HỘI NGHỊ TOÀN QUỐC KHOA HỌC TRÁI ĐẤT
VÀ TÀI NGUYÊN VỚI PHÁT TRIỂN BỀN VỮNG (ERSD 2022)

Độ đo xác suất trên C[0,1]

Nguyễn Thế Lâm [1]

[1] *Trường Đại học Mỏ - Địa chất*

TÓM TẮT

Bài báo này có hai phần chính. Phần 1 chỉ ra điều kiện cần và đủ để hai độ đo trên C[0,1] bằng nhau. Phần 2 chỉ ra điều kiện cần và đủ để $\overline{\Gamma}$ là compact với Γ là tập các độ đo xác suất trên C[0,1], C[0,1] là không gian các hàm liên tục trên [0,1]. Trong bài báo có sử dụng các công cụ của lí thuyết độ đo và 2 bổ đề 2.1 và 2.2.

Từ khóa: Độ đo , quá trình ngẫu nhiên , σ - đại số, tập Borel, không gian xác suất.

1. Đặt vấn đề

Ta biết rằng các độ đo xác suất trong không gian các hàm liên tục đóng vai trò quan trọng trong lý thuyết các quá trình ngẫu nhiên và các bài toán kiểm định giả thiết, phi tham số. Nội dung chính của bài báo này là để mô tả các tập con compact yếu của không gian các độ đo xác suất trên các không gian hàm như thế.

Cho Ω, S, P là một không gian xác suất và T là một tập con của đường thẳng thực. Một quá trình ngẫu nhiên có nghĩa là một họ được đánh chỉ số $\xi_t, t \in T$ của các biến ngẫu nhiên nhận giá trị thực trên Ω.

Nói chung, T là một khoảng trên đường thẳng thực. Cho trước $\omega \in \Omega, \varphi_w : t \to \xi_t \ \omega$ là một hàm thực trên T. Nó được gọi là một phép thể hiện của quá trình ngẫu nhiên.

Cho X là không gian các hàm nhận giá trị thực trên T. Với mỗi $t \in T$, ánh xạ $x \to x \ t$ ánh xạ X vào đường thẳng thực. Cho β là σ - đại số nhỏ nhất các tập con của X mà đối với β tất cả các ánh xạ này là đo được với mọi $t \in T$. Nếu $\xi_t : t \in T$ là một quá trình ngẫu nhiên ánh xạ $\varphi : \omega \to \varphi_\omega$ là một ánh xạ đo được từ Ω vào X (tương ứng với các σ - đại số S và β), và do đó ta thu được một độ đo μ trên β bằng cách đặt

$$\mu \ A = P\left[\varphi^{-1} \ A\right] \forall A \in \beta,$$

μ được gọi là độ đo hoặc phân phối tương ứng với quá trình ngẫu nhiên. Đôi khi X, β, μ được gọi là quá trình ngẫu nhiên.

Theo quan điểm ở trên, rõ ràng nghiên cứu các quá trình ngẫu nhiên quy về nghiên cứu các độ đo trên không gian hàm X, β . Tuy nhiên X là không gian các hàm không phù hợp cho các ứng dụng. Tốt hơn là có không gian cơ bản mà trên đó các độ đo được xử lý như một không gian metric tách được hoặc một không gian metric tách được đủ. Trường hợp đơn giản nhưng quan trọng khi ta lấy $T = [0,1]$ và xét tập con $C[0,1]$ của X . $C[0,1]$ là không gian các hàm liên tục trên $[0,1]$.

2. Cơ sở lý thuyết và phương pháp nghiên cứu

Ta thấy rằng $C[0,1]$ là một không gian Banach tách được nếu ta xác định với $x \in C[0,1]$

$$\|x\| = \sup_{0 \le t \le 1} \left| x \ t \right|$$

Với mỗi $x \in C[0,1]$ và $\delta > 0,$ ta định nghĩa

$$\omega_x \ \delta = \sup_{|t' - t''| \le \delta} \left| x \ t' - x \ t'' \right|$$

Bởi vì một hàm liên tục trên $[0,1]$ là liên tục đều, suy ra rằng $\omega_x \ \delta \to 0$ khi $\delta \to 0$ với mỗi x. Ta sẽ viết C thay vì $C[0,1]$. Chú ý rằng cả $x \to \|x\|$ và $x \to \omega_x \ \delta$ là liên tục trên C.

Bây giờ ta sẽ đưa ra một tiêu chuẩn compact của một tập các độ đo xác suất trên C.

