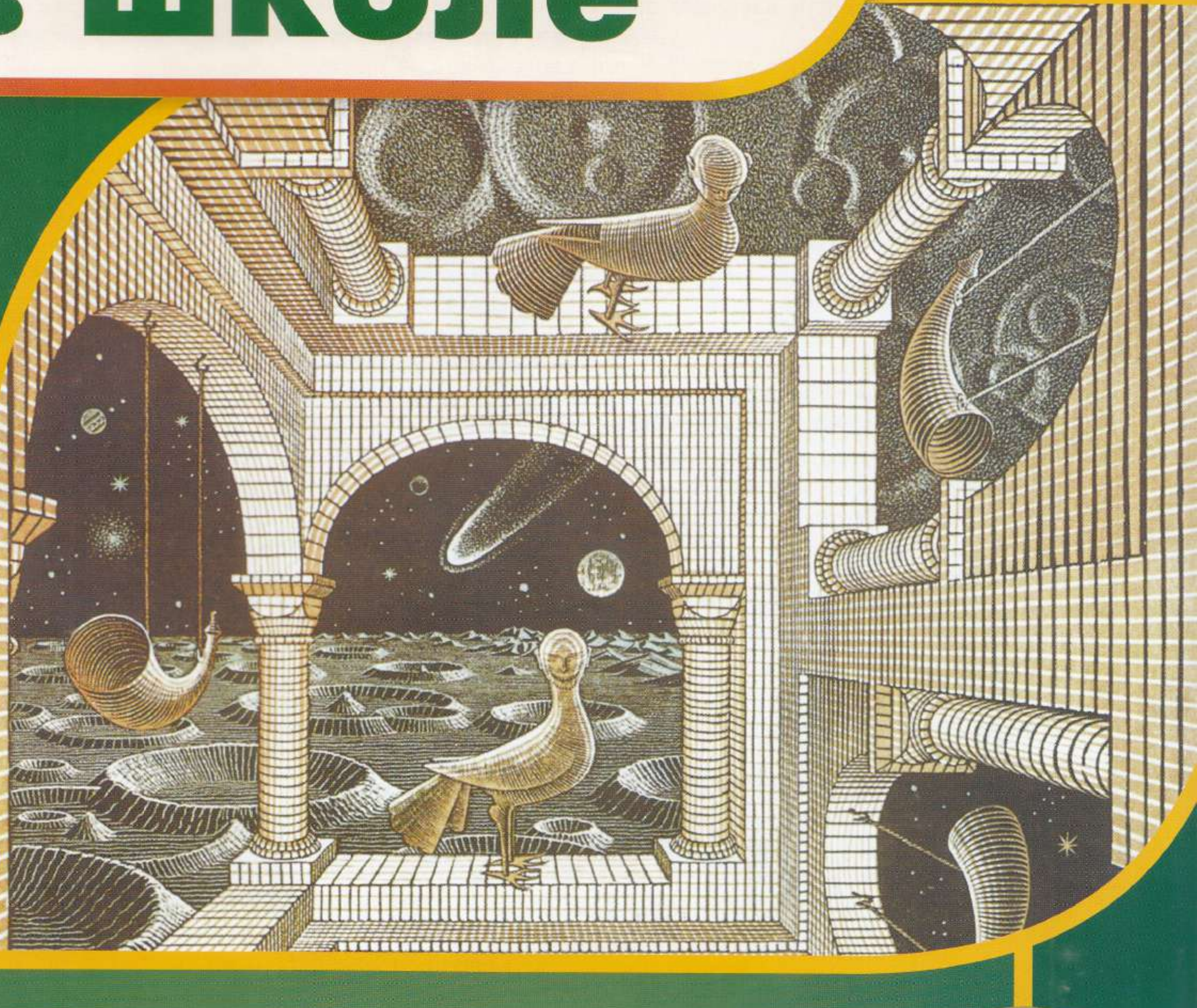
научно-теоретический и методический журнал

2 2022

МАТЕМАТИКА в школе

ISSN 0130-9358



Традиция составления программ по математике утрачена

Олимпиада по математике «Покори Воробьёвы горы!» – 2020–2021

Вьетнамский ЕГЭ в 2021 году

МАТЕМАТИКА в школе

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ И МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

2/2022

Министерство просвещения Российской Федерации
ООО «Школьная Пресса»
Издаётся с мая 1934 г.
Периодичность – 8 номеров в год

В НОМЕРЕ:

У НАС В ГОСТЯХ

ХРОНИКИ

Журнал включён в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени кандидата наук, на соискание учёной степени доктора наук.
Журнал зарегистрирован в национальной библиографической базе данных научного цитирования РИНЦ.
Статьям журнала присваивается идентификатор DOI

ООО «Школьная Пресса»
Корреспонденцию направлять: 127254, Москва, а/я 62
Телефоны: 8(495) 619-52-87, 619-83-80
E-mail: matematika@schoolpress.ru
Интернет http://www.школьнаяпресса.рф

Журнал зарегистрирован Министерством РФ по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-33044 от 04 сентября 2008 г.

