# KỶ YẾU

## KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 28

Trực tuyến, 23-24/4/2022

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN ĐHQG HÀ NỘI

**Bài 2.2** (ĐH Giao thông Vận tải, N.H. Hoàng). Cho $A = (a_{ij})$ là ma trận vuông cấp $2021$ với các phần tử là $a_{ij} = i^2 + j^2 + 2020ij + 2021$ với mọi $i, j = 1, 2, \ldots, 2021$. Hãy tính $\det A$.

**Bài 2.3** (ĐH Hàng Hải Việt Nam, L.T. Hoa). Cho $a_1, a_2, a_3, a_4$ và $b_1, b_2, b_3, b_4$ lần lượt là 4 số chẵn, 4 số lẻ liên tiếp. Tính định thức của ma trận A, biết

$$A = \begin{pmatrix} (a_1+b_1)^3 & (a_1+b_2)^3 & (a_1+b_3)^3 & (a_1+b_4)^3 \\ (a_2+b_1)^3 & (a_2+b_2)^3 & (a_2+b_3)^3 & (a_2+b_4)^3 \\ (a_3+b_1)^3 & (a_3+b_2)^3 & (a_3+b_3)^3 & (a_3+b_4)^3 \\ (a_4+b_1)^3 & (a_4+b_2)^3 & (a_4+b_3)^3 & (a_4+b_4)^3 \end{pmatrix}$$

**Bài 2.4** (ĐH Hàng Hải Việt Nam, L.T. Hoa). Cho ma trận

$$A = [a_{ij}]_{6X6} \text{ với } a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{nếu } i = j \\ 1 \text{ hoặc } 2021 & \text{nếu } i \neq j \end{cases}$$

Chứng minh rằng định thức của ma trận A luôn khác không.

**Bài 2.5** (ĐH Kiến trúc). Cho $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ là hai ma trận thực vuông cấp $n$ thỏa mãn $AB^2 + A = 2AB + I$.

a) Chứng minh rằng $A$ và $B$ là hai ma trận giao hoán.

b) Cho $a_{ij}, b_{ij}$ là các số nguyên với mọi $i, j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. Tính định thức của ma trận $A$.

**Bài 2.6** (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Giả sử $X$ là ma trận thực cỡ $n \times n$ thỏa mãn $X + X^T = I_n$ ($I_n$ là ma trận đơn vị, $X^T$ là ma trận chuyển). Chứng minh rằng $\det X \geq \dfrac{1}{2^n}$.

**Bài 2.7** (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Tính

$$\lim_{n\to+\infty} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \ldots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \ldots & 0 & 1/n! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -n & 1/n! \end{vmatrix}.$$

**Bài 2.8** (ĐH SPKT Vĩnh Long, T.H.N. Nhân). Cho các ma trận $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ thỏa $A.A^T = B.B^T = I$. Chứng minh rằng, nếu $\det(A) \neq \det(B)$ thì $\det(A + B) = 0$.

b) $A.(B-I)^2 = I$, suy ra $\det(A).\ \det(B-I)^2 = 1$. Mặt khác $\det(A), \det(B-I)^2$ là số nguyên và $\det(B-I)^2 = (\det(B-I))^2 \geq 0$. Từ đó suy ra $\det(A) = 1$.

**Bài 2.6** (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Giả sử $Y = X - \frac{1}{2}I_n$. Khi đó $Y = -Y^T$. Vì $Y$ là ma trận phản đối xứng thực nên các giá trị riêng của nó chỉ là phần ảo $ia$. Khi đó các giá trị riêng của $X$ là $\frac{1}{2} + ia$. Vì ma trận là thực nên giá trị riêng chỉ có thể là $\frac{1}{2}$ hoặc là $\frac{1}{2} + ia$. Thế nhưng lúc đó nó cũng có giá trị ảo $\frac{1}{2} - ia$. Chuyển sang cơ sở gồm các véc tơ riêng (đối với ma trận đối xứng, cơ sở này là tồn tại) thì định thức của ma trận không hề thay đổi. Trong cơ sở gồm các véc tơ riêng, định thức bằng tích các giá trị riêng này. Vì

$$\left(\frac{1}{2} + ia\right)\left(\frac{1}{2} - ia\right) = \frac{1}{2^2} + a^2$$

nên $\det X \geq \dfrac{1}{2^n}$.

**Bài 2.7** (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Đặt

$$D_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1/n! \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1/n! \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1/n! \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1/n! \end{vmatrix}.$$

Khi đó

$$D_n = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -n & 1 \end{vmatrix}.$$

Cộng vào dòng đầu tất cả các dòng còn lại, trước đó dòng thứ $i$ nhân với