Bổ đề 2.1. Cho $A \subseteq C.$ Để $\overline{A}$ là compact cần và đủ là 2 điều kiện sau đồng thời được thỏa mãn:

$(i)\ \sup\limits_{x\in A} |x(0)| < \infty,$

$(ii)\ \lim\limits_{\delta\downarrow 0} \sup\limits_{x\in A} \omega_x(\delta) = 0$

Bổ đề 2.2. Cho Γ là tập các độ đo xác suất trên $C.$ Để $\overline{\Gamma}$ là compact cần và đủ là với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một hằng số $M_\varepsilon > 0$ và một hàm $\omega(\delta,\varepsilon)$ giảm tới 0 khi $\delta \downarrow 0$ sao cho

$$(i)\ \mu\left(x : |x(0)| \le M_\varepsilon\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(ii)\ \mu\left(x : \omega_x(\delta) \le \omega(\delta,\varepsilon)\ \forall\delta\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \forall \mu \in \Gamma$$

3. Kết quả và thảo luận

Định lý 3.1. Lớp β_C các tập con Borel của C trùng với σ - đại số nhỏ nhất các tập con của C mà đối với σ - đại số này các ánh xạ $\pi^t : x \to x(t)$ là đo được $\forall t \in [0,1].$ Nếu μ và ν là 2 độ đo trên C, điều kiện cần và đủ để $\mu = \nu$ là $\mu^{t_1,\dots,t_k} = \nu^{t_1,\dots,t_k} \forall k$ và $t_1, t_2, \dots, t_k \in [0,1].$ Ở đó $\mu^{t_1,\dots,t_k}$ và $\nu^{t_1,\dots,t_k}$ là các độ đo trong không gian vecto k chiều R^k được cảm sinh lần lượt bởi μ và ν thông qua ánh xạ $\pi^{t_1,\dots,t_k} : x \to (x(t_1),\dots,x(t_k)).$

Chứng minh.

Giả sử A là σ - đại số nhỏ nhất các tập con của C mà đối với σ - đại số nay các ánh xạ π^t là đo được với mọi t. Bởi vì mỗi π^t là liên tục trên C suy ra $A \subseteq \beta_C.$ Để chứng minh $\beta_C \subseteq A,$ thật là đủ để chỉ ra rằng A chứa tất cả các tập mở. Bởi vì C là tách được nên mỗi tập mở là hợp đếm được của các hình cầu đóng và bởi vậy nó là đủ để chứng minh rằng A chứa tất cả các hình cầu đóng.

Nếu $a > 0$ là số thực bất kỳ, $x_0 \in C$ và $r_1, r_2, \dots$ là một sự liệt kê các số hữu tỉ trong $(0,1)$, ta có

$$\left(x : \|x - x_0\| \le a\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(x : |x(r_n) - x_0(r_n)| \le a\right)$$

Vế phải của phương trình trên nằm trong A suy ra hình cầu $\left(x : \|x - x_0\| \le a\right) \in A,$ do đó $A = \beta_C.$

Để chứng minh phần thứ 2 ta viết

$$A_{t_1,\dots,t_k} = \left\{\left(\pi^{t_1,\dots,t_k}\right)^{-1}(A) : A \subseteq R^k, A \text{ là tap Borel}\right\}. \bigcup_{k,t_1,\dots,t_k} A_{t_1,\dots,t_k} = F.$$

Hiển nhiên, $\mu^{t_1,\dots,t_k} = \nu^{t_1,\dots,t_k} \forall k$ và $t_1,\dots,t_k \in [0,1]$ chỉ ra rằng $\mu(E) = \nu(E)\ \forall E \in F.$ F là một đại số Boolean sinh ra A bởi vậy ta có $\mu(E) = \nu(E)\ \forall E \in A.$ Điều này chứng minh rằng $\mu = \nu.$

Bổ đề 2.2. Cho Γ là tập các độ đo xác suất trên $C.$ Để $\overline{\Gamma}$ là compact cần và đủ là với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một hằng số $M_\varepsilon > 0$ và một hàm $\omega(\delta,\varepsilon)$ giảm tới 0 khi $\delta \downarrow 0$ sao cho

$$(i)\ \mu\left(x : |x(0)| \le M_\varepsilon\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(ii)\ \mu\left(x : \omega_x(\delta) \le \omega(\delta,\varepsilon)\ \forall\delta\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \forall \mu \in \Gamma$$

Chứng minh.

Giả sử Γ là một tập các độ đo thỏa mãn các điều kiện ở trên.

Với $\varepsilon > 0,$ ta viết

$$A_\varepsilon = \left(x : |x(0)| \le M_\varepsilon\right)$$

$$B_\varepsilon = \{x : \omega_x(\delta) \le \omega(\delta,\varepsilon)\ \forall\delta\}$$

Khi đó $K_\varepsilon = A_\varepsilon \cap B_\varepsilon$ là một tập đóng. Theo bổ đề 2.1, K_ε là compact. Rõ ràng $\mu(K_\varepsilon) > 1-\varepsilon; \forall\mu\in\Gamma,$ suy ra $\overline{\Gamma}$ là compact.

