0$, and its inverse on $\ker(P)$ is defined by $T(-t) := (T(t)|_{\ker(P)})^{-1}$;
3. The following estimates hold:

$$\|T(t)x\| \leq Ne^{-\alpha t}\|x\|, \quad \text{for all } t \geq 0, x \in \text{Im}(P), \quad (2.1)$$

$$\|T(-t)x\| \leq Ne^{-\alpha t}\|x\|, \quad \text{for all } t \geq 0, x \in \ker(P). \quad (2.2)$$

3. Yosida Distance and Robustness of Exponential Dichotomy of Evolution Equations

3.1. The Concept of Yosida Distance and Robustness of Exponential Dichotomy

Given operator A in a Banach space \mathbb{X} with $\rho(A) \supset [\omega, \infty)$, where ω is a given number, the *Yosida approximation* A_λ is defined as $A_\lambda := \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$ for sufficiently large λ (Pazy, 1983; Yosida, 1995)

Definition 3.1 (Yosida distance (Bui and Minh, 2024a, 2024b)) The *Yosida distance* between two linear operators A and B satisfying $\rho(A) \supset [\omega, \infty)$ and $\rho(B) \supset [\omega, \infty)$, where ω is a given number, is defined to be

$$d_Y(A, B) := \limsup_{\mu \rightarrow \infty} \|A_\mu - B_\mu\|. \quad (3.1)$$

The following theorem is the main result of this section on the robustness of exponential dichotomy under Yosida perturbation.

Theorem 3.2 (Bui and Minh, 2024a, 2024b)) *Let A be the generator of a C_0 -semigroup that has an exponential dichotomy. Then, the C_0 -semigroup generated by an operator B also has an exponential dichotomy, provided that $d_Y(A, B)$ is sufficiently small.*

The following lemma will show that the concept of Yosida distance allows us to recover important cases of perturbation under this persistent domain condition. A detailed proof of this result can be found in (Bui and Minh, 2024a, 2024b) and (Bui et al., 2024).

Lemma 3.3 *The following assertions are valid:*

1. *Let A, B be the generators of contraction semigroups. Assume further that $D(A) = D(B)$. Then, $A = B$, provided that $d_Y(A, B) = 0$.*
2. *Let $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$. Then*

$$d_Y(A, B) = \|A - B\|. \quad (3.2)$$

3. If A is the generator of a C_0 -semigroup $(T(t))_{t \geq 0}$ such that $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, and C is a bounded operator, then $d_Y(A, A + C)$ is finite. Moreover,

$$d_Y(A, A + C) \leq M^2 \|C\| \quad (3.3)$$

4. Let A be the generator of an analytic semigroup $(T(t))_{t \geq 0}$ such that $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, and C be an operator in the class $\mathcal{P}(A)$, that is, C satisfies the following conditions (Dunford and Schwartz, 1988, Definition 18)

(a) $D(C) \supset D(A)$;

(b) For each $t > 0$, there exists a constant $K_t < \infty$ such that

$$\|CT(t)\| \leq K_t \|x\|, \quad \text{for each } x \in D(A);$$

(c) The constant K_t in (3.3) may be chosen so that $K := \int_0^1 K_t dt$ exists and finite.

Then,

$$d_Y(A, A + C) \leq K. \quad (3.4)$$

According to Lemma 3.3, the Yosida distance can measure the perturbation of a closed operator A by an linear operator C such that the domain of $A + C$ contains that of A . In the next subsection, we will study a situation where the concept of Yosida distance is applicable when the inclusion conditions of the domain $D(A) \subset D(A + C)$ are removed.

3.2. Robustness of Exponential Dichotomy of Linear Partial Functional Differential Equations

In this subsection, we consider the linear partial functional differential equation:

$$u'(t) = A_i u(t) + B_i u_t, \quad (3.5)$$

Where A_i generates a C_0 -semigroup $(T_i(t))_{t \geq 0}$ in \mathcal{X} , and B_i is a bounded operator from $\mathcal{C} := C([-1, 0], \mathbb{X})$ to \mathbb{X} and $i = 0, 1$ and $u_t(\theta) := u(t + \theta)$, $\theta \in [-1, 0]$. This partial functional differential equation generates a solution semigroup $(\mathcal{G}_i(t))_{t \geq 0}$ that is strongly continuous in the phase space \mathcal{C} with the generator \mathcal{G}_i defined as (Travis and Webb, 1974)

$$\mathcal{G}_i \phi = \phi',$$

$$D(\mathcal{G}_i) = \{\phi \in \mathcal{C} : \phi(0) \in D(A_i), \phi'^-(0) = A_i \phi(0) + B_i \phi\}.$$

Corollary 3.4 (Bui and Minh, 2024b) Assume that $A_0 = A_1 = A$, and $B_i D(A) \subset D(A)$, for $i = 0, 1$. Then, $D(\mathcal{G}_0) \subset D(\mathcal{G}_1)$ if and only if $B_1 = B_0$.

Below we will demonstrate the usefulness of the concept of Yosida distance as it still works in this case when the persistent domain condition is not satisfied to apply the previously known perturbation theory. In fact we study the Yosida distance between the generators of the solution semigroups of partial functional differential equations of the form Eq. (3.5).

Consider partial functional differential equation (3.5) where A is the generator of a C_0 -semigroup $(T_i(t))_{t \geq 0}$ satisfying $\|T_i(t)\| \leq e^{\omega t}$ and $B_i \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ for a certain (fixed) positive constant ω . For simplicity we will drop the index “ i ” in the following paragraph. A detailed calculation in (Bui and Minh, 2024b, Lemma 4.1) gives an explicit formula for the resolvent of generator \mathcal{G} , and we obtain the following result.

Lemma 3.5 (Bui and Minh, 2024b) Let \mathcal{G}_i be the generators of the solution semigroups generated by Eq. (3.5) in the phase space $\mathcal{C} := C([-1, 0], \mathbb{X})$. Assume further that

$$d_Y(A_0, A_1) < \infty, \quad \|B_i\| < \infty, \quad i = 0, 1. \quad (3.6)$$

Then,

$$d_Y(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1) \leq 2d_Y(B_0, B_1) + d_Y(A_0, A_1). \quad (3.7)$$

As an immediate consequence of Lemma 3.5 we have the following:

Theorem 3.6 (Bui and Minh, 2024b) Let A_i generate a C_0 -semigroup $(T_i(t))_{t \geq 0}$, $i = 0, 1$, in a Banach space \mathbb{X} that satisfies $\|T_i(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$, and $B_0, B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{C}, \mathbb{X})$. Assume that the partial functional differential equation

$$u'(t) = A_0 u(t) + B_0 u_t, \quad t \geq 0, \quad (3.8)$$

Has an exponential dichotomy. Then, the partial functional differential equation

$$u'(t) = A_1 u(t) + B_1 u_t, \quad t \geq 0, \quad (3.9)$$

Also has an exponential dichotomy if the Yosida distances $d_Y(A_0, A_1)$ and $d_Y(B_0, B_1)$ are sufficiently small.