Формат 84×108/16
Усл. п. л. 5,0. Изд. № 3633. Заказ К-2908

Отпечатано в АО «ИПК «Чувашия»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 13

В оформлении обложки использован фрагмент гравюры Маурица Эшера «Другой мир», 1947 г.

127254, г. Москва, а/я 62.

RA658523651RU

0,168

Куда: apartmen 606, house 184,
Hoang Quoc Viet Street,
Ha Noi, Viet Nam, +84975 890 248

Кому: Hoang Ngu Huan

ВЬЕТНАМСКИЙ ЕГЭ В 2021 ГОДУ

Хоанг Нгы Хуан,
Ханойский горно-геологический университет;
e-mail: huanhoangngu@mail.ru

Hoang Ngu Huan,
Hanoi University of mining and geology (HUMG);
e-mail: huanhoangngu@mail.ru

Ключевые слова: Вьетнам, аналог ЕГЭ, математика, задания и решения

Keywords: Vietnam, analogue of the Unified State Exam, mathematics, problems and solutions

Аннотация: целью данной статьи является знакомство русскоязычных читателей с одним из четырёх аналогичных вариантов 2021 г. вьетнамского аналога ЕГЭ

Abstract: the purpose of this article is to familiarize Russian-speaking readers with one of four similar options for the 2021 Vietnamese equivalent of the USE

DOI:

Для начала кратко опишем систему школьного образования во Вьетнаме. Дети начинают ходить в школу с 6-летнего возраста, что на год раньше, чем это принято в России. Система школьного образования разделена на три ступени: начальная школа – с 1-го по 5-й класс, средняя школа включает 4 класса (с 6-го по 9-й), и наконец, старшая школа – это ещё 3 класса (10-й, 11-й и 12-й). Таким образом, полный срок обучения в школе составляет 12 лет.

Исторически сложилось так, что почти 100 лет Вьетнам был колонией Франции. За это время Франция создала систему образования, чтобы готовить специалистов для своего управления во Вьетнаме. Это был первый кирпич в фундаменте системы вьетнамского математического образования.

В 1945 г. Вьетнам получил независимость и начал выстраивать свою собственную систему образования. Во времена холодной войны СССР выступил в качестве союзника Вьетнама, и в значительной степени повлиял на дальнейшее формирование образовательной системы. В то время СССР помог Вьетнаму подготовить много специалистов, в том числе и математиков. Это привело к тому, что сейчас вьетнамская система математического образования очень похожа на российскую.

По сравнению с другими странами качество математического образования России и Вьетнама достаточно высокое. Школьники обеих стран хорошо владеют математическими знаниями, что подтверждается призовыми местами на международных математических олимпиадах. Так, в 2021 г. на олимпиаде в Санкт-Петербурге все 6 участников из Вьетнама получили медали, в том числе одну золотую, две серебряные и три бронзовые.

Как и в России, вьетнамские школьники после окончания обучения должны сдавать ЕГЭ, по результатам которого они могут стать студентами университетов и институтов. Вьетнамский аналог ЕГЭ по математике включает в себя 50 задач тестового типа. За каждый верный ответ школьники получают по 0,2 балла, значит, за весь экзамен можно получить максимум 10 баллов. Всего предлагается 4 различных варианта ЕГЭ, на решение одного варианта отводится 90 минут без учёта времени на раздачу экзаменационных бланков.

Ниже приведены все 50 задач с ответами 101-го варианта вьетнамского аналога ЕГЭ 2021 г.

1. Множеством решений неравенства $3^x < 2$ является

A. $(-\infty; \log_3 2)$. **B.** $(\log_3 2; +\infty)$.

C. $(-\infty; \log_2 3)$. **D.** $(\log_2 3; +\infty)$.

Решение. $3^x < 2 \Leftrightarrow x < \log_3 2$.

Ответ: A.

2. Если $\int_1^4 f(x)\mathrm{d}x = 3$ и $\int_1^4 g(x)\mathrm{d}x = -2$, то $\int_1^4 [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$ равен

A. –1. **B.** –5. **C.** 5. **D.** 1.

Ответ: C.

3. В пространстве $Oxyz$, задана сфера (S) с центром в точке $I(1; -4; 0)$ и радиусом, равным 3. Уравнением (S) является

A. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + x^2 = 9$.

B. $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + x^2 = 9$.

C. $(x - 1)^2 + (y + 4)^2 + x^2 = 3$.

D. $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 + x^2 = 3$.

Ответ: B.

4. В пространстве $Oxyz$ задана прямая d, проходящая через точку $M(3; -1; 4)$ и имеющая направляющий вектор $\vec{u} = (-2; 4; 5)$. Уравнением d является

A. $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 - t \\ z = 5 + 4t. \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t. \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 4 + 5t. \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 4t \\ z = 4 + 5t. \end{cases}$

Ответ: D.

5. Задана функция $y = f(x)$ с таблицей исследования её производной (рис. 1):

x	$-\infty$		-2		-1		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Рис. 1

Количество критических точек этой функции равно

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Ответ: D.

6. Графиком какой из перечисленных ниже функций является кривая, изображённая рисунке 2?

