



School of Applied Mathematics
<http://sam.utc.edu.vn/>



ISBN: 978-604-76-2931-2



9 786047 629312

Lưu hành nội bộ



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

KỶ YẾU

HỘI THẢO VỀ GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CƠ BẢN NĂM 2024



NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI

HÀ NỘI - 2024

KỶ YẾU HỘI THẢO VỀ GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CƠ BẢN NĂM 2024

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI**



**KỶ YẾU
HỘI THẢO VỀ GIẢNG DẠY
VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CƠ BẢN
NĂM 2024**

**NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI
HÀ NỘI - 2024**

BAN TỔ CHỨC HỘI THẢO

PGS.TS. Nguyễn Thị Mai	Trưởng BTC
TS. Ngô Đức Chính	Ủy viên TT
TS. Mai Nam Phong	Ủy viên
PGS.TS. Trần Văn Long	Ủy viên
PGS.TS. Nguyễn Thị Hòa	Ủy viên
TS. Nguyễn Thị Hồng Tuyền	Ủy viên
TS. Nguyễn Thế Vinh	Ủy viên
TS. Nguyễn Trường Giang	Ủy viên
TS. Phạm Minh Phúc	Ủy viên
ThS. Nguyễn Thị Cúc	Ủy viên
ThS. Nguyễn Diệu Thúy	Ủy viên
TS. Lại Thị Hoan	Ủy viên
ThS. Hoàng Thiệu Anh	Ủy viên

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

TT	NỘI DUNG	Trang
1	ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM VÀ ỨNG DỤNG Phạm Ngọc Anh, Nguyễn Thị Lan Hương, Nguyễn Thu Hằng, Nguyễn Thùy Linh	11
2	KẾT HỢP PHÂN CỤM K-MEANS VÀ THUẬT TOÁN DI TRUYỀN CHO BÀI TOÁN NGƯỜI BÁN HÀNG Nguyễn Minh Hoàng Sơn	20
3	MỘT SỐ GIỚI THIỆU VỀ THỐNG KÊ BAYES Bùi Việt Hương	27
4	NÂNG CAO CHẤT LƯỢNG GIẢNG DẠY CỰC TRỊ HÀM HAI BIẾN THÔNG QUA CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ Nguyễn Thùy Linh, Nguyễn Thị Lan Hương, Phạm Ngọc Anh, Nguyễn Thu Hằng	37
5	NÂNG CAO CHẤT LƯỢNG HOẠT ĐỘNG GIẢNG DẠY MÔN TOÁN CAO CẤP CHO KHỐI NGÀNH KINH TẾ Nguyễn Thị Lan Hương, Phạm Ngọc Anh, Nguyễn Thu Hằng, Nguyễn Thùy Linh	44
6	NGHIÊN CỨU ỨNG DỤNG HỌC MÁY TRONG PHÁT HIỆN URL LỪA ĐẢO Đặng Thị Mai	51
7	PHÂN LOẠI CÁC ĐẠI SỐ CON ĐỐI CHIỀU 2 TRONG PHÂN DƯƠNG CỦA ĐẠI SỐ VIRASORO Nguyễn Huy Hoàng	62
8	TÍNH ĐÓNG NGUYÊN CỦA IDEAL VÀ MỐI QUAN HỆ VỚI IDEAL RÚT GỌN Mai Phước Bình	71
9	THUẬT TOÁN CỰC ĐẠI HOÁ KỶ VỌNG VÀ ỨNG DỤNG VÀO ĐIỆN KHUYẾT DỮ LIỆU TRÊN PHẦN MỀM R Hoàng Thùy Linh	80

10	ỨNG DỤNG HỌC MÁY TRONG DỰ BÁO GIÁ NHÀ Ở TẠI HÀ NỘI Nguyễn Thị Hồng Hoa, Nguyễn Lê Minh	90
11	BÀI TOÁN TÌM ĐƯỜNG ĐI NGẮN NHẤT CÓ RÀNG BUỘC Nguyễn Hà Trang	97
12	MỘT PHƯƠNG PHÁP HIỆU QUẢ TÌM ĐA THỨC ĐIỀU HÒA Đào Việt Cường, Đinh Thị Kim Nhung	104
13	MỘT SỐ KIỂU BẤT ĐẲNG THỨC BẮT ĐỊNH CHO PHEP BIẾN ĐỔI TÍCH PHẦN HERMITE Phạm Tuấn Anh	111
14	PHƯƠNG PHÁP GRADIENT LIÊN HỢP TÌM CỰC TIỂU HÀM KHẢ VI Nguyễn Thị Huyền, Hoàng Thiệu Anh	117
15	SỬ DỤNG ĐỊNH LÝ WEIERSTRASS ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN TÌM GIỚI HẠN DẪY SỐ Nguyễn Anh Ngọc	128
16	ỨNG DỤNG XÍCH MARKOV ĐỂ TỐI ƯU DANH MỤC ĐẦU TƯ CHỨNG KHOÁN Trịnh Thị Trang	135
17	XÁP XỈ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG PHỤ THUỘC THAM SỐ BẰNG MẠNG NEURON SẪU Nguyễn Văn Kiên, Nguyễn Anh Ngọc, Dư Thị Thu Trang, Phạm Thành Dương	143
18	GIẢI BÀI TOÁN ĐỘNG LỰC HỌC CƠ HỆ VỚI HÀM LAGRANGE Huỳnh Văn Quân, Lê Hữu Đạt	155
19	PHÂN TÍCH ĐẠO ĐỘNG TỰ DO CỦA DẪM CÓ CƠ TÍNH BIẾN THIÊN HAI CHIỀU TRONG MÔI TRƯỜNG NHIỆT ĐỘ Nguyễn Duy Trường, Vũ Thị An Ninh	162
20	XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CHO MÔ HÌNH MÓNG CỌC ĐƠN CHỊU TẢI TRỌNG ĐỘNG ĐẤT Huỳnh Văn Quân	172
21	ẢNH HƯỞNG CỦA NHỮNG PHẢN HỒI CỦA GIÁO VIÊN LÊN KỸ NĂNG VIẾT CỦA SINH VIÊN ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI Hoàng Thị Xuân	179