Remark 3.7 In the case of equation (1.1) under nonlinear perturbations, the existence of invariant (stable and unstable) manifolds has been proven in (Bui and Minh, 2024a).

4. A Generation Theorem and its Relation to the Exponential Dichotomy

Theorem 4.1 (Bui et al., 2024) Let A be the generator of a C_0 -semigroup $(T_A(t))_{t \geq 0}$ in \mathbb{X} such that

For all $t \geq 0$

$$\|T_A(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad t \geq 0,$$

Where ω is a given real number. Assume further that C is a linear operator in \mathbb{X} such that:

1. $D(A) \subset D(C)$;

2. There exist a constant $K > 0$ such that if $\mu > \omega$, then

$$\|CR(\mu, A)\| \leq \frac{K}{\mu - \omega}. \quad (4.1)$$

Then, $A + C$ generates a C_0 -semigroup, denoted by $(T_{A+C}(t))_{t \geq 0}$ that satisfies:

$$\|T_{A+C}(t)\| \leq Me^{(\omega + MK)t}, \quad t \geq 0. \quad (4.2)$$

Theorem 4.1 leads to the quantity:

$$\|C\|_A := \frac{1}{M} \sup_{\mu > \omega} \|(\mu - \omega)CR(\mu, A)\| \quad (4.3)$$

Being used to measure the size of the perturbation C to the generator of a C_0 -semigroup $(T_A(t))_{t \geq 0}$ with $\|T_A(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $t \geq 0$. We will define the set of all linear operator C in \mathbb{X} with $D(C) = D(A)$ and $\|C\|_A < \infty$ by $\mathcal{GL}_A(\mathbb{X})$. By (Bui et al., 2024, Lemma 3.1), $(\mathcal{GL}_A(\mathbb{X}), \|\cdot\|_A)$ is a normed space.

Proposition 4.2 (Bui et al., 2024) *Let A be the generator of a C_0 -semigroup. Then, $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{GL}_A(\mathbb{X})$, and:*

$$d_Y(A + C_1, A + C_2) \leq \|C_1 - C_2\|_A \leq \frac{1+M}{M} d_A(C_1, C_2), \quad (4.4)$$

Where:

$$d_A(C_1, C_2) := \int_0^1 \|(C_1 - C_2)T(t)\| dt$$

For $C_1, C_2 \in \mathcal{P}(A)$, see (Chow and Leiva, 1996; Dunford and Schwartz, 1988, Definition 18)).

Corollary 4.3 (Bui et al., 2024) *Let A be the generator of a C_0 -semigroup $(T_A(t))_{t \geq 0}$ in \mathbb{X} satisfying $\|T_A(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Assume further that for a given $C_1 \in \mathcal{GL}_A(\mathbb{X})$, the semigroup $(T_{A+C_1}(t))_{t \geq 0}$ generated by $A + C_1$ has an exponential dichotomy. Then, for any $C_2 \in \mathcal{GL}_A(\mathbb{X})$, the semigroup $(T_{A+C_2}(t))_{t \geq 0}$ generated by $A + C_2$ has also an exponential dichotomy provided that either $\|C_1 - C_2\|_A$, or $d_A(C_1, C_2)$ is sufficiently small.*

Acknowledgements

The author would like to thank Professor Nguyen Van Minh (University of Arkansas at Little Rock, USA) for his suggestion and stimulating discussion on the subject of the paper. This work is supported by the PHENIKAA University.

References

- Bui, X.-Q. and Minh, N.V., 2024. Yosida distance and existence of invariant manifolds in the infinite-dimensional dynamical systems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 152: 4285-4300 (arXiv preprint, 2023: <https://arxiv.org/abs/2301.12080>).
- Bui, X.-Q. and Minh, N.V., 2024. Unbounded perturbation of linear partial functional differential equations via Yosida distance. Submitted. arXiv preprint, <https://arxiv.org/pdf/2310.04873>.
- Bui X.-Q., Huy, N.D., Luong, V.T., and Minh, N.V., 2024. A generation theorem for the perturbation of strongly continuous semigroups by unbounded operators. Submitted. arXiv preprint <https://arxiv.org/abs/2405.06812>.
- Chow, S.-N. and Leiva, H., 1996. Unbounded perturbation of the exponential dichotomy for evolution equations. *Journal of Differential Equations*, 129: 509-531.
- Coppel, W.A., 1978. *Dichotomies in Stability Theory*. Lecture Notes in Mathematics, 629, Springer-Verlag, Berlin-New York.
- Dunford, N. and Schwartz, J.T., 1988. *Linear Operators General Theory, Part I*. Wiley, New York.
- Engel, K.J. and Nagel, R., 2000. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*. Graduate Texts in Mathematics, 194, Springer.
- Pazy, A., 1983. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, 44, Springer-Verlag, New York.
- Travis, C.C. and Webb, G.F., 1974. Existence and stability for partial functional differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 200: 394-418.
- Yosida, K., 1995. *Functional Analysis*. Springer-Verlag, Berlin.

TÓM TẮT

Một nhận xét về tính bền vững của nhị phân mũ

Bùi Xuân Quang

Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học PHENIKAA

Trong báo cáo này, chúng tôi giới thiệu một khái niệm mới là khoảng cách Yosida giữa hai toán tử tuyến tính trong một không gian Banach và sau đó nghiên cứu tính bền vững của nhị phân mũ của phương trình tiến hoá. Một ứng dụng vào nhị phân mũ của phương trình vi phân hàm riêng tuyến tính cũng sẽ được thảo luận. Cuối cùng, chúng tôi trình bày một định lý toán tử sinh đối với nửa nhóm liên tục mạnh chịu nhiễu không bị chặn và khảo sát một mối quan hệ với tính bền vững của nhị phân mũ. Các phương pháp chính của chúng tôi là dựa vào lý thuyết nửa nhóm kết hợp với các kỹ thuật của phương trình vi phân thường.

Từ khoá: khoảng cách Yosida; nhị phân mũ; tính bền vững; định lý toán tử sinh; phương trình vi phân hàm riêng

Massera-typed theorem for a class of delayed differential equations

Nguyen Thi Loan*

Faculty of Fundamental Sciences, PHENIKAA University, Hanoi 12116, Vietnam,

ABSTRACT

In this article, by using Massera-typed theorem, we establish a result of existence and uniqueness of periodic solutions for the class of delayed differential equations of the form:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(t)u(t) = F(u)(t) + G(t)(u_t), & t \in \mathbb{R}_+; \\ u(0) = \phi \in X; \end{cases} \quad (1)$$

Where the mapping $t \rightarrow A(t)$ is α -periodic and is a possibly unbounded operator on a Banach space X such that the family $(A(t))_{t \geq 0}$ generates an evolution family $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$; the operator $F: BC(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow BC(\mathbb{R}_+, X)$ is locally Lipschitz and map α -periodic functions to α -periodic functions; $G(t) \in L(P, X)$ and is α -periodic; u_t is the history function defined by $u_t(s) = u(t + s)$ for $s \in [-r, 0]$. The obtained results by combining the Massera method with the use of assessments in Banach spaces and the fixed-point argument.

