School of Applied Mathematics
http://sam.utc.edu.vn/

ISBN: 978-604-76-2931-2

Lưu hành nội bộ

HÀ NỘI - 2024

KỶ YẾU HỘI THẢO VỀ GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CƠ BẢN NĂM 2024

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

KỶ YẾU

HỘI THẢO VỀ GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CƠ BẢN NĂM 2024

NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC GIAO THÔNG VẬN TẢI

KỶ YẾU
HỘI THẢO VỀ GIẢNG DẠY
VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CƠ BẢN
NĂM 2024

NHÀ XUẤT BẢN GIAO THÔNG VẬN TẢI
HÀ NỘI - 2024

BAN TỔ CHỨC HỘI THẢO

PGS.TS. Nguyễn Thị Mai	Trưởng BTC
TS. Ngô Đức Chinh	Ủy viên TT
TS. Mai Nam Phong	Ủy viên
PGS.TS. Trần Văn Long	Ủy viên
PGS.TS. Nguyễn Thị Hòa	Ủy viên
TS. Nguyễn Thị Hồng Tuyến	Ủy viên
TS. Nguyễn Thế Vinh	Ủy viên
TS. Nguyễn Trường Giang	Ủy viên
TS. Phạm Minh Phúc	Ủy viên
ThS. Nguyễn Thị Cúc	Ủy viên
ThS. Nguyễn Diệu Thúy	Ủy viên
TS. Lại Thị Hoan	Ủy viên
ThS. Hoàng Thiệu Anh	Ủy viên

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Nhận thức rõ tầm quan trọng của công tác nghiên cứu khoa học trong việc nâng cao chất lượng đội ngũ giảng viên, đồng thời nâng cao chất lượng giảng dạy, trong những năm gần đây, việc đẩy mạnh nghiên cứu khoa học đã được Khoa Khoa học Cơ bản xác định là một trong những hoạt động trọng tâm trong các chương trình công tác của Khoa.

Khoa Khoa học Cơ bản hiện có 85 cán bộ, giảng viên và 25 giảng viên thỉnh giảng, hợp đồng thuộc 08 bộ môn: Giải tích, Đại số & Xác suất thống kê, Vật lý, Hóa học, Anh văn, Nga-Pháp, Hình họa-Vẽ kỹ thuật và Cơ lý thuyết; trong đó có: 06 Phó Giáo sư, 25 Tiến sĩ, 50 Thạc sỹ, 04 Cử nhân. Hàng năm, Khoa chủ trì hàng chục đề tài cấp Trường; chủ trì và tham gia các đề tài cấp Bộ và đề tài Quỹ Nafosted. Trong 5 năm gần đây, các giảng viên của Khoa đã công bố 96 công trình trên các tạp chí quốc tế thuộc danh mục ISI và Scopus, góp phần tạo nên thương hiệu của Nhà trường.

Ngoài giảng dạy các môn khoa học cơ bản, từ năm học 2018-2019, Khoa còn được Nhà trường giao nhiệm vụ đào tạo chuyên ngành Toán - Tin ứng dụng thuộc ngành đào tạo Toán ứng dụng. Hiện đã có 2 khóa sinh viên tốt nghiệp ra trường, tỉ lệ sinh viên có việc làm ngay rất cao và với mức thu nhập khá tốt. Cũng trong năm học 2023 – 2024 việc mở chuyên ngành Ngôn ngữ Anh cũng đã đi được nhiều chặng đường quan trọng, hướng tới trực tiếp tuyển sinh cho năm học 2024-2025. Việc tiếp tục mở các ngành đào tạo mới, theo hướng chuyên môn mà Khoa đang quản lý là hướng phát triển tiếp theo của Khoa trong thời gian tới.

Để đạt được những thành quả trong giảng dạy và nghiên cứu, thời gian qua, Khoa đã luôn khuyến khích đội ngũ giảng viên chủ động đổi mới, cải tiến phương pháp giảng dạy, tích cực tham gia các Hội nghị, Hội thảo trong nước và quốc tế về các lĩnh vực chuyên môn, tăng cường các công bố quốc tế để nâng cao chất lượng nghiên cứu khoa học.