22	ÁP DỤNG MÔ HÌNH “LỚP HỌC ĐẢO NGƯỢC” TRONG GIẢNG DẠY MÔN NGỮ ÂM THỰC HÀNH CHO SINH VIÊN CHUYÊN NGÀNH TIẾNG ANH THƯƠNG MẠI Nguyễn Đỗ Hương Giang, Phùng Văn Thủy	189
23	ĐỐI SÁNH CHƯƠNG TRÌNH ĐÀO TẠO NGÀNH NGÔN NGỮ ANH TRÌNH ĐỘ ĐẠI HỌC CỦA MỘT SỐ TRƯỜNG ĐẠI HỌC VIỆT NAM Nguyễn Thị Hồng Tuyền, Phạm Thị Bích Hạnh	198
24	NGHIÊN CỨU CHIẾN LƯỢC HỌC TẬP NGÔN NGỮ CỦA SINH VIÊN TẠI MỘT TRƯỜNG ĐẠI HỌC THUỘC KHỐI KỸ THUẬT Trương Thị Thanh Thủy, Trần Đình Thước	214
25	TÌM HIỂU VIỆC KIỂM TRA ĐÁNH GIÁ TIẾNG ANH CHUYÊN NGÀNH KINH TẾ TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI Bạch Thị Thanh	221
26	UÙU - NHƯỢC ĐIỂM CỦA VIỆC HỌC TIẾNG ANH TRỰC TUYẾN - KHẢO SÁT TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI Nguyễn Thị Quyên	231
27	VIỆC SỬ DỤNG CÁC CHIẾN LƯỢC ĐỌC SIÊU NHẬN THỨC TRONG THỰC HÀNH KỸ NĂNG ĐỌC TIẾNG ANH BI CỦA SINH VIÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI Vũ Thị Minh Phương	240
28	VIỆC SỬ DỤNG CÔNG CỤ TRÍ TUỆ NHÂN TẠO GRAMMARLY TRONG HỌC VIẾT TIẾNG ANH CỦA SINH VIÊN ĐẠI HỌC Phạm Thị Hương Giang	251
29	CÁC CÁCH ĐẶT CÂU HỎI TRONG TIẾNG PHÁP VÀ SO SÁNH ĐỐI CHIẾU VỚI TIẾNG ANH Nguyễn Phương Lan	261
30	MỘT SỐ KINH NGHIỆM TRONG XÂY DỰNG BÀI GIẢNG VIDEO THEO MÔ HÌNH B-LEARNING TRONG GIẢNG DẠY TIẾNG PHÁP TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI Lê Nguyễn Thanh Hương	271
31	TIẾNG PHÁP « FOS-TU »: MÔN HỌC CẦN THIẾT CHO SINH VIÊN KHỐI PHÁP NGỮ TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI Nguyễn Diệu Thủy	279