Keywords: Massera theorem; periodic solution; delayed differential equations.

1. Introduction

The partial differential equations are an important area of the mathematics. There are many patterns in nature as well as in engineering described by their equations, such as:

- Propagation of waves along a string equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), u = u(x, t), (x, t) \in [0, L] \times (0, +\infty);$$

- Heat transfers a long bar equation:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), u = u(x, t), (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty).$$

Finding conditions for the existence and uniqueness of a periodic solution to these equations is one of the key research directions related to the asymptotic behavior of the solution.

Generally, for functional differential equations, there are several methods used to find conditions for the existence, uniqueness of a periodic solution. Such as Massera's principle (Massera, 1950), special fixed-point methods (Hale, 1966; Benkhalti, 2001,...) The most popular approaches used in this direction are the ultimate boundedness of solution and the compactness of Poincaré' map realized through some compact embeddings. However, if unbounded domains or equations that have unbounded solutions, such compact embeddings do not hold, and the choice of appropriate initial vectors is not easy.

One may invoke to the so-called Massera-type theorem to overcome such difficulties. That theorem roughly saying that if a differential equation has a bounded solution, then it has a periodic one. Actually, in (Huy, 2016a) this methodology has been invoked in combination with use the Cesa'ro limit to prove the existence and uniqueness of a periodic solution whose sup-norm can be controlled by the norm of the input function Nemytskii in a bounded function space, or the input function in a admissibility function space (Huy, 2016b). Furthermore, a Massera-type theorem has proposed for the case of partial neutral functional differential equation (i.e., the case $u(t)$ is replaced by Fu_t), has also been invoked to prove the existence and uniqueness of a periodic solution to delay equations (Ha, 2021).

This methodology has been used in conjunction with the admissibility of function spaces to demonstrate the existence and uniqueness of periodic solutions to linear equations and the fixed-point argument is then used to show these findings for the semi-linear delay equation in the current study.

* Tác giả liên hệ

Email: loan.nguyenthi2@phenikaa-uni.edu.vn

2. Theoretical basic

Before going into the main results section, we will now provide the essential information required for this study

For Banach space X with a norm $\|\cdot\|$, we denote by $K := C([-r, 0], X)$ the Banach space all continuous functions ϕ from $[-r, 0]$ in to X , with the norm:

$$\|\phi\|_K := \sup_{s \in [-r, 0]} \|\phi(s)\| \text{ for } \phi \in K.$$

For a continuous function $v: [-r, \infty) \rightarrow X$, the history function $v_t \in K$ is defined by $v_t(s) := v(t+s)$ for $s \in [-r, 0]$. Now, some preliminaries are recalled for late uses. First, the spaces of bounded continuous functions with values in the Banach space X is defined as:

$$BC(\mathbb{R}_+, X) := \{v: \mathbb{R}_+ \rightarrow X \mid v \text{ is continuous and } \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|v(t)\| < \infty,$$

Endowed with the norm $\|v\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)} := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \|v(t)\|$. The Banach space $BC([-r, \infty); X)$ is defined similarly. Furthermore, in this study we also use space the Banach function space (Massera, 1966).

$$H = H(\mathbb{R}_+) := \{h \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+) : \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_t^{t+1} |h(\tau)| d\tau < \infty\},$$

Endowed with the norm $\|h\|_H := \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_t^{t+1} |h(\tau)| d\tau$ is recalled. Moreover, the space denotes by:

$$\mathfrak{H} := \{h: \mathbb{R}_+ \rightarrow X \mid \|h(\cdot)\| \in H\},$$

Endowed with the norm $\|k\|_{\mathfrak{H}} := \|\|k(\cdot)\|\|_H$. Clearly, \mathfrak{H} is a Banach space.

Next, a notion of evolution families is explained in the following definition.

Definition 2.1. A family of bounded linear operator $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ on a Banach space X is a (strongly continuous, exponentially bounded) evolution family if:

- i) The map $(t, s) \mapsto U(t, s)x$ is continuous for every $x \in X$, where $(t, s) \in \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : t \geq s \geq 0\}$;
- ii) $U(t, t) = Id$, $U(t, w)U(w, s) = U(t, s)$ for all $t \geq w \geq s \geq 0$;
- iii) exists $M, \lambda \geq 0$ such that $\|U(t, r)x\| \leq Me^{\lambda(t-r)} \|x\|$, $\forall t \geq r \geq 0, x \in X$.

The notion of an evolution family arises naturally from the theory of well-posed, non-autonomous evolution equations. Namely, if the abstract Cauchy problem:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - A(t)u(t) = 0, t \geq s \geq 0; \\ u(s) = u_s \in X; \end{cases} \quad (2)$$

Is well-posed, there exist an evolution family $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ such that the solution of the Cauchy problem (2) is given by $u(t) = U(t, s)u(s)$. For more details on the notion of evolution family's condition for the existence of such families and application to partial differential equations we refer the readers to Pazy (Pazy, 1983).

Assumption 2.1. Suppose that $A(t)$ is α -periodic, i.e., $A(t + \alpha) = A(t)$ for a fixed constant $\alpha > 0$ and all $t \in \mathbb{R}_+$. Then $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ become α -periodic in the sense that $U(t + \alpha, s + \alpha) = U(t, s)$, for all $t \geq s \geq 0$.

Assumption 2.2. With γ is a non-negative constant, the map $F: BC(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow BC(\mathbb{R}_+, X)$ satisfies:

- i) $\|F(0)\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)} \leq \gamma$ and $F(v)(t)$ is α -periodic for each α -periodic function $v \in BC(\mathbb{R}_+, X)$;
- ii) For all $v_1, v_2 \in BC(\mathbb{R}_+, X)$, $\|v_1\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)} \leq b$, $\|v_2\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)} \leq b$ there exist positive constants b, N such that $\|F(v_1) - F(v_2)\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)} \leq N \|v_1 - v_2\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)}$.

Assumption 2.3. The map $G: \mathbb{R}_+ \rightarrow L(P, X)$ satisfies $\|G(t)\|$ belong to H and $G(t)(v_t)$ is α -periodic for each α -periodic function $v \in BC([-r; \infty]; X)$.