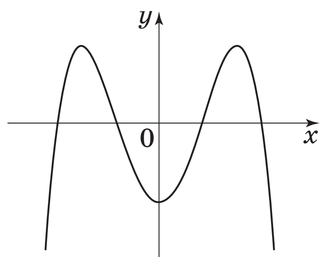


Рис. 2

A. $y = -2x^4 + 4x^2 - 1$.

B. $y = x^3 + 3x - 1$.

C. $y = 2x^4 - 4x^2 - 1$.

D. $y = x^3 - 3x - 1$.

Решение. Для графика функции осью симметрии является Oy, поэтому варианты ответов B и D исключаются. По рисунку 2 видно, что $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$.

Ответ: A.

7. График функции $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ пересекает вертикальную ось в точке с ординатой, равной

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** –3.

Р е ш е н и е. Обозначим через $M(x_M; y_M)$ точку пересечения графика функции $y = -x^4 + 4x^2 - 3$ и оси Oy. Имеем $x_M = 0 \Rightarrow y_M = -3$.

О т в е т: D.

8. Пусть n – произвольное натуральное число, $n \geq 4$. Какая из перечисленных формул верна?

A. $A_n^4 = \dfrac{(n-4)!}{n!}$. **B.** $A_n^4 = \dfrac{4!}{(n-4)!}$.

C. $A_n^4 = \dfrac{n!}{4!(n-4)!}$. **D.** $A_n^4 = \dfrac{n!}{(n-4)!}$.

О т в е т: D.

9. Действительная часть комплексного числа $z = 5 - 2i$ равна

A. 5. **B.** 2. **C.** –5. **D.** –2.

О т в е т: A.

10. На интервале (0 +∞), производная функции $y = x^{\frac{5}{2}}$ равна

A. $y' = \dfrac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$. **B.** $y' = \dfrac{2}{5}x^{\frac{3}{2}}$.

C. $y' = \dfrac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$. **D.** $y' = \dfrac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

О т в е т: C.

11. Задана функция $f(x) = x^2 + 4$. Какое из перечисленных утверждений верно?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = 2x + C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = x^2 + 4x + C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = \dfrac{x^3}{3} + 4x + C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = x^3 + 4x + C$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся таблицей интегралов:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int (x^2 + 4)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 4x + C.$$

О т в е т: C.

12. В пространстве $Oxyz$, задана точка $A(-2; 3; 5)$. Координатами вектора $\overrightarrow{OA}$ являются

A. (–2; 3; 5). **B.** (2; –3; 5).
C. (–2; –3; 5). **D.** (2; –3; –5).

Р е ш е н и е.

$$\overrightarrow{OA} = (x_A - x_O;\ y_A - y_O;\ z_A - z_O) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} = (-2; 3; 5).$$

О т в е т: A.

13. Дана функция $y = f(x)$ с таблицей исследования её производной (рис. 3):

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		–	0	+	0	–	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	5	↘	$-\infty$

Рис. 3

Минимальным значением функции является

A. –1. **B.** 5. **C.** –3. **D.** 1.

Р е ш е н и е. По таблице исследования производной функции видно, что $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс в точке $x = -1$, следовательно, это точка минимума. Значение функции в данной точке равно –3.

О т в е т: C.

14. Дана функция $y = f(x)$ с графиком, представленным ниже (рис. 4).

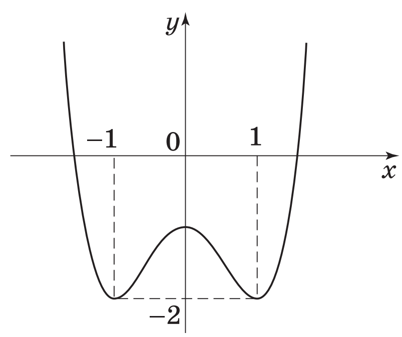


Рис. 4

На каком из перечисленных интервалов функция монотонно убывает?

A. (0; 1). **B.** (–∞; 0). **C.** (0; +∞). **D.** (–1; 1).

О т в е т: A.

15. Решением уравнения $\log_3(5x) = 2$ является

A. $x = \frac{8}{5}$. **B.** $x = 9$. **C.** $x = \frac{9}{5}$. **D.** $x = 8$.

Р е ш е н и е.

$$\log 3(5x) = 2 \Leftrightarrow 5x = 3^2 \Leftrightarrow x = \frac{9}{5}.$$

О т в е т: C.

16. Если $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 4$, то $\int\limits_0^3 3f(x)\mathrm{d}x$ равен

A. 36. **B.** 12. **C.** 3. **D.** 4.

Р е ш е н и е. Используем свойство линейности определённого интеграла:

$$\int_0^3 3\cdot f(x)\mathrm{d}x = 3\cdot\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3\cdot 4 = 12.$$

О т в е т: B.

17. Чему равен объём куба с длиной стороны $5a$?

A. $5a^3$. **B.** a^3. **C.** $125a^3$. **D.** $25a^3$.

Р е ш е н и е. Объём куба равен

$$V = (5a)^3 = 5^3 \cdot a^3 = 125a^3.$$

О т в е т: C.