32	ỨNG DỤNG CHATGPT TRONG GIẢNG DẠY NGÔN NGỮ: MỘT SỐ QUAN ĐIỂM LÝ THUYẾT VÀ KINH NGHIỆM THỰC TIỄN Nguyễn Quang Anh	285
33	CHẾ TẠO MÀNG MŨNG LŨNG KIM Co/Pt SẮT TỪ TRỰC TIẾP TRÊN ĐÉ DẸO Nguyễn Tuấn Sơn	295
34	CHẾ TẠO VẬT LIỆU (1-x)PbTiO ₃ /xCoFe ₂ O ₄ VÀ NGHIÊN CỨU CẤU TRÚC, TÍNH CHẤT TỪ CỦA VẬT LIỆU Đào Việt Thắng, Nguyễn Mạnh Hùng	303
35	KAOLANH TRONG VAI TRÒ PHỤ GIA CHỐNG ĐÓNG CẶN CHO ĐÓT NHIÊN LIỆU SINH KHỐI Nguyễn Trường Giang	309
36	NANO COMPOSIT TRÊN NỀN NANO TỪ TÍNH VÀ ỨNG DỤNG Chu Tiến Dũng	314
37	NGHIÊN CỨU CHẾ TẠO VÀ KHẢO SÁT HOẠT TÍNH QUANG XÚC TÁC CỦA VẬT LIỆU COMPOSITE Ag ₃ PO ₄ /g-C ₃ N ₄ Đoàn Thị Thúy Phượng	323
38	NGHIÊN CỨU PHƯƠNG TRÌNH TRẠNG THÁI VÀ CÁC TÍNH CHẤT NHIỆT ĐỘNG CỦA BERI Ở NHIỆT ĐỘ VÀ ÁP SUẤT CAO Hứa Xuân Đạt, Nguyễn Thị Hòa	330
39	TÍNH CHẤT VẬT LÝ CỦA SÓNG ÁNH SÁNG ĐỀ TẠO HÌNH ẢNH Nguyễn Phi Hùng	342
40	CÁC HỢP CHẤT FLAVONOID GLYCOSIDE ĐƯỢC PHÂN LẬP TỪ LOÀI CỎ XUỐC (ARCHYRANTHES ASPERA) Bùi Thị Nha Trang, Nguyễn Thị Mai	348
41	CÁC HỢP CHẤT TRITECPENE GLYCOSIDE ĐƯỢC PHÂN LẬP TỪ LOÀI NGUỒU TẮT (ACHYRANTHES BIDENTATA) Hoàng Thị Tuyết Lan, Nguyễn Thị Mai	353
42	ĐÁNH GIÁ KHẢ NĂNG XỬ LÝ XANH METYLEN CỦA VẬT LIỆU NANO BẠC BẰNG DỊCH CHIẾT LÁ BẠC HÀ Lại Thị Hoan	359

43	MỘT SỐ HỢP CHẤT ĐƯỢC PHÂN LẬP TỪ THÂN CỦA LOÀI DÂY ĐAU XƯƠNG(TINOSPORA SINENSIS) VÀ HOẠT TÍNH KHÁNG VIÊM	367
	Bùi Thị Mai Anh, Nguyễn Thị Mai	
44	TÌM HIỂU MỘT SỐ VẬT LIỆU XÚC TÁC QUANG TRONG XỬ LÝ CHẤT HỮU CƠ ĐỘC HẠI	373
	Lê Thị Thi Hạ	
45	TỔNG HỢP VẬT LIỆU NANO VONFRAMAT PHA TẬP $MWO_4(M=Ca,Zn): Eu^{3+}, Al^{3+}$ BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÓA ƯỚT VÀ KHẢO SÁT HOẠT TÍNH XÚC TÁC QUANG PHÂN HỦY PHẨM NHUỘM MB	382
	Vũ Thị Xuân, Nguyễn Văn Hải, Nguyễn Hải Nam, Đỗ Văn Huy	
46	THÀNH PHẦN HÓA HỌC LÁ CỦA LOÀI DÂY ĐAU XƯƠNG (TINOSPORA SINENSIS)	393
	Bùi Thị Mai Anh	
47	XÁC ĐỊNH CẤU TRÚC HÓA HỌC CỦA MỘT SỐ HỢP CHẤT ĐƯỢC PHÂN LẬP TỪ LOÀI ACHYRANTHES ASPERA	399
	Hoàng Thị Tuyết Lan	
48	XÁC ĐỊNH CẤU TRÚC HÓA HỌC CỦA MỘT SỐ HỢP CHẤT PHÂN LẬP TỪ LOÀI ACHYRANTHES BIDENTADA	408
	Hoàng Thị Tuyết Lan	
49	ẢNH HƯỞNG CỦA ĐÁT SÉT VÀ CỐT SỢI THỰC VẬT ĐẾN CƯỜNG ĐỘ CHỊU NÉN VÀ UỐN CỦA BÊ TÔNG SINH THÁI	416
	Ngô Đức Chinh	
50	NGHIÊN CỨU GIẢNG DẠY VỀ KỸ THUẬT ĐỊNH HƯỚNG TƯ DUY KHÔNG GIAN	427
	Nguyễn Tuấn Anh	
51	NGHIÊN CỨU MỘT SỐ TÒN TÀI KHÍ SẢN XUẤT VÀ SỬ DỤNG CẤP PHỐI ĐÁ DẪM LÀM MÓNG ĐƯỜNG Ô TÔ Ở THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH	438
	Lương Đức Chung, Lê Thị Thu Thủy, Tạ Thị Huệ	
52	BẢO VỆ DỮ LIỆU CÁ NHÂN TRÊN NỀN TẢNG PHI TẬP TRUNG CỦA ATALA PRISM TRONG THẾ GIỚI SỐ HÓA	452
	Nguyễn Thị Hồng Hoa	