3. Results

For a Banach space X , possesses a separable predual Y , (i.e., $X = Y'$), where Y is a separable Banach space, consider for the class of delayed differential equations (DDE):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(t)u(t) = F(u)(t) + G(t)(u_t), t \in \mathbb{R}_+; \\ u(0) = \phi \in X; \end{cases} \quad (3)$$

Here $A(t)$ is a (possible unbounded) linear operator on a Banach space X for every fixed $t \geq 0$ and satisfy the Assumption 2.1, the term F and G satisfies Assumption 2.2 and Assumption 2.3, sequence.

To prove the existence and uniqueness of the periodic solutions instead of equation (3), we consider the following integral equation:

$$u(t) = U(t, 0)u(0) + \int_0^t U(t, \tau)[F(u)(\tau) + G(\tau)(u_\tau)]d\tau, \text{ for all } t \geq 0. \quad (4)$$

Note that, if the evolution family $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ arises from the well-posed Cauchy problem (2), then the

function $u: [-r, \infty) \rightarrow X$, which satisfies (4) is called a mild solution of semilinear problem (3). More detailed treatment on the relations between classical and mild solutions of DDE are referred the reader to Pazy (Pazy, 1983). Corresponding to equation (4), the linear DDE:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(t)u(t) = f(t), \text{ for all } t \geq 0; \\ u(0) = \phi \in X; \end{cases} \quad (5)$$

Is consider. Where, the function f belongs to Banach space \mathfrak{R} . By the mild solution to (5), a function u satisfying the following integral equation

$$u(t) = U(t, 0)u(0) + \int_0^t U(t, \tau)f(\tau)d\tau, \text{ for all } t \geq 0; \quad (6)$$

Is called mild solution to (5).

Theorem 2.1. For the Banach space X , possesses a separable predual Y . Assume that the space Y considered as a subspace of Y'' (through the canonical embedding) is invariant under the operator $U'(w, 0)$ which is the dual of $U(w, 0)$. The evolution family $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$ satisfy the Assumption 2.1 and for $x \in X$ such that $U(t, 0)x$ is bounded in \mathbb{R}_+ then $\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t, 0)x\| = 0$. If f is α -periodic and belong to \mathfrak{R} then there exists $u_0 \in X$ such that the mild solution u to equation (5) satisfy $\|u\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)} \leq R \|f\|_{\mathfrak{R}}$ then exists $v_0 \in X$ such that the equation (5) has a unique α -periodic mild solution $v(t)$ satisfying:

$$\|v(t)\| \leq M(R + \alpha)e^{\lambda\alpha} \|f\|_{\mathfrak{R}}. \quad (7)$$

Proof. The proof is similar to that of (Huy, 2016, Theorem 2.3).

Theorem 2.2. For the Banach space X and assumptions such as Theorem 2.1. Suppose that F satisfies Assumption 2.2, G satisfies Assumption 2.3. Put $\beta = \|G\|_{\mathfrak{R}}$, then if N, γ, β are small enough, the equation (3) has a unique α -periodic mild solution u^* in a small ball of radius a of $BC([-r, \infty], X)$ satisfying:

$$\|u^*\|_{BC([-r, \infty], X)} \leq M(R + \alpha)[(N + \beta)b + \gamma]e^{\lambda\alpha}. \quad (8)$$

Proof. Let closed set $B_b^\alpha \subset BC([-r, \infty], X)$ is defined by:

$$B_b^\alpha := \{x \in BC([-r, \infty], X) : x \text{ is } \alpha\text{-periodic}, \|x\|_{BC([-r, \infty], X)} \leq b\}, \quad (9)$$

Here $\|x\|_{BC([-r, \infty], X)} := \sup_{t \in [-r, \infty]} \|x(t)\|$, for all $x \in BC([-r, \infty], X)$. For given v belong to $BC([-r, \infty], X)$, the equation:

$$u(t) = U(t, 0)u(0) + \int_0^t U(t, \tau)[F(v)(\tau) + G(\tau)(v_\tau)]d\tau, \forall t \geq 0; \quad (10)$$

Is consider. A operator $F: BC([-r, \infty], X) \rightarrow BC([-r, \infty], X)$ is defined by:

$$F(v)(t) := \begin{cases} u(t) & \text{for } t \geq 0; \\ \hat{u}(t) & \text{for } -r \leq t < 0; \end{cases}$$

Where $v \in B_b^\alpha, u \in BC(\mathbb{R}_+, X)$ is the unique α -periodic solution to (10), and $\hat{u}(t), t \in [-r, 0)$ is the α -periodic extension of u on the interval $[-r, 0)$. Fixing any $v \in B_b^\alpha$, since F and G satisfy Assumption 2.2. and Assumption 2.3, we have:

$$\begin{aligned} \|F(v)\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)} &\leq \|F(v) - F(0)\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)} + \|F(0)\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)} \\ &\leq N \|v\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)} + \gamma = Nb + \gamma; \end{aligned}$$

And:

$$\begin{aligned} \|G(\cdot)(v)\|_{\mathfrak{R}} &= \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_t^{t+1} \|G(\tau)(v_\tau)\| d\tau \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_t^{t+1} \|G(\tau)\| \|v_\tau\|_K d\tau \\ &\leq b \|G\|_K = b\beta. \end{aligned}$$

By Theorem 2.1 for the right-hand side $F(v)(t) + G(t)(v_t)$ instead of $f(t)$ in formula of the mild solution, implies for $v \in B_b^\alpha$ there exists a unique α -periodic solution u to (9) satisfying:

$$\|f(v)\|_{BC([-r, \infty], X)} = \|u\|_{BC(\mathbb{R}_+, X)} \leq M(R + \alpha)[(N + \beta)b + \gamma]e^{\lambda\alpha}, \forall t \geq 0. \quad (11)$$

And for $-r \leq t < 0, \hat{u}(t)$ is the α -periodic extension of u to the interval $[-r, 0)$, then the above formulas hold true. Therefore, if N, γ and β are small enough such that:

$$M_1 = M(R + \alpha)[(N + \beta)b + \gamma]e^{\lambda\alpha} \leq b; \quad (12)$$

Then the transformation Φ acts from B_b^α into itself. Hence, the operator Φ is obtained that the following representation:

$$\Phi(v)(t) = \begin{cases} u(t) = U(t, 0)u(0) + \int_0^t U(t, \tau)[F(v)(\tau) + G(\tau)(v_\tau)]d\tau & \text{for } t \geq 0; \\ \hat{u}(t) & \text{for } -r \leq t < 0; \end{cases} \quad (13)$$

Here $\hat{u}(t)$ is the α -periodic extension to interval $[-r, 0)$ of $u(t)$.