18. Областью определения функции $y = 9^x$ является

A. $\mathbf{R}$. **B.** $[0; +\infty)$. **C.** $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. **D.** $(0; +\infty)$.

Р е ш е н и е. Показательная функция $y = a9^x$ с основанием $a > 0$, $a \neq 1$ определена на всей числовой прямой.

О т в е т: A.

19. По какой из перечисленных формул вычисляется площадь сферы S с радиусом R?

A. $S = 16\pi R^2$. **B.** $y = 4\pi R^2$.

C. $S = \pi R^2$. **D.** $S = \frac{4}{3}\pi R^3$.

О т в е т: B.

20. Вертикальной асимптотой функции $y = \frac{2x-1}{x-1}$ является прямая

A. $x = 1$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Поскольку $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{x-1} = +\infty$, график функции $y = \frac{2x-1}{x-1}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 1$.

О т в е т: A.

21. Известно, что $a > 0$ и $a \neq 1$, чему равен $\log_a \sqrt[4]{a}$?

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** -4.

Р е ш е н и е. Так как $a > 0$ и $a \neq 1$, выражение $\log_a \sqrt[4]{a}$ имеет смысл. Воспользуемся свойствами логарифма:

$$\log_a \sqrt[4]{a} = \log_a a^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_a a = \frac{1}{4}.$$

О т в е т: B.

22. Дана пирамида с площадью основания $B = 5a^2$ и высотой $h = a$. Чему равен её объём?

A. $\frac{5}{6}a^3$. **B.** $\frac{5}{2}a^3$. **C.** $5a^3$. **D.** $\frac{5}{3}a^3$.

Р е ш е н и е. Объём пирамиды находится по формуле $V = \frac{1}{3}S\cdot h$, где S – площадь основания, h – высота. В данном случае

$$V = \frac{1}{3}B\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 5a^2\cdot a = \frac{5}{3}a^3.$$

О т в е т: D.

23. В пространстве $Oxyz$, задана плоскость (P) : $3x - y + 2z - 1 = 0$. Какой из перечисленных векторов является её нормальным вектором?

A. $\overrightarrow{n_1} = (-3;1;2)$. **B.** $\overrightarrow{n_1} = (3;-1;2)$.

C. $\overrightarrow{n_1} = (3;1;2)$. **D.** $\overrightarrow{n_1} = (3;1;-2)$.

Р е ш е н и е. Если плоскость задана общим уравнением вида $Ax + By + Cz + D = 0$, то её нормальным вектором будет

$$\overrightarrow{n_1} = (A;B;C).$$

О т в е т: B.

24. Дан цилиндр с радиусом основания $r = 6$ и высотой $h = 3$. Чему равен его объём?

A. 108π. **B.** 36π **C.** 18π. **D.** 54π.

Р е ш е н и е. $V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6^2 \cdot 3 = 108\pi$.

О т в е т: A.

25. Даны два комплексных числа $z = 4 + 2i$ и $w = 3 - 4i$. Чему равна их сумма $z + w$?

A. $1 + 6i$. **B.** $7 - 2i$.

C. $7 - 2i$. **D.** $-1 - 6i$.

Решение.

$$z + w = 4 + 2i + 3 - 4i = 7 - 2i.$$

Ответ: B.

26. В геометрической прогрессии $(u^n) \cdot u_1 = 3$ и $u_2 = 9$. Чему равен её знаменатель?

A. –6. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** 6.

Решение. $q = \frac{u_2}{u_1} = 3.$

Ответ: C.

27. Дана функция $f(x) = e^x + 2$. Какое из перечисленных ниже утверждений верно?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x = e^x - 2 + C.$

B. $\int f(x)\mathrm{d}x = e^x + 2x + C.$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x = e^x + C.$

D. $\int f(x)\mathrm{d}x = e^x - 2x + C.$

Решение.

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int (e^x - 2)\mathrm{d}x =$$

$$= \int e^x\mathrm{d}x + \int 2\mathrm{d}x = ex + 2x + C.$$

Ответ: B.

28. На плоскости задана точка $M(-3; 4)$. Какое из перечисленных комплексных чисел она изображает?

A. $z_2 = 3 + 4i$. **B.** $z_3 = -3 + 4i$.

C. $Z_4 = -3 - 4i$. **D.** $z_1 = 3 - 4i$.

Решение. Комплексное число $z = x + yi$ на плоскости изображается точкой с координатами $(x; y)$.

Ответ: B.

29. На рисунке 5 изображён график функции $y = \frac{x+a}{x+1}$ (a – вещественное число, $a \neq 1$).

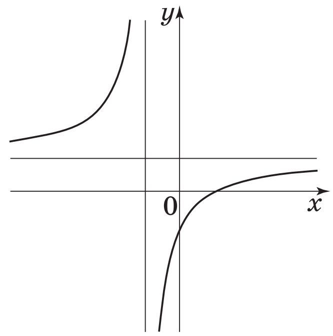


Рис. 5

Какое из перечисленных утверждений верно?