53	DỰ BÁO GIÁ TRỊ CỦA CÁC YẾU TỐ ẢNH HƯỞNG ĐẾN CHẤT LƯỢNG-KHÔNG KHÍ TRONG MÔI TRƯỜNG Nguyễn Lê Minh, Lê Nhật Tùng, Trần Thị Dung	461
54	DỰ BÁO TUỔI THỌ PIN LITHIUM-ION BẰNG CÁC PHƯƠNG PHÁP HỌC MÁY Lại Mạnh Dũng	468
55	NĂNG CAO HIỆU SUẤT VÀ BẢO MẬT CỦA HỢP ĐỒNG THÔNG MINH TRONG GIAO DỊCH ĐÁU GIÁ NFT BẰNG AIKEN Cao Thị Luyện, Nguyễn Tiến Tùng, Khuấn Đình Thành, Nguyễn Hồng Sơn, Nguyễn Thành Hưng	474
56	NGHIÊN CỨU VÀ XÂY DỰNG MÔ HÌNH HỌC SÂU PHÁT HIỆN DẤU HIỆU MỆT MỎI TRONG QUÁ TRÌNH HỌC TRỰC TUYẾN Nguyễn Thị Bích Ngọc, Đinh Công Tùng, Lê Đăng Sơn	483
57	SSI- GIẢI PHÁP CHO TƯƠNG LAI AN TOÀN VÀ RIÊNG TƯ TRONG THẾ GIỚI SỐ Cao Thị Luyện, Nguyễn Đức Dư, Nguyễn Huy Công	489
58	ỨNG DỤNG HỌC MÁY ĐỂ HIỆU CÁC THẮC MẮC CỦA SINH VIÊN ĐẠI HỌC TỪ PHƯƠNG TIỆN TRUYỀN THÔNG TRỰC TUYẾN Lương Thái Lê, Nguyễn Quang Duy	497
59	ỨNG XỬ CHỊU XOÁN CỦA THANH HÌNH CÁNH BƯỚM CÓ TIẾT ĐIỆN HÌNH CHỦ NHẬT THAY ĐỔI Nguyễn Tuyên Hoàng, Nguyễn Như Hiếu, Ngô Văn Lực	505

LỜI NÓI ĐẦU

Nhận thức rõ tầm quan trọng của công tác nghiên cứu khoa học trong việc nâng cao chất lượng đội ngũ giảng viên, đồng thời nâng cao chất lượng giảng dạy, trong những năm gần đây, việc đẩy mạnh nghiên cứu khoa học đã được Khoa Khoa học Cơ bản xác định là một trong những hoạt động trọng tâm trong các chương trình công tác của Khoa.

Khoa Khoa học Cơ bản hiện có 85 cán bộ, giảng viên và 25 giảng viên thỉnh giảng, hợp đồng thuộc 08 bộ môn: Giải tích, Đại số & Xác suất thống kê, Vật lý, Hóa học, Anh văn, Nga-Pháp, Hình họa-Vẽ kỹ thuật và Cơ lý thuyết; trong đó có: 06 Phó Giáo sư, 25 Tiến sĩ, 50 Thạc sỹ, 04 Cử nhân. Hàng năm, Khoa chủ trì hàng chục đề tài cấp Trường; chủ trì và tham gia các đề tài cấp Bộ và đề tài Quỹ Nafosted. Trong 5 năm gần đây, các giảng viên của Khoa đã công bố 96 công trình trên các tạp chí quốc tế thuộc danh mục ISI và Scopus, góp phần tạo nên thương hiệu của Nhà trường.

Ngoài giảng dạy các môn khoa học cơ bản, từ năm học 2018-2019, Khoa còn được Nhà trường giao nhiệm vụ đào tạo chuyên ngành Toán - Tin ứng dụng thuộc ngành đào tạo Toán ứng dụng. Hiện đã có 2 khóa sinh viên tốt nghiệp ra trường, tỉ lệ sinh viên có việc làm ngay rất cao và với mức thu nhập khá tốt. Cũng trong năm học 2023 – 2024 việc mở chuyên ngành Ngôn ngữ Anh cũng đã đi được nhiều chặng đường quan trọng, hướng tới trực tiếp tuyển sinh cho năm học 2024-2025. Việc tiếp tục mở các ngành đào tạo mới, theo hướng chuyên môn mà Khoa đang quản lý là hướng phát triển tiếp theo của Khoa trong thời gian tới.

Để đạt được những thành quả trong giảng dạy và nghiên cứu, thời gian qua, Khoa đã luôn khuyến khích đội ngũ giảng viên chủ động đổi mới, cải tiến phương pháp giảng dạy, tích cực tham gia các Hội nghị, Hội thảo trong nước và quốc tế về các lĩnh vực chuyên môn, tăng cường các công bố quốc tế để nâng cao chất lượng nghiên cứu khoa học.

Tiếp nối thành công của Hội thảo năm 2018, năm 2020 và năm 2022, Khoa Khoa học Cơ bản tổ chức **"Hội thảo về giảng dạy và nghiên cứu Khoa học Cơ bản năm 2024"**, Hội thảo là diễn đàn để các giảng viên, các nhà khoa học trao đổi, học hỏi, chia sẻ kinh nghiệm nghiên cứu và giảng dạy trong các lĩnh vực: Toán học, Vật lý, Hóa học, Ngoại ngữ, Cơ lý thuyết và Hình họa - Vẽ kỹ thuật và các lĩnh vực khác liên quan. Những công trình nghiên cứu có giá trị của Hội thảo được biên tập và xuất bản trong cuốn **"Kỷ yếu Hội thảo về giảng dạy và nghiên cứu Khoa học Cơ bản năm 2024"**.