Tiếp nối thành công của Hội thảo năm 2018, năm 2020 và năm 2022, Khoa Khoa học Cơ bản tổ chức ***"Hội thảo về giảng dạy và nghiên cứu Khoa học Cơ bản năm 2024"****, Hội thảo là diễn đàn để các giảng viên, các nhà khoa học trao đổi, học hỏi, chia sẻ kinh nghiệm nghiên cứu và giảng dạy trong các lĩnh vực: Toán học, Vật lý, Hóa học, Ngoại ngữ, Cơ lý thuyết và Hình họa - Vẽ kỹ thuật và các lĩnh vực khác liên quan. Những công trình nghiên cứu có giá trị của Hội thảo được biên tập và xuất bản trong cuốn* ***"Kỷ yếu Hội thảo về giảng dạy và nghiên cứu Khoa học Cơ bản năm 2024".***

Khoa Khoa học cơ bản trân trọng gửi lời cảm ơn tới các tác giả trong và ngoài Trường đã dành sự quan tâm và gửi đến Hội thảo các bài viết có chất lượng. Xin cảm ơn các nhà giáo, các nhà khoa học từ các Trường đại học, các Viện nghiên cứu đã dành *thời gian và công sức đọc phản biện các bài báo, giúp Ban tổ chức lựa chọn các báo cáo tiêu biểu để đăng trong Kỷ yếu của Hội thảo. Những kết quả từ Hội thảo sẽ là cơ sở quan trọng để Khoa tiếp tục đổi mới, cải tiến phương pháp giảng dạy, định hướng nghiên cứu khoa học cũng như triển khai mở mới các ngành đào tạo.*

Trong quá trình biên tập Kỷ yếu, không tránh khỏi những hạn chế, thiếu sót, Ban tổ chức mong nhận được sự chia sẻ và các ý kiến góp ý của độc giả.

Xin trân trọng cảm ơn !

BAN TỔ CHỨC HỘI THẢO

ĐỊNH LÍ GIỚI HẠN TRUNG TÂM VÀ ỨNG DỤNG

Phạm Ngọc Anh*, Nguyễn Thị Lan Hương, Nguyễn Thu Hằng, Nguyễn Thùy Linh

Trường Đại học Mỏ - Địa chất

* Tác giả liên hệ: Email: phamngocanhbmtoan@humg.edu.vn (mobile:0914989896)

Tóm tắt: Trong báo cáo này, chúng tôi trình bày lại về định lí giới hạn trung tâm cùng với chứng minh chi tiết của định lí. Sau đó, chúng tôi tìm hiểu vai trò của định lí giới hạn trung tâm trong lí thuyết xác suất và thống kê toán học cùng với rất nhiều ứng dụng của định lí giới hạn trung tâm trong các bài toán thực tế. Mục đích của chúng tôi là cung cấp cho sinh viên một tài liệu tham khảo hữu ích, giúp sinh viên hiểu rõ hơn ý nghĩa của định lí giới hạn trung tâm.

Từ khóa: Hàm đặc trưng, Định lí Lindenberg-Lewi, Định lí giới hạn trung tâm.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong xác suất, định lý giới hạn trung tâm là định lí nổi tiếng và có vai trò quan trọng. Định lí giới hạn trung tâm là một khía cạnh quan trọng trong lí thuyết xác suất và thống kê toán. Định lí này cho thấy xu hướng tập trung của biến mẫu về phân phối chuẩn. Nhờ định lí này, chúng ta có thể tiên đoán và ước lượng xấp xỉ phân phối của biến mẫu dựa trên phân phối chuẩn, giúp chúng ta hiểu rõ hơn về sự biến đổi và tính chất của các biến ngẫu nhiên.

Nói về lịch sử hình thành, cũng như nhiều lí thuyết Toán học khác, Định lí giới hạn trung tâm cũng là tổng hòa của nhiều công trình toán học, với sự đóng góp của nhiều nhà khoa học. Theo Wikipedia, phiên bản đầu tiên của định lí này được đưa ra bởi nhà toán học gốc Pháp - Abraham De Moivre. Trong một bài báo xuất bản năm 1733, ông đã sử dụng phân phối chuẩn để tính gần đúng phân bố của số mặt ngửa do nhiều lần tung đồng xu đồng chất. Phát hiện này đã đi trước thời đại rất xa và gần như bị lãng quên cho đến khi nhà toán học nổi tiếng người Pháp Pierre-Simon Laplace trong một xuất bản năm 1812 đã mở rộng phát hiện của De Moivre bằng cách xấp xỉ nhị thức phân phối với phân phối chuẩn. Nhưng cũng như De Moivre, phát hiện của Laplace ít được chú ý vào thời của ông. Mãi đến cuối thế kỷ 19, tầm quan trọng của định lí giới hạn trung tâm mới được nhận ra, khi vào năm 1901, nhà toán học người Nga - Aleksandr Lyapunov đã phát biểu và chứng minh định lí một cách tổng quát. Thuật ngữ "định lí giới hạn trung tâm" được George Pólya sử dụng lần đầu tiên vào năm 1920 trong tiêu đề của một bài báo của ông và từ đó được sử dụng rộng rãi cho đến ngày nay.