A. $y' < 0,\ \forall x \neq 1$. **B.** $y' > 0,\ \forall x \neq -1$.

C. $y' < 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$. **D.** $y' > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}$.

Решение. Областью определения функции $y = \frac{x+a}{x+1}$ будет множество $D = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$. По рисунку видно, что эта функция монотонно возрастает на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$. Следовательно, $y' > 0,\ \forall x \neq -1$.

Ответ: B.

30. В коробке имеется 12 шаров: 5 красных и 7 синих. Наудачу выбирают 3 шара. Чему равна вероятность того, что все 3 шара синие?

A. $\frac{7}{44}$. **B.** $\frac{2}{7}$. **C.** $\frac{1}{22}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Решение. Порядок извлечения шаров из коробки не важен, поэтому используем формулу числа сочетаний. Число способов выбрать три шара из 12 равно $n(\Omega) = C_{12}^3 = 220,$ событие «получить три синих шара» имеет количество элементов $n(A) = C_{72}^3 = 35.$ Вероятность находится как $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{7}{44}.$

Ответ: A.

31. В какой точке отрезка [0; 3] функция $y = -x^3 + 3x$ достигает своего наибольшего значения?

A. $x = 0$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Р е ш е н и е. $y = f(x) = -x^3 + 3x \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3$.

Найдём стационарные точки функции:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \notin [0;3]. \end{array}\right.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка и в стационарной точке:

$f(0) = 0$; $f(1) = 2$; $f(3) = -18$.

Итак, функция $y = -x^3 + 3x$ достигает наибольшего значения на отрезке [0; 3] в точке $x = 1$.

О т в е т: C.

32. В пространстве $Oxyz$ даны точка $M(-1; 3; 2)$ и плоскость $(P) : x - 2y + 4z + 1 = 0$. Какое из перечисленных уравнений задает прямую, проходящую через точку M перпендикулярно (P)?

A. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$.

B. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z+2}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z+2}{4}$.

D. $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-2}{4}$.

Р е ш е н и е. Нормальный вектор плоскости (P) для прямой будет являться направляющим вектором. Его координаты $\overrightarrow{n_p}(1;-2;4)$.

Прямая, проходящая через точку $M(x_M; y_M; z_M)$ с направляющим вектором $\overrightarrow{n_p}(A;B;C)$, имеет уравнение

$$\frac{x - x_M}{A} = \frac{y - y_M}{B} = \frac{z - z_M}{C}.$$

Итак, уравнение искомой прямой

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{4}.$$

О т в е т: D.

33. Основанием пирамиды $SABC$ (рис. 6) является равнобедренный прямоугольный треугольник (прямой угол B): $AB = 2a$ и SA ортогонально основанию. Чему равно расстояние от вершины C до плоскости (SAB)?

A. $\sqrt{2a}$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $2\sqrt{2a}$.

Р е ш е н и е.

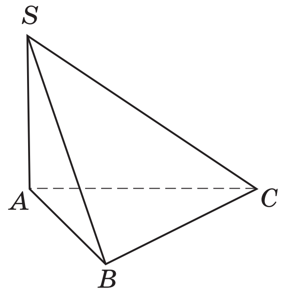


Рис. 6

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp BC \\ SA \perp BC \end{array}\right\} \Leftrightarrow BC \perp (SAB).$$

Искомое расстояние:

$d(C; (ABC)) = BC = AB = 2a$.

О т в е т: B.

34. В пространстве $Oxyz$, даны две точки $A(1; 0; 0)$ и $B(4; 1; 2)$. Плоскость, проходящая через A перпендикулярно AB имеет уравнение

A. $3x + y + 2z - 17 = 0$.

B. $3x + y + 2z - 3 = 0$.

C. $5x + y + 2z - 5 = 0$.

D. $5x + y + 2z - 25 = 0$.

Р е ш е н и е. Найдём координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (3;1;2)$. Для искомой плоскости он будет нормальным вектором: $\overrightarrow{n_{(P)}} = (3;1;2)$. Уравнение плоскости, проходящей через A перпендикулярно AB, имеет вид $3(x + 1) + y + 2z = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 2z - 3 = 0$.

О т в е т: B.

35. Дано комплексное число z, удовлетворяющее условию $iz = 5 + 4i$. Сопряженным к z является

A. $\overline{z} = 4 + 5i$. **B.** $\overline{z} = 4 - 5i$.

C. $\overline{z} = -4 + 5i$. **D.** $\overline{z} = -4 - 5i$.

Р е ш е н и е. По условию $iz = 5 + 4i \Rightarrow$ $\Rightarrow z = \dfrac{5+4i}{i} \Rightarrow \overline{z} = 4 + 5i$.

Ответ: А.

36. Дана прямая призма $ABCA'B'C'$, все рёбра которой равны между собой (рис. 7). Чему равен угол между прямыми AA' и BC'?

