

KỶ YẾU

KỶ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 28

TRỰC TUYẾN, 23-24/4/2022

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM



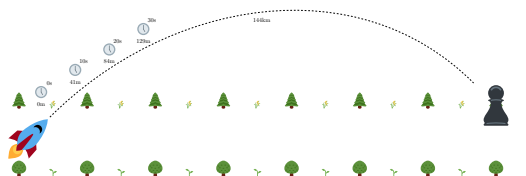
TRƯỜNG ĐH KHOA
HỌC TỰ NHIÊN
ĐHQG HÀ NỘI



6 PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Bài 6.1 (ĐH Đồng Tháp). Một tên lửa được bắn ra từ một bộ phóng tên lửa đặt tại vị trí A đến vị trí B . Thông qua ra-đa, người ta thấy sau khi ra khỏi bộ phóng được 10 giây, 20 giây, 30 giây, quãng đường đi được của tên lửa lần lượt là 41m; 84m và 129m. Biết rằng quãng đường đi của tên lửa được biểu diễn dưới dạng một đa thức có bậc nhỏ nhất thoả mãn các điều kiện trên và khi tên lửa đến vị trí B thì quãng đường đi của tên lửa là 144km.

1. Tìm thời điểm tên lửa đến vị trí B .
2. Tìm vận tốc trung bình của tên lửa và thời điểm mà tên lửa đạt vận tốc bằng vận tốc trung bình.



Bài 6.2 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyền). Tìm hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(x+y) \geq f(x)f(y) \geq 2021^{x+y}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.3 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + xf(y) - xy - x + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 6.4 (ĐH Mở - Địa chất, H. N. Huân). Hãy tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục thoả mãn phương trình

$$f(x + 2020y) = f(x^2 + y^2)f(\cos x \cdot \cos y)$$

với giá trị bất kỳ $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 6.5 (ĐH Mở - Địa chất, H. N. Huân). Hãy tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bị chặn, thuộc lớp C^1 và thoả mãn phương trình $f'(x) = f(x-1)$ với mọi x .

Bài 6.6 (ĐH Trà Vinh, C.H. Hoà). Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thoả điều kiện sau:

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 2f(x) + \frac{3}{x-1}, \forall x \neq 1.$$

Bài 6.7 (ĐH Trà Vinh, P.M. Triển). Xác định hàm số $f(x)$ khả vi liên tục trên đoạn $[0; 1]$ mà $f(1) = ef(0)$ và $\int_0^1 \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 dx \leq 1$.

Từ (1) thay y bởi $f(y)$ ta được:

$$f(f(x) + f(y)) = f(x + f(y)) + xf(f(y)) - xf(y) - x + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Thay (1), (2) vào (4) ta được:

$$\begin{aligned} f(f(x) + f(y)) &= f(x + y) + yf(x) - xy - y + 1 \\ &\quad + x[f(y) + yf(0) - y + 1] - xf(y) - x + 1. \\ &= f(x + y) + yf(x) + xyf(0) - 2xy - y + 2. \end{aligned}$$

Vậy

$$f(f(x) + f(y)) = f(x + y) + yf(x) + xyf(0) - 2xy - y + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Trong (5) hoán vị x và y ta được:

$$f(f(x) + f(y)) = f(x + y) + xf(y) + xyf(0) - 2xy - x + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Từ (5) và (6) suy ra:

$$yf(x) - xf(y) - y + x = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Trong (7) lấy $(x; y) = (0; 1)$ ta được: $f(0) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1$.

Từ (3) suy ra $f(f(0)) = 2$. Từ (7) thay $y = f(0)$ và sử dụng $f(0) = 1; f(f(0)) = 2$ ta được:

$$f(x) - 2x - 1 + x = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thử lại thấy thoả mãn bài toán. Vậy $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 6.4 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huân). Về phải đối xứng với x và y . Từ đó suy ra về trái cũng đối xứng với x và y hay

$$f(x + 2020y) = f(y + 2020x).$$

Đặt $y = -2020x$, ta có $f(0) = f((1 - 2020^2)x)$ với mọi x . Điều đó có nghĩa là $f(x) = C = \text{const}$. Thế vào phương trình đầu, ta thu được $C = C^2$. Tức là $C = 0$ hoặc $C = 1$.

Đáp án $f(x) \equiv 0$ hay $f(x) \equiv 1$.

Bài 6.5 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huân) Rõ ràng f là hàm khả vi liên tục cấp 2 vì từ phương trình suy ra f' là hàm khả vi liên tục. Giả sử $M = \sup_R |f|$.

Ta sẽ chứng minh là $M = 0$ bằng phản chứng. Giả sử $M > 0$. Xét giá trị x thoả mãn $|f(x)| > 3M/4$.