Cho đến hiện tại, Định lí giới hạn trung tâm có ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau, chẳng hạn như trong xác suất và thống kê: Định lí giới hạn trung tâm có vai trò quan trọng trong việc xác định phân phối xấp xỉ của một biến ngẫu nhiên. Nó cho phép xác định xác suất xảy ra của một sự kiện dựa trên mẫu ngẫu nhiên có kích thước lớn; trong Y học, định lí giới hạn trung tâm được sử dụng để xác định phân phối xấp xỉ của các biến y tế như chiều cao, cân nặng, huyết áp trong các nghiên cứu lâm sàng, hay trong Khoa học máy tính, định lí giới hạn trung tâm được sử dụng trong phân tích dữ liệu và machine learning để xác định phân phối xấp xỉ của các biến ngẫu nhiên trong quá trình huấn luyện mô hình…

Định lí giới hạn trung tâm có mặt ở hầu hết giáo trình xác suất thống kê trong và ngoài nước với nhiều ứng dụng thú vị xoay quanh. Tuy nhiên, đây là một định lí khó với nhiều sinh viên và thường bị bỏ qua trong quá trình học tập. Trong báo cáo này, chúng tôi muốn trình bày lại chi tiết về phát biểu và chứng minh của định lí giới hạn trung tâm. Sau đó, chúng tôi cố gắng tập hợp lại một số ứng dụng của định lí giới hạn trung tâm về mặt lí thuyết cũng như thực tế. Cuối cùng, chúng tôi sưu tập một vài ví dụ thú vị để thấy được sự gần gũi của định lí trong cuộc sống.

Báo cáo được chia làm 3 phần: Cơ sở lí thuyết, định lí giới hạn trung tâm, một số bài toán thực tế.

2. NỘI DUNG

2.1. Cơ sở lí thuyết

2.1.1. Biến ngẫu nhiên

Theo [1], biến ngẫu nhiên được định nghĩa:

Biến ngẫu nhiên là một hàm đo được trên không gian mẫu.

Biến ngẫu nhiên X được gọi là một biến ngẫu nhiên rời rạc nếu ta có thể liệt kê các giá trị nó nhận.

Biến ngẫu nhiên X là biến ngẫu nhiên liên tục nếu X có thể nhận bất cứ giá trị nào trên một khoảng của trục số, thậm chí trên toàn bộ trục số.

Những khái niệm sau được tham khảo trong [2]

2.1.2. Quy luật nhị thức $-B(n,p)$

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận một trong các giá trị có thể có $x = 0,1,2,\dots,n$ với các xác suất tương ứng được tính bằng công thức (1) gọi là phân phối theo quy luật nhị thức với các tham số là n và p.

$$P(X=x) = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \ \ x = 0,1,2,\dots,n. \qquad (1)$$

Quy luật nhị thức được kí hiệu $B(n,p)$

2.1.3. Quy luật Poisson $-P(\lambda)$

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận một trong các giá trị có thể có $x = 0,1,2,\dots$ với các xác suất tương ứng được tính bằng công thức (2) gọi là phân phối theo quy luật Poisson với các tham số là λ.

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}, \ \ x = 0,1,2,\dots \qquad (2)$$

Quy luật Poisson được kí hiệu $P(\lambda)$

2.1.4. Quy luật phân phối đều liên tục $-\boldsymbol{U(a,b)}$

Biến ngẫu nhiên liên tục X gọi là phân phối theo quy luật đều trong khoảng (a,b) nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & với\ \ x \in (a,b) \\ 0 & với\ x \notin (a,b). \end{cases} \tag{3}$$

Quy luật phân phối đều liên tục được kí hiệu $U(a,b)$

2.1.5. Quy luật phân phối lũy thừa $-\boldsymbol{Exp(\lambda)}$

Biến ngẫu nhiên liên tục X gọi là phân phối theo quy luật lũy thừa (quy luật mũ) nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & với\ \ x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & với\ x \geq 0. \end{cases} \tag{4}$$

Trong đó λ là một hằng số dương.