Khoa Khoa học cơ bản trân trọng gửi lời cảm ơn tới các tác giả trong và ngoài Trường đã dành sự quan tâm và gửi đến Hội thảo các bài viết có chất lượng. Xin cảm ơn các nhà giáo, các nhà khoa học từ các Trường đại học, các Viện nghiên cứu đã dành

Hội thảo về Giảng dạy và Nghiên cứu khoa học cơ bản năm 2024

thời gian và công sức đọc phân biện các bài báo, giúp Ban tổ chức lựa chọn các báo cáo tiêu biểu để đăng trong Kỷ yếu của Hội thảo. Những kết quả từ Hội thảo sẽ là cơ sở quan trọng để Khoa tiếp tục đổi mới, cải tiến phương pháp giảng dạy, định hướng nghiên cứu khoa học cũng như triển khai mở mời các ngành đào tạo.

Trong quá trình biên tập Kỷ yếu, không tránh khỏi những hạn chế, thiếu sót, Ban tổ chức mong nhận được sự chia sẻ và các ý kiến góp ý của độc giả.

Xin trân trọng cảm ơn !

BAN TỔ CHỨC HỘI THẢO

ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM VÀ ỨNG DỤNG

Phạm Ngọc Anh*, Nguyễn Thị Lan Hương, Nguyễn Thu Hằng, Nguyễn Thùy Linh

Trường Đại học Mỏ - Địa chất

* Tác giả liên hệ: Email: phamngocanhbmtuan@humg.edu.vn (mobile:0914989896)

Tóm tắt: Trong báo cáo này, chúng tôi trình bày lại về định lý giới hạn trung tâm cùng với chứng minh chi tiết của định lý. Sau đó, chúng tôi tìm hiểu vai trò của định lý giới hạn trung tâm trong lý thuyết xác suất và thống kê toán học cùng với rất nhiều ứng dụng của định lý giới hạn trung tâm trong các bài toán thực tế. Mục đích của chúng tôi là cung cấp cho sinh viên một tài liệu tham khảo hữu ích, giúp sinh viên hiểu rõ hơn ý nghĩa của định lý giới hạn trung tâm.

Từ khóa: Hàm đặc trưng, Định lý Lindenberg-Lewi, Định lý giới hạn trung tâm.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong xác suất, định lý giới hạn trung tâm là định lý nổi tiếng và có vai trò quan trọng. Định lý giới hạn trung tâm là một khía cạnh quan trọng trong lý thuyết xác suất và thống kê toán. Định lý này cho thấy xu hướng tập trung của biến mẫu về phân phối chuẩn. Nhờ định lý này, chúng ta có thể tiên đoán và ước lượng xác suất phân phối của biến mẫu dựa trên phân phối chuẩn, giúp chúng ta hiểu rõ hơn về sự biến đổi và tính chất của các biến ngẫu nhiên.

Nói về lịch sử hình thành, cũng như nhiều lý thuyết Toán học khác, Định lý giới hạn trung tâm cũng là tổng hòa của nhiều công trình toán học, với sự đóng góp của nhiều nhà khoa học. Theo Wikipedia, phiên bản đầu tiên của định lý này được đưa ra bởi nhà toán học gốc Pháp - Abraham De Moivre. Trong một bài báo xuất bản năm 1733, ông đã sử dụng phân phối chuẩn để tính gần đúng phân bố của số mặt ngửa do nhiều lần tung đồng xu đồng chất. Phát hiện này đã đi trước thời đại rất xa và gần như bị lãng quên cho đến khi nhà toán học nổi tiếng người Pháp Pierre-Simon Laplace trong một xuất bản năm 1812 đã mở rộng phát hiện của De Moivre bằng cách xấp xỉ nhị thức phân phối với phân phối chuẩn. Nhưng cũng như De Moivre, phát hiện của Laplace ít được chú ý vào thời của ông. Mãi đến cuối thế kỷ 19, tầm quan trọng của định lý giới hạn trung tâm mới được nhận ra, khi vào năm 1901, nhà toán học người Nga - Aleksandr Lyapunov đã phát biểu và chứng minh định lý một cách tổng quát. Thuật ngữ "định lý giới hạn trung tâm" được George Pólya sử dụng lần đầu tiên vào năm 1920 trong tiêu đề của một bài báo của ông và từ đó được sử dụng rộng rãi cho đến ngày nay.

Cho đến hiện tại, Định lý giới hạn trung tâm có ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau, chẳng hạn như trong xác suất và thống kê: Định lý giới hạn trung tâm có vai trò quan trọng trong việc xác định phân phối xấp xỉ của một biến ngẫu nhiên. Nó cho phép xác định xác suất xảy ra của một sự kiện dựa trên mẫu ngẫu nhiên có kích

thước lớn; trong Y học, định lý giới hạn trung tâm được sử dụng để xác định phân phối xác suất của các biến y tế như chiều cao, cân nặng, huyết áp trong các nghiên cứu lâm sàng, hay trong Khoa học máy tính, định lý giới hạn trung tâm được sử dụng trong phân tích dữ liệu và machine learning để xác định phân phối xác suất của các biến ngẫu nhiên trong quá trình huấn luyện mô hình...