Ngược lại, giả sử $\overline{\Gamma}$ là compact. Khi đó tồn tại một tập compact K_ε sao cho $\mu(K_\varepsilon) > 1-\frac{\varepsilon}{2}\forall\mu\in\Gamma.$

Đặt

$$M_\varepsilon = \sup_{x\in K_\varepsilon}|x(0)|,$$

$$\omega(\delta,\varepsilon) = \sup_{x\in K_\varepsilon}\omega_x(\delta)$$

Theo bổ đề 2.1, $M_\varepsilon < \infty$ và $\omega(\delta,\varepsilon)\downarrow 0.$

Rõ ràng

$$\mu(\{x : |x(0)| \le M_\varepsilon\}) \ge \mu(K_\varepsilon) > 1-\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu(\{x : \omega_x(\delta) \le \omega(\delta,\varepsilon)\ \forall\delta\}) \ge \mu(K_\varepsilon) > 1-\frac{\varepsilon}{2}, \forall\mu\in\Gamma$$

Định lý 3.2. Giả sử Γ là một tập các độ đo xác suất trên C. Để $\overline{\Gamma}$ là compact cần và đủ là các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) Với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại một hằng số M_ε sao cho

$$\mu(\{x : |x(0)| \le M_\varepsilon\}) > 1-\frac{\varepsilon}{2}, \forall\mu\in\Gamma$$

(ii) Với mỗi $\varepsilon > 0$ và $\delta > 0$ tồn tại $\eta = \eta(\varepsilon,\delta) > 0$ sao cho

$$\mu(\{x : \omega_x(\eta) \le \delta\}) > 1-\frac{\varepsilon}{2}, \forall\mu\in\Gamma$$

Chứng minh.

Điều kiện cần:

Giả sử $\overline{\Gamma}$ là compact. (i) vừa được chứng minh trong bổ đề trước.

Đối với (ii) chú ý rằng tồn tại một hàm số $\omega(\delta,\varepsilon)\downarrow 0$ khi $\delta\downarrow 0$ sao cho

$$\mu(\{x : \omega_x(\delta) \le \omega(\delta,\varepsilon)\ \forall\delta\}) > 1-\frac{\varepsilon}{2}, \forall\mu\in\Gamma$$

Ta có thể tìm được $\eta = \eta(\varepsilon,\delta)$ sao cho $\omega(\eta,\varepsilon) \le \delta$

Khi đó hiển nhiên

$$\mu(\{x : \omega_x(\eta) \le \delta\}) > 1-\frac{\varepsilon}{2}, \forall\mu\in\Gamma$$

Điều kiện đủ:

Với mỗi số nguyên $n = 1,2,...$ và $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại $\eta_{\varepsilon,n}$ sao cho nếu $F_{\varepsilon,n} = \left\{x : \omega_x(\eta_{\varepsilon,n}) \le \frac{1}{n}\right\}$ thì $\mu(F_{\varepsilon,n}) > 1-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\forall\mu\in\Gamma.$ Đặt $K_\varepsilon = \{x : |x(0)| \le M_\varepsilon\} \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} F_{\varepsilon,n}$

Hiển nhiên, $\mu(K_\varepsilon) \ge 1-\varepsilon\forall\mu\in\Gamma.$ Nếu $x\in K_\varepsilon,$ thì với mỗi n, $x\in F_{\varepsilon,n}$ bởi vậy tồn tại $\eta_{\varepsilon,n}$ thỏa mãn

$\omega_x(\eta_{\varepsilon,n}) \leq \frac{1}{n}$. Nói cách khác, $\sup\limits_{x \in K_\varepsilon} \omega_x(\eta) \to 0$ khi $\eta \to 0$. Bởi vì $\sup\limits_{x \in K_\varepsilon} |x(0)| \leq M_\varepsilon < \infty$ suy ra K_ε là compact. Do đó $\overline{\Gamma}$ là compact.

4. Kết luận

Trong bài báo đã chỉ ra và chứng minh được điều kiện cần và đủ để hai độ đo trên C[0,1] bằng nhau, chỉ ra và chứng minh được điều kiện cần và đủ để $\overline{\Gamma}$ là compact với Γ là tập các độ đo xác suất trên C[0,1].

Tài liệu tham khảo

[1] Đặng Hùng Thắng, *Mở đầu về lý thuyết xác suất và ứng dụng*, NXB Giáo dục, 1998.

[2] Đặng Hùng Thắng, *Quá trình ngẫu nhiên và tính toán ngẫu nhiên*, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[3] Hoàng Tụy (2005), *Hàm thực và giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[4] Nguyễn Duy Tiến, *Các mô hình xác suất và ứng dụng, phần III Giải tích ngẫu nhiên*, Nhà xuất bản Đại Học Quốc Gia Hà Nội.

[5] K.R. PARTHASARATHY, " Probability measures on metric spaces", Ams Chelsea Publishing, American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.

[6] Onno Van Gaans, " Probability measures on metric spaces".

ABSTRACT

Probability measures on C[0,1]

Nguyen The Lam[1]

[1] *HaNoi University of Mining and Geology*

The article has 2 main parts. Part 1 shows the necessary and sufficient conditions for the two measures on C[0,1] to be equal. Part 2 shows the necessary and sufficient conditions for $\overline{\Gamma}$ to be compact, where Γ be a set of probability measures on C[0,1], C[0,1] is a space of functions that are continuous on [0,1]. In the article, tools of measure theory and 2 lemmas 2.1 and 2.2 are used.

Keywords: Measure; stochastic process; σ - algebra; Borel set; probability space.