Quy luật phân phối lũy thừa được kí hiệu $Exp(\lambda)$

2.1.6. Quy luật phân phối chuẩn $-\boldsymbol{N(\mu,\sigma^2)}$

Biến ngẫu nhiên liên tục X nhận các giá trị trong khoảng $(-\infty,+\infty)$ gọi là phân phối theo quy luật chuẩn với các tham số μ và σ^2 nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ . \tag{5}$$

Quy luật phân phối chuẩn được kí hiệu $N(\mu,\sigma^2)$

2.1.7. Quy luật phân phối chuẩn hóa $-\boldsymbol{N(0,1)}$

Biến ngẫu nhiên liên tục U nhận các giá trị trong khoảng $(-\infty,+\infty)$ gọi là phân phối theo quy luật chuẩn hóa nếu hàm mật độ xác suất của nó có dạng :

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\ . \tag{6}$$

Quy luật phân phối chuẩn hóa được kí hiệu $N(0,1)$.

2.2. Định lí giới hạn trung tâm

Những khái niệm, định lí sau được tham khảo trong [2]

2.2.1. Hàm đặc trưng

a. Định nghĩa

Hàm đặc trưng của biến ngẫu nhiên X là kì vọng toán của biến ngẫu nhiên e^{itx} và được kí hiệu là $\varphi_X(t)$, tức là:

$$\varphi_X(t) = E[e^{itx}] = E(costX) + iE(sintX).$$

Như vậy nếu X là biến ngẫu nhiên rời rạc thì:

$$\varphi_X(t) = \sum_j e^{itx_j} P_j.$$

Còn nếu X là biến ngẫu nhiên liên tục thì:

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx.$$

b. Các tính chất của hàm đặc trưng

Tính chất 1: $|\varphi_X(t)| \leq 1$.

Tính chất 2: Nếu $Y = aX + b$ thì $\varphi_Y(t) = e^{ibt}\, \varphi_X(at)$.

Tính chất 3: Nếu $X_1, X_2, \dots, X_n$ là các biến ngẫu nhiên độc lập thì:

$$\varphi_{X_1+X_2+\dots+X_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t).$$

Tính chất 4: Nếu tồn tại $E|X|^k$ thì hàm đặc trưng $\varphi_X(t)$ cũng tồn tại đạo hàm đến bậc k tại mọi điểm t

Và có:

$$\varphi_X(t) = \sum_{m=0}^{k} \frac{(it)^m}{m!} E[X^m] + o(t^k).$$

Tính chất 5: Nếu $\{F_n(x)\}$ là dãy hàm phân phối xác suất và $\{\varphi_n(t)\}$ là dãy các hàm đặc trưng tương ứng thì điều kiện cần và đủ để $\{F_n(x)\}$ hội tụ yếu (tức là hội tụ tại các điểm $F_n(x)$ liên tục) tới hàm phân bố xác suất $F(x)$ là $\{\varphi_n(t)\}$ tại mọi t đến hàm đặc trưng $\varphi(t)$ tương ứng với $F(x)$.

Những bài toán sau được tham khảo trong [3]

Bài toán 1: Cho biến ngẫu nhiên rời rạc $X \sim B(n,p)$. Tìm $\varphi_X(t)$

Lời giải:

Theo định nghĩa của quy luật $B(n,p)$

$$P_x = C_n^x p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = \overline{0,n}.$$

Nên

$$\varphi_X(t) = E[e^{itx}] = \sum_{x=0}^{n} e^{itx} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} C_n^x (pe^{it})^x (1-p)^{n-x}$$

$$= [pe^{it} + (1-p)]^n.$$

Bài toán 2: Cho biến ngẫu nhiên rời rạc $X \sim P(\lambda)$. Tìm $\varphi_X(t)$

Lời giải:

Theo định nghĩa của quy luật Poisson:

$$P_x = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \qquad x = 0,1,\dots$$

Nên

$$\varphi_X(t) = E[e^{itx}] = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx}e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{(\lambda e^{it})^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Lưu ý:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad |x| < \infty.$$

Bài toán 3: Cho biến ngẫu nhiên liên tục U có phân phối chuẩn hóa $N(0,1)$. Tìm $\varphi_U(t)$

Lời giải:

Theo định nghĩa phân phối chuẩn hóa

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Nên:

$$\varphi_U(t) = E[e^{itu}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu-\frac{u^2}{2}}du.$$