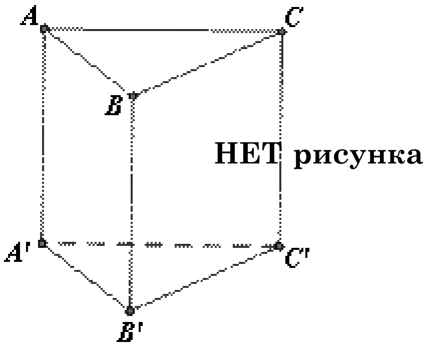


Рис. 7

A. 30°. **B.** 90°. **C.** 45°. **D.** 60°.

Решение.

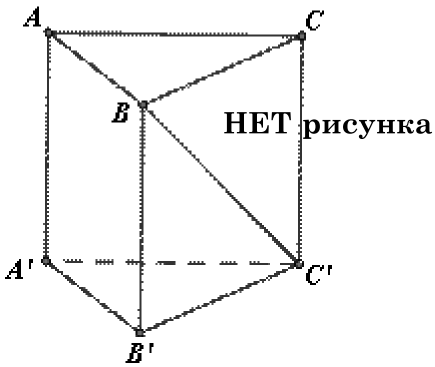


Рис. 8

Проведём прямую BC', она лежит в плоскости грани $BB'C'C$ (рис. 8).

Поскольку $AA' \parallel BB'$, имеет место равенство углов

$$(\widehat{AA', BC'}) = (\widehat{BB', BC'}) = \angle B'BC.$$

Треугольник $B'BC$ является прямоугольным ($\angle BB'C = 90°$) и равнобедренным ($BB' = B'C'$), значит, искомый $\angle B'BC = 45°$.

Ответ: С.

37. Для всех a, b, удовлетворяющих уравнению $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, какое из перечисленных утверждений верно?

A. $a^3b = 64$. **B.** $a^3b = 36$.

C. $a^3 + b = 64$. **D.** $a^3 + b = 64$.

Решение. $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2(a^3b) = 6 \Leftrightarrow a^3b = 26 \Leftrightarrow a^3b = 64$.

Ответ: А.

38. Если $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = 5$, то чему равен интеграл $\int_0^2 [2f(x) - 1]\mathrm{d}x = ?$

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 12.

Решение.

$$\int_0^2 [2f(x) - 1]\mathrm{d}x = \int_0^2 2f(x)\mathrm{d}x - \int_0^2 1\mathrm{d}x = 8.$$

Ответ: А.

39. Дана функция

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 \text{ при } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 \text{ при } x < 1. \end{cases}$$

Пусть F– первообразная f на $\boldsymbol{R}$, удовлетворяющая условию $F(0) = 2$. Чему равно значение выражения $F(-1) + 2F(2)$?

A. 27. **B.** 29. **C.** 12. **D.** 33.

Решение. Найдём первообразную функции $f(x) = \begin{cases} 2x + 5 \text{ при } x \geq 1 \\ 3x^2 + 4 \text{ при } x < 1. \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + C_1, \text{при } x \geq 1 \\ x^3 + 4x + C_2, \text{при } x < 1. \end{cases}$$

Из условия $F(0) = 2$ находим значение константы $C_2 = 2$.

Первообразная $F(x)$ должна быть непрерывна на $\boldsymbol{R}$, а значит, её односторонние пределы в точке $x = 1$ должны существовать и быть равными:

$$\lim_{x\to 1+} F(x) = \lim_{x\to 1-} F(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}(x^2 + 5x + C_1) = \lim_{x\to 1^-}(x^3 + 4x + 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 5 + C_1 = 1 + 4 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C_1 = 1.$$

Итак, $F(-1) + 2F(2) = ((-1)^3 + 4 \cdot (-1) + 2) +$
$+ 2(2^2 + 5 \cdot 2 + 1) = -3 + 2 \cdot 15 = 27$.

Ответ: А.

40. Сколько существует целых чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$(3^{x^2}-9^x)\left[\log_3\left(x+25\right)-3\right]\le 0?$$

A. 27. **B.** Бесконечно много.

C. 26. **D.** 25.

Р е ш е н и е. Область определения неравенства $x > -25$.

Рассмотрим функцию

$$A(x)=(3^{x^2}-9x)[\log_3(x+25)-3],\ \ x>-25,$$

найдём её нули:

$$3^{x^2}-9x=0 \Leftrightarrow x=0 \Leftrightarrow x=2$$

или

$$\log_3(x+25)-3=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Для функции $A(x)$ составим таблицу (рис. 9):

x	-25		0		2		$+\infty$
$A(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	

Рис. 9

По таблице видно, что

$$A(x)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ -25<x\le 0 \end{array}\right. \Rightarrow\ x\in\{-24;-23;\ldots;$$

$0; 2\}$ (рассматриваем только целые значения x). Вывод: существует 26 целочисленных решений неравенства.

О т в е т: C.

41. На рисунке 10 показан график кубической функции $y = f(x)$. Сколько действительных корней имеет уравнение $f(f(x)) = 1$?

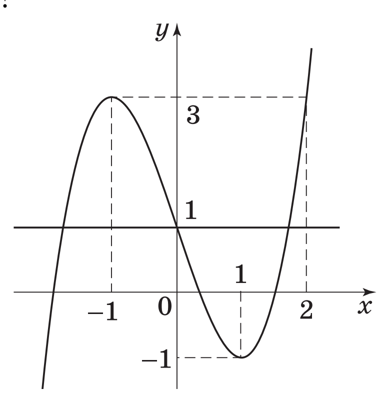


Рис. 10

A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 7.