Định lý giới hạn trung tâm có mặt ở hầu hết giáo trình xác suất thống kê trong và ngoài nước với nhiều ứng dụng thú vị xoay quanh. Tuy nhiên, đây là một định lý khó với nhiều sinh viên và thường bị bỏ qua trong quá trình học tập. Trong báo cáo này, chúng tôi muốn trình bày lại chi tiết về phát biểu và chứng minh của định lý giới hạn trung tâm. Sau đó, chúng tôi có gắng tập hợp lại một số ứng dụng của định lý giới hạn trung tâm về mặt lý thuyết cũng như thực tế. Cuối cùng, chúng tôi sưu tập một vài ví dụ thú vị để thấy được sự gần gũi của định lý trong cuộc sống.

Báo cáo được chia làm 3 phần: Cơ sở lý thuyết, định lý giới hạn trung tâm, một số bài toán thực tế.

2. NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lý thuyết

2.1.1. Biến ngẫu nhiên

Theo [1], biến ngẫu nhiên được định nghĩa:

Biến ngẫu nhiên là một hàm đo được trên không gian mẫu.

Biến ngẫu nhiên X được gọi là một biến ngẫu nhiên rời rạc nếu ta có thể liệt kê các giá trị nó nhận.

Biến ngẫu nhiên X là biến ngẫu nhiên liên tục nếu X có thể nhận bất cứ giá trị nào trên một khoảng của trục số, thậm chí trên toàn bộ trục số.

Những khái niệm sau được tham khảo trong [2]

2.1.2. Quy luật nhị thức $-B(n, p)$

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận một trong các giá trị có thể có $x = 0, 1, 2, \dots, n$ với các xác suất tương ứng được tính bằng công thức (1) gọi là phân phối theo quy luật nhị thức với các tham số là n và p .

$$P(X = x) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Quy luật nhị thức được kí hiệu $B(n, p)$

2.1.3. Quy luật Poisson $-P(\lambda)$

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận một trong các giá trị có thể có $x = 0, 1, 2, \dots$ với các xác suất tương ứng được tính bằng công thức (2) gọi là phân phối theo quy luật Poisson với các tham số là λ .

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \quad x = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

Quy luật Poisson được kí hiệu $P(\lambda)$

2.1.4. Quy luật phân phối đều liên tục – $U(a, b)$

Biến ngẫu nhiên liên tục X gọi là phân phối theo quy luật đều trong khoảng (a, b) nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{với } x \in (a, b) \\ 0 & \text{với } x \notin (a, b). \end{cases} \quad (3)$$

Quy luật phân phối đều liên tục được kí hiệu $U(a, b)$

2.1.5. Quy luật phân phối lũy thừa – $Exp(\lambda)$

Biến ngẫu nhiên liên tục X gọi là phân phối theo quy luật lũy thừa (quy luật mũ) nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{với } x \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

Trong đó λ là một hằng số dương.

Quy luật phân phối lũy thừa được kí hiệu $Exp(\lambda)$

2.1.6. Quy luật phân phối chuẩn – $N(\mu, \sigma^2)$

Biến ngẫu nhiên liên tục X nhận các giá trị trong khoảng $(-\infty, +\infty)$ gọi là phân phối theo quy luật chuẩn với các tham số μ và σ^2 nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (5)$$

Quy luật phân phối chuẩn được kí hiệu $N(\mu, \sigma^2)$

2.1.7. Quy luật phân phối chuẩn hóa – $N(0, 1)$

Biến ngẫu nhiên liên tục U nhận các giá trị trong khoảng $(-\infty, +\infty)$ gọi là phân phối theo quy luật chuẩn hóa nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng :

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}. \quad (6)$$

Quy luật phân phối chuẩn hóa được kí hiệu $N(0,1)$.

2.2. Định lí giới hạn trung tâm

Những khái niệm, định lí sau được tham khảo trong [2]

2.2.1. Hàm đặc trưng

a. Định nghĩa

Hàm đặc trưng của biến ngẫu nhiên X là kì vọng toán của biến ngẫu nhiên e^{itx} và được kí hiệu là $\varphi_X(t)$, tức là:

$$\varphi_X(t) = E[e^{itx}] = E(\cos tX) + iE(\sin tX).$$

Như vậy nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì:

$$\varphi_X(t) = \sum_j e^{itx_j} P_j.$$

Còn nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

b. Các tính chất của hàm đặc trưng

Tính chất 1: $|\varphi_X(t)| \leq 1$.

Tính chất 2: Nếu $Y = aX + b$ thì $\varphi_Y(t) = e^{ibt} \varphi_X(at)$.

Tính chất 3: Nếu X_1, X_2, \dots, X_n là các biến ngẫu nhiên độc lập thì:

$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{X_k}(t).$$

Tính chất 4: Nếu tồn tại $E|X|^k$ thì hàm đặc trưng $\varphi_X(t)$ cũng tồn tại đạo hàm đến bậc k tại mọi điểm t

Và có:

$$\varphi_X(t) = \sum_{m=0}^k \frac{(it)^m}{m!} E[X^m] + o(t^k).$$

Tính chất 5: Nếu $\{F_n(x)\}$ là dãy hàm phân phối xác suất và $\{\varphi_n(t)\}$ là dãy các hàm đặc trưng tương ứng thì điều kiện cần và đủ để $\{F_n(x)\}$ hội tụ yếu (tức là hội tụ tại các điểm $F_n(x)$ liên tục) tới hàm phân bố xác suất $F(x)$ là $\{\varphi_n(t)\}$ tại mọi t đến hàm đặc trưng $\varphi(t)$ tương ứng với $F(x)$.