Lấy đạo hàm theo t

$$\varphi'_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} iue^{itu-\frac{u^2}{2}}du = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu}d\left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right)$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{itu}.e^{-\frac{u^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}d(e^{itu})\right] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} ite^{itu}e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$= -t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu-\frac{u^2}{2}}du = -t\varphi_U(t).$$

Như vậy:

$$\varphi'_U(t) = -t\varphi_U(t).$$

Từ đó:

$$\varphi_U(t) = Ce^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Do

$$\varphi_U(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i.0.u}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = 1.$$

Nên $C = 1$, do đó:

$$\varphi_U(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Bài toán 4: Cho biến ngẫu nhiên liên tục X có phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$. Tìm $\varphi_X(t)$

Lời giải:

Do X có phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$ nên:

$$X = \sigma \frac{X - \mu}{\sigma} + \mu = \sigma U + \mu \quad \text{với } U \sim N(0,1).$$

Vậy:

$$\varphi_X(t) = Ee^{itx} = Ee^{it\sigma U + it\mu} = e^{it\mu}\varphi_U(\sigma t) = e^{it\mu}.e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

2.2.2. Định lí Lindenberg-Lewi

Nếu $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập tuân theo một quy luật phân phối xác suất nào đó với kì vọng toán và phương sai hữu hạn:

$$E(X_k) = a; V(X_k) = \sigma^2, \forall k.$$

Thì quy luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên

$$U_n^a = \frac{U_n - E(U_n)}{\sqrt{V(U_n)}} \quad \text{với} \quad U_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

sẽ hội tụ khi $n \to \infty$ tới quy luật chuẩn hóa $N(0,1)$. Tức là:

$$P(U_n^a < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Chứng minh

Theo tính chất của hàm đặc trưng, ta chỉ cần chỉ ra rằng hàm đặc trưng $\varphi_{U_n^a}(t)$ hội tụ đến hàm đặc trưng của phân phối chuẩn hóa là $\varphi_U(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ khi $n \to \infty$.

Xét biến ngẫu nhiên:

$$U_n - E(U_n) = [X_1 - E(X_1)] + [X_2 - E(X_2)] + \dots + [X_n - E(X_n)].$$

Đặt $Y_k = X_k - E(X_k)$.

Ta có: $U_n - E(U_n) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$.

$$E(Y_k) = E[X_k - E(X_k)] = 0, \ \forall k.$$

$$V(Y_k) = E(Y_k^2) - [E(Y_k)]^2 = E(Y_k^2) = \sigma^2 = V(X_k), \ \forall k.$$

Đặt $\varphi(t) = \varphi_{Y_k}(t)$

Theo tính chất 4 của hàm đặc trưng có:

$$\varphi(t) = 1 + \frac{it}{1!}E(Y_k) + \frac{(it)^2}{2!}E(Y_k^2) + o(t^2) = 1 - \frac{t^2}{2}\sigma^2 + o(t^2).$$

Do $U_n - E(U_n) = \sum_{k=1}^{n} Y_k$, nên:

$$\varphi_{U_n - EU_n}(t) = \varphi_{Y_1+Y_2+\dots+Y_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{Y_k}(t) = [\varphi(t)]^n.$$

Ta có:

$$U_n^a = \frac{U_n - E(U_n)}{\sqrt{V(U_n)}}; V(U_n) = V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} VX_k = n\sigma^2.$$

Vậy :

$$U_n^a = \frac{U_n - E(U_n)}{\sigma\sqrt{n}}.$$

Do đó:

$$\varphi_{U_n^a}(t) = \varphi_{U_n - EU_n}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}t\right) = \left[\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left\{1 - \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)\right\}^n$$

$$= \left\{1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}^n.$$

Vì vậy:

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{U_n^a}(t) = \lim_{n\to\infty}\left\{1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n \ln\left\{1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}}$$

Do $\ln\left\{1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\} \sim \left\{-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}$ khi $n \to \infty$, nên

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{U_n^a}(t) = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\,l\,\left\{1\ \ \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{-\frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{\sigma^2 n}\right)\right\}} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

2.3. Một số bài toán thực tế.

Bài toán 5: Xét trò chơi trúng thưởng sau: ghi một số với giá trị 1 đồng, nếu cuối ngày thắng thì được 60 đồng. Số trúng thưởng là một số thuộc tập {00, 01, 02, ….,99}. Tính tiền lãi kì vọng thu được khi buổi sáng người chơi ghi một số.