Р е ш е н и е. График функции (рис. 11) пересекает прямую $y = 1$ в точках с абсциссами x_1 и x_2.

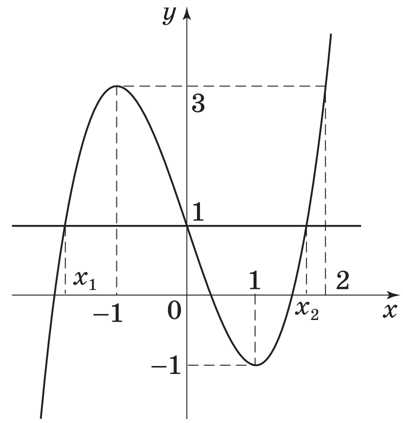


Рис. 11

Сложная функция $f(f(x))$ принимает значение 1 в трёх точках:

$$f(f(x))=1 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ll} f(x)=x_1 \quad \text{v`a} \quad x_1<-1 & (1) \\ f(x)=0 & (2) \\ f(x)=x_2 \quad \text{v`a} \quad 1<x_2<2 & (3) \end{array}\right.$$

Уравнение (1) имеет ровно одно решение, поскольку будет одна точка пересечения графика функции $y = f(x)$ с прямой $y = x_1$ ($x_1 < 1$), каждое из уравнений (2) и (3) имеет по 3 различных решения, итого – 7 решений.

О т в е т: D.

42. Разрезав конус (N) плоскостью, проходящей через его вершину и образующей с плоскостью, содержащейся основание, угол в 60°, получили сечение в виде равностороннего треугольника, сторона которого равна $4a$. Чему равна площадь боковой поверхности (N) (рис. 12)?

A. $8\sqrt{7}\pi a^2$. **B.** $4\sqrt{13}\pi a^2$.

C. $8\sqrt{13}\pi a^2$. **D.** $4\sqrt{7}\pi a^2$.

Р е ш е н и е.

Пусть I – центр основания конуса. Сечение конуса – треугольник SBA. Точка

M – середина отрезка AB. По условию $\angle SMI = 60°$.

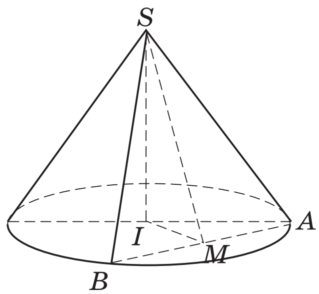


Рис. 12

Площадь боковой поверхности конуса находится по формуле $S_{\text{БП}} = \pi rl$, где r – радиус основания IA, l – длина образующей SA.

ΔSBA – равнобедренный,

$$SA = SB = 4a \Rightarrow SM = \frac{4a\sqrt{3}}{2} = 2a\sqrt{3}.$$

Из ΔSMA по теореме Пифагора

$$MA = \sqrt{SA^2 - SM^2} = \sqrt{(4a)^2 - (2a\sqrt{3})^2} =$$

$$= \sqrt{16a^2 - 12a^2} = 2a.$$

ΔSIM – прямоугольный, найдём его стороны:

$$SI = SM \cdot \sin\angle SMI = 2a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a,$$

$$IM = SM \cdot \cos\angle SMI = 2a\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = a\sqrt{3}.$$

Из ΔIMA по теореме Пифагора

$$IA = \sqrt{IM^2 + MA^2} = \sqrt{3a^2 + 2(2a)^2} = a\sqrt{7}.$$

Искомая площадь боковой поверхности

$$S_{\text{БП}} = \pi rl = \pi a\sqrt{7} \cdot 4a = 4\sqrt{7}\pi a^2.$$

Ответ: D.

43. На множестве комплексных чисел дано уравнение $z^2 - 2(m + 1)z + m^2 = 0$ (m – действительный параметр). Сколько существует возможных значений m, чтобы данное уравнение имело решение z_0, удовлетворяющее условию $|z_0| = 7$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Решение. Найдём дискриминант квадратного уравнения:

$$D = 4(m + 1)^2 - 4m^2 = 8m + 4.$$

1) Данное уравнение будет иметь действительные корни, если $D \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$. В этом случае модуль будет раскрываться по правилам для действительных чисел: $|z_0| = 7 \Leftrightarrow z_0 = \pm 7$. Подставим эти корни в уравнение и найдём соответствующие значения m.

$$z_0 = 7{:}\ m^2 - 14m + 35 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 7 \pm \sqrt{14}.$$

$$z_0 = -7{:}\ m^2 + 14m + 63 = 0.$$

Данное уравнение относительно m не имеет действительных корней.

2) Если $D < 0$, то исходное уравнение имеет два корня z_1 и z_2, являющихся комплексно сопряжёнными. Параметр m при этом удовлетворяет условию $m < -\frac{1}{2}$.