Những bài toán sau được tham khảo trong [3]

Bài toán 1: Cho biến ngẫu nhiên rời rạc $X \sim B(n, p)$. Tìm $\varphi_X(t)$

Lời giải:

Theo định nghĩa của quy luật $B(n, p)$

$$P_x = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = \overline{0, n}.$$

Nên

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) = E[e^{itx}] &= \sum_{x=0}^n e^{itx} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n C_n^x (pe^{it})^x (1-p)^{n-x} \\ &= [pe^{it} + (1-p)]^n. \end{aligned}$$

Bài toán 2: Cho biến ngẫu nhiên rời rạc $X \sim P(\lambda)$. Tìm $\varphi_X(t)$

Lời giải:

Theo định nghĩa của quy luật Poisson:

$$P_x = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$$

Nên

$$\varphi_X(t) = E[e^{itx}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda e^{it})^x}{x!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Lưu ý:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < \infty.$$

Bài toán 3: Cho biến ngẫu nhiên liên tục U có phân phối chuẩn hóa $N(0,1)$. Tìm $\varphi_U(t)$
 Lời giải:

Theo định nghĩa phân phối chuẩn hóa

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Nên:

$$\varphi_U(t) = E[e^{itu}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu - \frac{u^2}{2}} du.$$

Lấy đạo hàm theo t

$$\begin{aligned} \varphi'_U(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} iue^{itu - \frac{u^2}{2}} du = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} d\left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right) \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{itu} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} d(e^{itu}) \right] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ite^{itu} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= -t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu - \frac{u^2}{2}} du = -t\varphi_U(t). \end{aligned}$$

Như vậy:

$$\varphi'_U(t) = -t\varphi_U(t).$$

Từ đó:

$$\varphi_U(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Do

$$\varphi_U(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \cdot 0 \cdot u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1.$$

Nên $C = 1$, do đó:

$$\varphi_U(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Bài toán 4: Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$. Tìm $\varphi_X(t)$

Lời giải:

Do X có phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$ nên:

$$X = \sigma \frac{X - \mu}{\sigma} + \mu = \sigma U + \mu \quad \text{với } U \sim N(0,1).$$

Vậy:

$$\varphi_X(t) = Ee^{itx} = Ee^{it(\sigma U + \mu)} = e^{it\mu} \varphi_U(\sigma t) = e^{it\mu} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

2.2.2. Định lý Lindenberg-Lewi

Nếu $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập tuân theo một quy luật phân phối xác suất nào đó với kì vọng toán và phương sai hữu hạn:

$$E(X_k) = a; V(X_k) = \sigma^2, \forall k.$$

Thì quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên

$$U_n^a = \frac{U_n - E(U_n)}{\sqrt{V(U_n)}} \quad \text{với} \quad U_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

sẽ hội tụ khi $n \rightarrow \infty$ tới quy luật chuẩn hóa $N(0,1)$. Tức là:

$$P(U_n^a < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Chứng minh

Theo tính chất của hàm đặc trưng, ta chỉ cần chỉ ra rằng hàm đặc trưng $\varphi_{U_n^a}(t)$

hội tụ đến hàm đặc trưng của phân phối chuẩn hóa là $\varphi_U(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ khi $n \rightarrow \infty$.

Xét biến ngẫu nhiên:

$$U_n - E(U_n) = [X_1 - E(X_1)] + [X_2 - E(X_2)] + \dots + [X_n - E(X_n)].$$

Đặt $Y_k = X_k - E(X_k)$.

Ta có: $U_n - E(U_n) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.

$$E(Y_k) = E[X_k - E(X_k)] = 0, \forall k.$$

$$V(Y_k) = E(Y_k^2) - [E(Y_k)]^2 = E(Y_k^2) = \sigma^2 = V(X_k), \forall k.$$

Đặt $\varphi(t) = \varphi_{Y_k}(t)$

Theo tính chất 4 của hàm đặc trưng có:

$$\varphi(t) = 1 + \frac{it}{1!}E(Y_k) + \frac{(it)^2}{2!}E(Y_k^2) + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2}\sigma^2 + o(t^2).$$

Do $U_n - E(U_n) = \sum_{k=1}^n Y_k$, nên:

$$\varphi_{U_n - EU_n}(t) = \varphi_{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n}(t) = \prod_{k=1}^n \varphi_{Y_k}(t) = [\varphi(t)]^n.$$

Ta có:

$$U_n^a = \frac{U_n - E(U_n)}{\sqrt{V(U_n)}}; V(U_n) = V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n VX_k = n\sigma^2.$$

Vậy :

$$U_n^a = \frac{U_n - E(U_n)}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Do đó:

$$\begin{aligned} \varphi_{U_n^a}(t) &= \varphi_{U_n - EU_n}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}t\right) = \left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left\{1 - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)\right\}^n \\ &= \left\{1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}^n. \end{aligned}$$

Vi vậy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{U_n^a}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}^n = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left\{1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}}$$

Do $\ln\left\{1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\} \sim \left\{-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}$ khi $n \rightarrow \infty$, nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{U_n^a}(t) = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

2.3. Một số bài toán thực tế.

Bài toán 5: Xét trò chơi trúng thưởng sau: ghi một số với giá trị 1 đồng, nếu cuối ngày tháng thì được 60 đồng. Số trúng thưởng là một số thuộc tập $\{00, 01, 02, \dots, 99\}$. Tính tiền lãi kì vọng thu được khi buổi sáng người chơi ghi một số.