Lời giải:

Gọi X_i: "Lợi nhuận khi dùng 1 đồng để ghi số thứ i", đơn vị: đồng; $i \in \{00, 01, \dots, 99\}$

Ta có: $X_i \in \{-1; 59\}$

X_i	-1	59
P	$0{,}99$	$0{,}01$

$$\text{Vậy: } EX_i = -1.0{,}99 + 59.0{,}01 = -0{,}4$$

$$EX_i^2 = (-1)^2.0{,}99 + 59^2.0{,}01 = 35{,}8$$

$$VX_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = 35{,}64$$

Bài toán 6: Xét trò chơi trúng thưởng trong bài toán 5. Một người dùng 1000 đồng để ghi 100 số {00, 01, 02, ….,99} vào buổi sáng với chiến lược bất kì. Tính tiền lãi kì vọng thu được lúc cuối ngày khi thông báo giải thưởng.

Lời giải:

Gọi a_i là số đồng để ghi số thứ i, $i \in \{00, 01, 02, \ldots, 99\}$

Ta có: $a_{00} + a_{01} + \cdots + a_{99} = 1000$

Gọi Y là "lợi nhuận thu được"

Ta có $Y = a_{00}X_{00} + a_{01}X_{01} + \cdots + a_{99}X_{99}$

X_i là biến ngẫu nhiên có phân phối như trong bài toán 5.

Ta kiểm tra giả thiết của định lí giới hạn trung tâm: các X_i độc lập, cùng phân phối có kì vọng và phương sai hữu hạn.

Áp dụng định lí giới hạn trung tâm có:

$$Y \sim N\left(\mu = E\left(\sum_{i=00}^{99} a_i X_i\right), \sigma^2 = V\left(\sum_{i=00}^{99} a_i X_i\right)\right).$$

Vậy

$$EY = E\left(\sum_{i=00}^{99} a_i X_i\right) = \sum_{i=00}^{99} a_i EX_i = -0{,}4.\sum_{i=00}^{99} a_i = -0{,}4.1000 = -400.$$

Bài toán 7: Xét trò chơi trúng thưởng trong bài toán 5. Một người sử dụng chiến lược như trong bài toán 6 để chơi trò chơi trúng thưởng trong một tháng (30 ngày). Tính tiền lãi kì vọng thu được vào cuối tháng.

Lời giải:

Gọi Y_i là lợi nhuận khi sử dụng 1000 đồng để ghi các số sổ số ở ngày thứ i, $i \in \{1,2, \ldots, 30\}$

Y_i có phân phối giống phân phối của Y trong bài toán 6.

Gọi Z là tiền lãi thu được sau 1 tháng.

$$Z = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{30}$$

Kiểm tra lại các giả thiết của định lí giới hạn trung tâm: Các Y_i độc lập, cùng phân phối có kì vọng và phương sai hữu hạn.

Áp dụng định lí giới hạn trung tâm có:

$$Z \sim N\left(\mu = E\left(\sum_{i=1}^{30} Y_i\right), \sigma^2 = V\left(\sum_{i=1}^{30} Y_i\right)\right).$$

Vậy:

$$EZ = E\left(\sum_{i=1}^{30} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{30} EY_i = 30.(-400) = -1200.$$

Nhận xét: Ta đã chỉ ra một cách có cơ sở khoa học là khi chơi trò chơi trúng thưởng trên thì người chơi luôn thua lỗ nặng.

3. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày kiến thức cơ bản về định lí giới hạn trung tâm, một trong những định lí quan trọng trong dạy học môn Xác xuất thống kê tại các trường đại học. Bên cạnh trình bày nội dung định lí, bài báo đưa ra những ví dụ minh họa gắn nội dung lí thuyết với bài toán thực tiễn, qua đó sẽ giúp các bạn sinh viên thấy hứng khởi, hiểu được sâu sắc lí do tại sao chúng ta học xác suất. Bài báo có thể được vận dụng trong giảng dạy môn học Xác suất thống kê tại trường đại học.

Tài liệu tham khảo

[1]. Đặng Hùng Thăng – Trần Mạnh Cường, Thống kê cho Khoa học xã hội và Khoa học sự sống, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội, 2019, 80-95.

[2]. Nguyễn Cao Văn – Ngô Văn Thứ - Trần Thái Ninh, Giáo trình Lý thuyết Xác Suất và Thống Kê Toán, 3, NXB Đại Học Kinh Tế Quốc Dân, 2015, 279-285.

[3]. Nguyễn Duy Tiến – Vũ Viết Yên, Lý thuyết xác suất, NXB Giáo Dục, 2001, 187-193.