Next, for condition (12) the map Φ is a contraction will prove. Indeed, for v, w belong to B_b^α and $u_1 = \Phi(v), u_2 = \Phi(w)$ by the representation (13), then $u = u_1 - u_2 = \Phi(v) - \Phi(w)$ is the unique α -periodic

mild solution to the equation:

$$\begin{cases} u(t) = U(t, 0)u(0) + \int_0^t U(t, \tau)[F(v)(\tau) + G(\tau)(v_\tau) - F(w)(\tau) - G(\tau)(w_\tau)]d\tau & \text{for } t \geq 0; \\ u(t) = \hat{u}(t) = \hat{u}_1(t) - \hat{u}_2(t) & \text{for } -r \leq t < 0; \end{cases}$$

Where $\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t)$ are the α -periodic extension to interval $[-r, 0)$ of $u_1(t), u_2(t)$.

Since, $u(t), (t \geq 0)$ is α -periodic and for $-r \leq t < 0$, the function $\hat{u}(t)$ is a α -periodic extension of u to interval $[-r, 0)$, then:

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{BC([-r, \infty], X)} = \sup_{t \in [-r, \infty)} \|u(t)\| = \sup_{t \in [0, \infty)} \|u(t)\|.$$

Therefore, applying Theorem 2.1 and from Assumption 2.2, Assumption 2.3, we have:

$$\begin{aligned} \|F(v) - F(w)\|_{BC([-r, \infty], X)} &\leq N \|v - w\|_{BC([-r, \infty], X)}; \\ \|G(\cdot)(v) - G(\cdot)(w)\|_K &= \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_t^{t+1} \|G(\tau)(v_\tau) - G(\tau)(w_\tau)\| d\tau \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \int_t^{t+1} \|G(\tau)\| \|v_\tau - w_\tau\|_K d\tau \\ &\leq \|G\|_K \|v - w\|_{BC([-r, \infty], X)} \\ &= \beta \|v - w\|_{BC([-r, \infty], X)}. \end{aligned}$$

Hence,

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{BC([-r, \infty], X)} \leq M(R + \alpha)(N + \beta)e^{\lambda\alpha} \|v - w\|_{BC([-r, \infty], X)}.$$

Put $M_2 = M(R + \alpha)(N + \beta)e^{\lambda\alpha}$, we have if $M_1 \leq b$ then $M_2 < 1$. Thus, if N and γ, β are small enough such that $M_1 \leq b$ then $\Phi: B_b^\alpha \rightarrow B_b^\alpha$ is a contraction. Therefore, according to the contraction mapping principles there exists a unique fixed point u^* in B_b^α of Φ . By definition of Φ , this function u^* is the unique α -periodic mild solution to equation (3) and satisfy (8).

4. Conclusion

Massera's method, roughly says that if a differential equation has a bounded solution, then it has a periodic one. Our study established necessary conditions for the class of delayed functional differential equation (3) to have α -periodic mild solution, bounded and unique by combining the Massera method with the fixed-point argument in Banach spaces. However, the stability and existence of manifolds around such a periodic solution have yet to be established. This is one of the areas where more research could be conducted. These issues, on the other hand, can be expanded to semi-linear equations with infinite delay.

References

- R. Benkhalti, H. Bouzahir, K. Ezzinbi, 2001. Existence of a periodic solution for some partial functional differential equations with infinite delay. *J. Math. Anal. Appl.* 256, 257-280.
- V.T.N. Ha, N.T. Huy, N.T. Loan, 2021. Periodic Solutions to Partial Neutral Functional Differential Equations in Admissible Spaces on a Half-Line. *Vietnam J. Math.* 49, 1043-1064.
- J.K. Hale, O. Lopes, 1966. Fixed point theorems and dissipative processes, *J. Diff. Equ.* 13, 391-402.
- N.T. Huy, N.Q. Dang, 2016. Existence, uniqueness and conditional stability of periodic solutions to evolution equations. *J. Math. Anal. Appl.* 433, 1190-1203.
- N.T. Huy, N.Q. Dang, 2016. Periodic solutions to evolution equations: existence, conditional stability and admissibility of function spaces. *Ann. Pol. Math.* 116, 173-195.
- J.L. Massera, 1950. The existence of periodic solutions of systems of differential equations. *Duke Math. J.* 17, 457- 475.
- J.L. Massera, Schaffer J.J., 1966. *Linear Differential Equations and Function Spaces*, Academic Press, New York.
- A. Pazy, 1983. *Semigroup of Linear Operators and Application to Partial Differential Equations*. Springer, Berlin.

TÓM TẮT

Định lý dạng Massera cho một lớp phương trình vi phân có trễ

Nguyễn Thị Loan

Khoa Khoa học cơ bản, Đại học PHENIKAA, Hà Nội 12116, Việt Nam,

Trong nghiên cứu này, bằng việc sử dụng định lý dạng Massera, chúng tôi đã chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm tuần hoàn cho một lớp phương trình vi phân có trễ có dạng:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - A(t)u(t) = F(u)(t) + G(t)(u_t), & t \in \mathbb{R}_+ \\ u(0) = \phi \in X, \end{cases} \quad (1)$$

Ở đây, ánh xạ $t \rightarrow A(t)$ có thể không bị chặn trên không gian Banach X và tuần hoàn chu kỳ α , với họ toán tử $(A(t))_{t \geq 0}$ sinh ra họ tiến hóa $(U(t, s))_{t \geq s \geq 0}$; toán tử $F: BC(\mathbb{R}_+, X) \rightarrow BC(\mathbb{R}_+, X)$ liên tục Lipschitz và là ánh xạ biến hàm tuần hoàn chu kỳ α thành hàm tuần hoàn chu kỳ α ; $G(t) \in L(P, X)$ và tuần hoàn chu kỳ α ; u_t là hàm lịch sử được định nghĩa bởi $u_t(s) := u(t + s)$ với $s \in [-r, 0]$. Kết quả nghiên cứu có được nhờ sử dụng kết hợp phương pháp Massera và các đánh giá trong không gian Banach, cùng nguyên lý điểm bất động.

Từ khóa: Định lý dạng Massera; nghiệm tuần hoàn; phương trình vi phân có trễ.

Hàm sinh mô-men: Một công cụ đặc lực trong phân tích xác suất và thống kê

Lê Bích Phượng*, Hà Hữu Cao Trình
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu một công cụ hữu ích để chứng minh các định lý liên quan đến biến ngẫu nhiên, gọi là hàm sinh mô-men. Công cụ này giúp chuyển các bài toán về xác suất và kỳ vọng thành các bài toán giải tích liên quan đến giá trị và đạo hàm của hàm số. Chúng tôi sẽ giải thích cách hàm sinh mô-men xác định các mô-men và cách sử dụng các mô-men để tái lập hàm sinh mô-men.

Từ khóa: hàm mô-men sinh; xác suất thống kê; mô men; phân phối xác suất.