Lời giải:

Gọi X_i : “Lợi nhuận khi dùng 1 đồng để ghi số thứ i ”, đơn vị: đồng; $i \in \{00, 01, \dots, 99\}$

Ta có: $X_i \in \{-1; 59\}$

X_i	-1	59
P	0,99	0,01

$$\text{Vậy: } EX_i = -1.0,99 + 59.0,01 = -0,4$$

$$EX_i^2 = (-1)^2.0,99 + 59^2.0,01 = 35,8$$

$$VX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = 35,64$$

Bài toán 6: Xét trò chơi trúng thưởng trong bài toán 5. Một người dùng 1000 đồng để ghi 100 số $\{00, 01, 02, \dots, 99\}$ vào buổi sáng với chiến lược bất kì. Tính tiền lãi kì vọng thu được lúc cuối ngày khi thông báo giải thưởng.

Lời giải:

Gọi a_i là số đồng để ghi số thứ i , $i \in \{00, 01, 02, \dots, 99\}$

Ta có: $a_{00} + a_{01} + \dots + a_{99} = 1000$

Gọi Y là “lợi nhuận thu được”

Ta có $Y = a_{00}X_{00} + a_{01}X_{01} + \dots + a_{99}X_{99}$

X_i là biến ngẫu nhiên có phân phối như trong bài toán 5.

Ta kiểm tra giả thiết của định lí giới hạn trung tâm: các X_i độc lập, cùng phân phối có kì vọng và phương sai hữu hạn.

Áp dụng định lí giới hạn trung tâm có:

$$Y \sim N\left(\mu = E\left(\sum_{i=00}^{99} a_i X_i\right), \sigma^2 = V\left(\sum_{i=00}^{99} a_i X_i\right)\right).$$

Vậy

$$EY = E\left(\sum_{i=00}^{99} a_i X_i\right) = \sum_{i=00}^{99} a_i EX_i = -0,4 \cdot \sum_{i=00}^{99} a_i = -0,4 \cdot 1000 = -400.$$

Bài toán 7: Xét trò chơi trúng thưởng trong bài toán 5. Một người sử dụng chiến lược như trong bài toán 6 để chơi trò chơi trúng thưởng trong một tháng (30 ngày). Tính tiền lãi kì vọng thu được vào cuối tháng.

Lời giải:

Gọi Y_i là lợi nhuận khi sử dụng 1000 đồng để ghi các số ở ngày thứ i , $i \in \{1, 2, \dots, 30\}$

Y_i có phân phối giống phân phối của Y trong bài toán 6.

Gọi Z là tiền lãi thu được sau 1 tháng.

$$Z = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{30}$$

Kiểm tra lại các giả thiết của định lý giới hạn trung tâm: Các Y_i độc lập, cùng phân phối có kì vọng và phương sai hữu hạn.

Áp dụng định lý giới hạn trung tâm có:

$$Z \sim N \left(\mu = E \left(\sum_{i=1}^{30} Y_i \right), \sigma^2 = V \left(\sum_{i=1}^{30} Y_i \right) \right).$$

Vậy:

$$EZ = E \left(\sum_{i=1}^{30} Y_i \right) = \sum_{i=1}^{30} EY_i = 30.(-400) = -1200.$$

Nhận xét: Ta đã chỉ ra một cách có cơ sở khoa học là khi chơi trò chơi trúng thưởng trên thì người chơi luôn thua lỗ nặng.

3. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày kiến thức cơ bản về định lý giới hạn trung tâm, một trong những định lý quan trọng trong dạy học môn Xác suất thống kê tại các trường đại học. Bên cạnh trình bày nội dung định lý, bài báo đưa ra những ví dụ minh họa gắn nội dung lý thuyết với bài toán thực tiễn, qua đó sẽ giúp các bạn sinh viên thấy hứng khởi, hiểu được sâu sắc lý do tại sao chúng ta học xác suất. Bài báo có thể được vận dụng trong giảng dạy môn học Xác suất thống kê tại trường đại học.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Đặng Hùng Thắng – Trần Mạnh Cường, Thống kê cho Khoa học xã hội và Khoa học sự sống, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2019, 80-95.
- [2]. Nguyễn Cao Văn – Ngô Văn Thứ - Trần Thái Ninh, Giáo trình Lý thuyết Xác Suất và Thống Kê Toán, 3, NXB Đại Học Kinh Tế Quốc Dân, 2015, 279-285.
- [3]. Nguyễn Duy Tiến – Vũ Việt Yên, Lý thuyết xác suất, NXB Giáo Dục, 2001, 187-193.