1. Đặt vấn đề

Hàm sinh của biến ngẫu nhiên là một công cụ toán học được sử dụng để mô tả và phân tích các tính chất của phân phối xác suất của biến đó. Nói một cách đơn giản, hàm sinh là giá trị kỳ vọng của một phép biến đổi cụ thể áp dụng lên biến ngẫu nhiên. Có nhiều loại hàm sinh khác nhau, như hàm sinh mô-men (Moment Generating Function - MGF), hàm sinh xác suất (Probability Generating Function - PGF), và hàm sinh đặc trưng (Characteristic Function), hàm sinh tích lũy (Cumulant Generating Function). Mỗi loại hàm sinh có một công thức cụ thể và được sử dụng cho các mục đích khác nhau trong lý thuyết xác suất và thống kê (Ross, 2012; Feller, 1971).

Hàm sinh mô-men của một biến ngẫu nhiên X được định nghĩa là: $M_X(t) = E(e^{tX})$.

Trong đó, $E(e^{tX})$ là giá trị kỳ vọng của e^{tX} . Hàm này có thể được sử dụng để tìm các mô-men (như trung bình và phương sai) của biến ngẫu nhiên, và cũng có thể giúp xác định phân phối xác suất của biến đó trong những điều kiện nhất định. Thường thì một biến ngẫu nhiên được chứng minh là có một phân phối nhất định bằng cách chỉ ra rằng hàm sinh của nó có một dạng cụ thể đã biết. Có một quá trình khôi phục phân phối từ một hàm sinh, và quá trình này được gọi là phép đảo ngược. Tính chất quan trọng là các mô-men của biến ngẫu nhiên có thể được xác định từ các đạo hàm của hàm sinh. Tính chất này vô cùng hữu ích vì việc thu được các mô-men từ hàm sinh thường dễ dàng hơn so với việc tính trực tiếp các mô-men từ định nghĩa của chúng.

Một thuộc tính quan trọng khác là hàm sinh của tổng các biến ngẫu nhiên độc lập là tích của các hàm sinh tương ứng. Thuộc tính này rất hữu ích vì hàm mật độ xác suất của tổng các biến độc lập là tích chập của các hàm mật độ riêng lẻ, và phép toán này phức tạp hơn nhiều. Thuộc tính quan trọng cuối cùng được gọi là định lý liên tục, khẳng định rằng sự hội tụ của dãy các hàm sinh tương ứng với sự hội tụ của các phân phối tương ứng. Thường thì việc chứng minh sự hội tụ của các hàm sinh dễ dàng hơn so với chứng minh sự hội tụ của các phân phối trực tiếp.

Tại sao cần phải nghiên cứu phân phối xác suất? Các quan sát mẫu thường được biểu diễn dưới dạng các sự kiện số học tương ứng với các giá trị của các biến ngẫu nhiên. Một số loại biến ngẫu nhiên thường xuất hiện trong thực tế, do đó việc biết xác suất cho mỗi giá trị của một biến ngẫu nhiên là rất hữu ích. Biết xác suất của một mẫu quan sát được là rất cần thiết để đưa ra các suy luận về một tổng thể.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

2.1. Phân phối rời rạc và liên tục

Một biến ngẫu nhiên là một hàm số X có thể nhận giá trị một cách ngẫu nhiên và phụ thuộc vào một sự kiện ngẫu nhiên nào đó. Không gian hoặc miền giá trị của X là tập hợp S các giá trị có thể có của X . Một biến ngẫu nhiên X được gọi là rời rạc nếu tập hợp này có một số lượng hữu hạn hoặc vô hạn đếm được các giá trị khác biệt (tức là có thể liệt kê thành một dãy). Biến ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối liên tục nếu nó có thể nhận bất kỳ mọi giá trị trong một khoảng thực nào đó.

Thông thường thì có các hàm số gán xác suất cho tất cả các sự kiện trong một không gian mẫu. Những

* Tác giả liên hệ

Email: lebichphuong@humg.edu.vn

hàm số này được gọi là hàm khối xác suất (*probability mass functions*) nếu biến ngẫu nhiên có phân phối rời rạc, hoặc hàm mật độ xác suất (*probability density functions*) nếu biến ngẫu nhiên có phân phối liên tục. Tất cả các giá trị có thể có của một biến ngẫu nhiên và các giá trị xác suất tương ứng của chúng tạo thành phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên đó (Feller, 1971; Gupta và Kumar, 2023).

Phân phối của một biến ngẫu nhiên X có thể được mô tả bằng hàm phân phối tích lũy: $F_X(x) = P(X \leq x)$. Cũng có những cách khác để đặc trưng hóa các phân phối xác suất. Do đó, các phân phối xác suất cũng có thể được xác định bằng nhiều phép biến đổi khác nhau, tức là bằng các hàm số nào đó mà mã hóa các thuộc tính của phân phối thành một dạng thuận tiện hơn cho các loại tính toán xác suất nhất định. Đối với một biến ngẫu nhiên rời rạc X , với hàm khối xác suất $p(x) = P(X = x)$, ta có $0 \leq p(x) \leq 1 \forall x$ và $\sum_x p(x) = 1$. Hàm khối xác suất hoặc hàm mật độ xác suất của một biến ngẫu nhiên X chứa tất cả thông tin mà ta cần về biến này.

2.2. Dãy các mô-men của một biến ngẫu nhiên

Ta biết rằng trung bình $\mu = EX$ và phương sai $\sigma^2 = E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2$ của một biến ngẫu nhiên đóng vai trò quan trọng trong các định lý cơ bản của xác suất, cũng như trong nhiều loại tính toán thực tế khác nhau. Những thuộc tính quan trọng này của một biến ngẫu nhiên chứa đựng những thông tin về hàm phân phối của biến đó. Tuy nhiên, trung bình và phương sai không chứa đựng tất cả thông tin có sẵn về hàm mật độ của một biến ngẫu nhiên (Chen và Zhang, 2024).

Ngoài hai đại lượng μ và σ , định vị trung tâm và mô tả độ phân tán của các giá trị của một biến ngẫu nhiên, chúng ta còn định nghĩa một tập hợp các đại lượng khác, gọi là các mô-men, những đại lượng này xác định duy nhất phân phối xác suất của một biến ngẫu nhiên.

Đối với một biến ngẫu nhiên rời rạc hoặc liên tục X , mô-men bậc k của X là một số được định nghĩa là $\mu_k = E(X^k)$ với $k=1, 2, 3, \dots$ với điều kiện các giá trị là tính được.

Ta có một dãy các mô-men gắn liền với một biến ngẫu nhiên X . Trong nhiều trường hợp, dãy này xác định phân phối xác suất của X . Tuy nhiên, các mô-men của X có thể không tồn tại. Dựa trên các mô-men này, trung bình và phương sai của X được tính đơn giản bằng $\mu_1 = EX$ và $\sigma^2 = E((X - EX)^2) = E(X^2) - (EX)^2 = \mu_2 - (\mu_1)^2$. Khi bậc k tăng lên, thì các mô-men bậc cao hơn có ý nghĩa và trở nên phức tạp hơn Gupta và Kumar, 2023).

Các mô-men cung cấp nhiều thông tin hữu ích về phân phối của X . Kiến thức về hai mô-men đầu tiên của X cho chúng ta biết trung bình và phương sai của nó, nhưng kiến thức về tất cả các mô-men của X xác định hoàn toàn hàm xác suất của nó. Các phân phối khác nhau không thể có các mô-men giống hệt nhau. Đây chính là điểm then chốt, là lý do tại sao các mô-men lại quan trọng.

2.3. Hàm sinh

Nói một cách đơn giản, hàm sinh chuyển đổi các bài toán về chuỗi số thành các bài toán về hàm số. Bằng cách này, chúng ta có thể sử dụng hàm sinh để giải quyết các bài toán đếm số lượng khác nhau.

Giả sử rằng a_0, a_1, a_2, \dots là một dãy số thực hữu hạn hoặc vô hạn. Hàm sinh thông thường của dãy này là chuỗi lũy thừa:

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k. \quad (1)$$

Để khôi phục lại dãy ban đầu từ một hàm sinh thông thường đã cho, công thức sau được sử dụng:

$$a_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k G(z)}{dz^k} \right]_{z=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Giả sử rằng a_0, a_1, a_2, \dots là một dãy số thực hữu hạn hoặc vô hạn. Hàm sinh lũy thừa của dãy này là chuỗi lũy thừa:

$$G(z) = a_0 + \frac{a_1 z}{1!} + \frac{a_2 z^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k z^k}{k!}. \quad (3)$$

Để khôi phục lại chuỗi số thực ban đầu từ hàm sinh lũy thừa đã cho, công thức sau được sử dụng:

$$a_k = \frac{d^k G(z)}{dz^k} \bigg|_{z=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Đối với một biến ngẫu nhiên X chỉ nhận các giá trị nguyên không âm k , với xác suất $p_k = P(X = k)$,

hàm sinh xác suất được định nghĩa là:

$$G(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, 0 \leq z \leq 1. \quad (5)$$

Bởi công thức:

$$E(X^k) = \left[\frac{d^k G(z)}{dz^k} \right]_{z=1}, k = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Ta khôi phục các mô-men của X . Một hàm sinh xác suất chính xác sẽ xác định duy nhất một phân phối, và một hàm sinh xác suất xấp xỉ sẽ xác định xấp xỉ một phân phối xác suất.

2.4. Hàm sinh mô-men

Về đẹp của các hàm sinh mô-men là chúng mang lại nhiều kết quả một cách dễ dàng. Các chứng minh sử dụng hàm sinh mô-men thường dễ dàng hơn nhiều so với việc chứng minh cùng một kết quả bằng cách sử dụng các hàm mật độ xác suất (hoặc các phương pháp khác).

Hàm sinh mô-men (MGF) được định nghĩa bởi công thức sau:

$$M_X(t) = E(e^{tX}), \quad (7)$$

Trong đó kì vọng này tồn tại với t thuộc lân cận của 0.

Trong trường hợp X là biến rời rạc thì: $M_X(t) = \sum e^{tx} p(x)$.

Trong trường hợp X là biến liên tục thì: $M_X(t) = \int e^{tx} f(x) dx$.

Ở đây, điều quan trọng là kì vọng phải hữu hạn đối với tất cả các giá trị t trong một khoảng nào đó của t_0 (với $t_0 > 0$ nào đó). Nếu kỳ vọng không tồn tại trong một lân cận của 0, ta nói rằng hàm sinh mô-men không tồn tại. Vì hàm mũ luôn dương, $E(e^{tX})$ luôn tồn tại, hoặc là một số thực hoặc là dương vô cùng.

Các hàm sinh mô-men có thể không được xác định đối với tất cả các giá trị của t , và một số phân phối nổi tiếng không có hàm sinh mô-men (ví dụ như phân phối Cauchy).

Hàm sinh mô-men là một hàm của t , không phải của X . Hàm sinh mô-men của một biến ngẫu nhiên gộp tất cả các mô-men của biến ngẫu nhiên đó vào một biểu thức đơn giản. Về mặt hình thức, hàm sinh mô-men được tạo ra bằng cách thay e^t vào hàm sinh xác suất.

Có thể thay thế hàm sinh mô-men để định nghĩa cho mọi phân phối, đó là phiên bản số phức của hàm sinh mô-men, gọi là hàm đặc trưng.

3. Kết quả và thảo luận

Giả sử rằng hàm sinh mô-men tồn tại trong một lân cận của gốc tọa độ. Ta có một số kết quả sau:

a. Nếu $g_X(t)$ là hàm sinh mô-men của một biến ngẫu nhiên X , thì: $g_X(0) = 1$.

Thật vậy ta có, $g_X(0) = 1 = E(e^{0 \cdot X}) = E(1) = 1$.

b. Các mô-men của biến ngẫu nhiên X có thể được tìm bằng cách khai triển chuỗi lũy thừa. Hàm sinh mô-men của một biến ngẫu nhiên X là hàm sinh lũy thừa của chuỗi mô-men của nó:

$$g_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k t^k}{k!}. \quad (8)$$

Hàm mũ có khai triển lũy thừa: $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$, nên nên bằng cách khai triển chuỗi của hàm e^{tX} , ta có:

$$e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}. \quad (9)$$

Lấy kì vọng hai vế ta có:

$$E(e^{tX}) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} E\left(\frac{X^k t^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k). \quad (10)$$

c. Tính toán các mô-men

Ta gọi hàm $g_X(t)$ là hàm sinh mô-men của biến ngẫu nhiên X do tất cả các mô-men của X có thể thu được bằng cách lấy đạo hàm rồi thay $t=0$.

Đạo hàm bậc k của $g_X(t)$ tại điểm $t=0$ là mô-men bậc k (μ_k) của X , cụ thể là:

$$\mu_k = g^{(k)}(0) \quad (11)$$

Trong đó:

$$g^{(k)}(t) = \left. \frac{d^k g(t)}{dt^k} \right|_{t=0}. \quad (12)$$

Bằng cách này, các mô-men của X cũng có thể được tìm thấy thông qua việc lấy đạo hàm.

$$\frac{d^k}{dt^k} g_X(t) = \frac{d^k}{dt^k} E(e^{tX}) = E\left(\frac{d^k}{dt^k} e^{tX}\right) = E(X^k e^{tX}) \quad (13)$$

Do vậy ta có:

$$\left. \frac{d^k}{dt^k} g_X(t) \right|_{t=0} = \mu_k. \quad (14)$$

Nói cách khác, hàm sinh mô-men sinh ra tất cả các mô-men của X thông qua việc lấy đạo hàm. Ta có thể tìm các mô-men của X bằng cách tính hàm sinh mô-men và sau đó lấy đạo hàm. Đôi khi, việc lấy các mô-men theo cách này dễ dàng hơn so với cách tính trực tiếp. Tất cả các mô-men của một phân phối hữu hạn như xác định phân phối đó. Ngoài việc tạo ra các mô-men của X , hàm sinh mô-men còn hữu ích trong việc xác định phân phối của X .

d. Nếu $g_X(t)$ tồn tại trong một lân cận của $t=0$, thì việc biết hàm sinh mô-men của một biến ngẫu nhiên tương đương với việc biết hàm mật độ xác suất của nó. Điều này có nghĩa là **hàm sinh mô-men xác định duy nhất hàm mật độ xác suất**. Trong trường hợp tổng quát, chuỗi $g_X(t)$ sẽ không hội tụ với mọi t . Nhưng trong trường hợp đặc biệt quan trọng khi X bị chặn (tức là khi miền giá trị của X nằm trong một khoảng hữu hạn), ta có thể chứng minh rằng chuỗi này hội tụ với mọi giá trị của t . Hàm phân phối được xác định hoàn toàn bởi các mô-men của nó.

Định lý 1: Giả sử X là một biến ngẫu nhiên liên tục với phạm vi nằm trong khoảng thực $[-M, M]$. Khi

đó, chuỗi mô-men $g_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu_k t^k}{k!}$ hội tụ với mọi giá trị của t thành một hàm khả vi vô hạn $g_X(t)$ và $g_X^{(k)}(0) = \mu_k$.

Chứng minh. Ta biết rằng $\mu_k = \int_{-M}^M x^k f_X(x) dx$. Do vậy, với mọi n ta có $\sum_{k=0}^n \left| \frac{\mu_k t^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{(M|t|)^k}{k!} \leq e^{M|t|}$.

Bất đẳng thức này cho thấy chuỗi mô-men hội tụ với mọi giá trị của t và tổng của nó là một hàm khả vi vô hạn, vì nó là một chuỗi lũy thừa. Bằng cách này, chúng ta đã chứng minh rằng chuỗi mô-men μ_k xác định hàm $g_X(t)$. Ngược lại, $\mu_k = g_X^{(k)}(0)$, ta thấy rằng $g_X(t)$ xác định các mô-men μ_k .

Nếu X là một biến ngẫu nhiên bị chặn, thì chúng ta có thể chứng minh rằng hàm sinh mô-men $g_X(t)$ của X xác định duy nhất hàm mật độ xác suất $f_X(t)$ của X . Điều này quan trọng vì đôi khi việc thao tác với các hàm sinh mô-men dễ dàng hơn so với việc thao tác với các hàm mật độ xác suất.

e. Tính duy nhất: Hai biến ngẫu nhiên có cùng hàm sinh mô-men thì sẽ có cùng phân phối.

Định lý 2: Giả sử X và Y là hai biến ngẫu nhiên với các hàm sinh mô-men tương ứng là $g_X(t)$ và $g_Y(t)$ và các hàm phân phối xác suất lần lượt là $F_X(x)$ và $F_Y(y)$. Nếu $g_X(t) = g_Y(t)$, thì

Điều này đảm bảo rằng phân phối của một biến ngẫu nhiên có thể được xác định bởi hàm sinh mô-men của nó. Hệ quả của định lý trên là nếu tất cả các mô-men của một biến ngẫu nhiên X tồn tại, chúng sẽ hoàn toàn xác định hàm sinh mô-men (vì các mô-men là các đạo hàm của hàm sinh mô-men trong khai triển Taylor của nó) và các mô-men này cũng hoàn toàn xác định phân phối, cũng như hàm phân phối tích lũy, hàm mật độ xác suất và hàm khối xác suất.

Khi hàm sinh mô-men tồn tại, sẽ có một phân phối duy nhất tương ứng với hàm sinh mô-men đó. Do đó, có một đơn ánh giữa các hàm sinh mô-men và các phân phối xác suất. Điều này cho phép ta sử dụng các hàm sinh mô-men để tìm các phân phối của các biến ngẫu nhiên biến đổi trong một số trường hợp. Kỹ thuật này thường được sử dụng cho các tổ hợp tuyến tính của các biến ngẫu nhiên độc lập.

f. Khi hàm sinh mô-men tồn tại, nó xác định một tập hợp vô hạn các mô-men

Câu hỏi hiển nhiên đặt ra là liệu hai phân phối khác nhau có thể có cùng một tập hợp mô-men vô hạn hay không. Câu trả lời là, khi hàm sinh mô-men tồn tại trong một lân cận quanh 0, dãy mô-men vô hạn sẽ xác định duy nhất phân phối. Điều này cho phép chúng ta xác định phân phối giới hạn của một dãy các biến ngẫu nhiên bằng cách xem xét các hàm sinh mô-men liên quan.

Phân tích và thảo luận

Các hướng nghiên cứu tiếp theo: Nghiên cứu mở rộng: Đề xuất các lĩnh vực khác mà MGF có thể được áp dụng, chẳng hạn như trong các mô hình dự đoán nâng cao hoặc phân tích dữ liệu lớn. Khám phá các công cụ bổ sung: Khuyến khích nghiên cứu thêm các công cụ bổ sung hoặc các phương pháp khác có thể kết hợp với MGF để cải thiện khả năng phân tích và ứng dụng.

4. Kết luận

Hàm sinh mô-men là một công cụ quan trọng và hữu ích trong phân tích xác suất và thống kê. Nó giúp giải quyết các bài toán thực tế bằng cách cung cấp thông tin chi tiết về các mô-men của phân phối, cho phép tính toán các thuộc tính quan trọng và tái lập phân phối từ các mô-men.

Tài liệu tham khảo

- Ross, S. M., 2012. *A First Course in Probability (9th Edition)*. Pearson.
- Feller, W., 1971. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Vol. 2)*. Pearson.
- Gupta, A., & Kumar, S., 2023. Moment Generating Functions and Their Applications in Modern Statistical Theory. *Journal of Applied Probability and Statistics*, 18(2), 134-150.
- Chen, L., & Zhang, Y., 2024. Exploring the Role of Moment Generating Functions in Stochastic Processes. *Probability and Mathematical Statistics*, 22(1), 45-63.

ABSTRACT

Moment generating functions: A powerful tool in probability and statistical analysis

Le Bich Phuong, Ha Huu Cao Trinh
Hanoi University of Mining and Geology

In this paper, we introduce a useful tool for proving theorems related to random variables, called the moment-generating function. This tool helps to transform problems involving probability and expectation into analytical problems related to the value and derivatives of the function. We will explain how the moment-generating function determines moments and how to use moments to reconstruct the moment-generating function. The paper also presents how to use the moment-generating function to find the distribution of functions related to random variables.

Keywords: moment-generating function, statistical probability, moments, probability distribution.

KHOA HỌC TRÁI ĐẤT VÀ TÀI NGUYÊN VỚI PHÁT TRIỂN BỀN VỮNG (ERSD 2024)



ISBN: 978-604-76-3040-0



9 786047 630400

SÁCH KHÔNG BÁN