$z_2 = \overline{z_1}$, $|z_1| = |z_2| = 7$. По теореме Виета $z_1 z_2 = |z_1|^2 = m^2 = 7^2$, отсюда $m = 7$ (не удовлетворяет условию) или $m = -7$ (удовлетворяет).

Таким образом, мы получили три возможных значения действительного параметра m: $m = 7 \pm \sqrt{14}$ и $m = -7$.

Ответ: B.

44. Рассмотрим комплексные числа z, w, удовлетворяющие условиям $|z| = 1$ и $|w| = 2$. Если выражение $|z + \overline{iw} - 6 - 8i|$ достигает наибольшего значения, то чему равно $|z - w|$?

A. $\frac{\sqrt{221}}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\frac{\sqrt{29}}{5}$.

Решение. По условию

$$|w| = 2 \Rightarrow |\overline{iw}| = 2,\ |z + \overline{iw}| \leq |z| + |\overline{iw}| = 3,$$

$$P = |z + \overline{iw} - 6 - 8i| \geq |-6 - 8i| - |z + \overline{iw}| =$$

$$= 10 - 3 = 7.$$

$P_{\min} = 7$, когда

$$\begin{cases} z = k\overline{iw}, (k \geq 0) \\ -6 - 8i = h(z + \overline{iw}), (h \leq 0) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=\dfrac{1}{2} \\ h=-\dfrac{10}{3} \\ z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i \\ \bar{w}=\dfrac{8}{5}-\dfrac{6}{5}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i \\ w=\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i. \end{cases}$$

Отсюда, $|z-w|=\left|\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\left(\dfrac{8}{5}+\dfrac{6}{5}i\right)\right|=\dfrac{\sqrt{29}}{5}$.

Ответ: D.

45. В пространстве $Oxyz$ задана прямая d: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ и плоскость (P):

$$x + 2y + z - 4 = 0.$$

Какая из перечисленных прямых является ортогональной проекцией d на (P)?

A. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+2}{-4}$.

B. $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z+2}{1}$.

C. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-4}$.

D. $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$.

Решение. Найдём координаты точки A пересечения прямой d и плоскости (P).

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1} \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \Rightarrow A(0;1;2) \\ z=2. \end{cases}$$

Точка $B(1;\ 2;\ 1) \in d$. Пусть H – проекция точки B на плоскость (P), тогда уравнение прямой BH имеет вид:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+t. \end{cases}$$

Поскольку $H = BH \cap (P)$, координаты точки H удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=1+t \\ x+2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-\dfrac{1}{3} \\ x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{4}{3} \\ z=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow \overline{AH}=\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};-\dfrac{4}{3}\right).$$

Обозначим через d' ортогональную проекцию прямой d на плоскость (P). Прямая d' проходит через точки A и $H \Rightarrow$ её направляющим вектором является $\vec{u}=(2;1;-4)$.

Итак, уравнение прямой, проходящей через точку $A(0;\ 1;\ 2)$ в направлении вектора $\vec{u}=(2;1;-4)$, имеет вид:

$$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{x-2}{-4}.$$

Ответ: C.

46. Имеется функция $f(x) = x^3 + ax^2 + c$, где все коэффициенты a, b, c – действительные числа. Известно, что функция $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x)$ имеет два экстремума: –3 и 6. Чему равна площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ и $y = 1$?

A. 2ln 3. **B.** ln 3. **C.** ln 18. **D.** 2ln 2.

Решение. Функция $g(x)$ представляет собой сумму $f(x)$ и её производных.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$; $f'''(x) = 6$.

Отсюда

$$g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + 6.$$

По условию $g(x)$ имеет два экстремума – это значит, что существуют такие x_1 и x_2, что $g(x_1) = -3$, $g(x_1) = 6$.

Чтобы найти точки пересечения линий $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ и $y = 1$, нужно решить уравнение $\dfrac{f(x)}{g(x)+6}=1$. $f(x) = g(x) + 6 \Leftrightarrow f(x) = = f(x) + f'(x) + f''(x) + 6 \Leftrightarrow f'(x) + f''(x) + 6 = 0$. В правой части получили функцию $g'(x)$. Производная обращается в нуль в точках экстремума, отсюда имеем

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2. \end{array}\right.$$

Площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{f(x)}{g(x)+6}$ и $y = 1$ будем находить с помощью определённого интеграла:

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)}{g(x)+6}-1\right)\mathrm{d}x\right|=$$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{f(x)-g(x)-6}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=$$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-f'(x)-f''(x)-6}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{-g'(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=$$

$$=\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{g'(x)}{g(x)+6}\right)\mathrm{d}x\right|=|\ln|g(x)+6||\,_{x^1}^{x^2}=$$

$$|\ln|g(x_2)+6| - \ln|g(x_1)+6|| =$$
$$= |\ln(6+6) - \ln|-3+6|| =$$
$$= |\mathrm{lh}\,12 - \ln 3| = 2\ln 2.$$

Ответ: D.

47. Сколько существует таких целых чисел y, чтобы для некоторого $x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$ выполнялось условие

$$27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{9x}\ ?$$

A. 27. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Решение. В левой части равенства $27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{9x}$ находится показательная функция с основанием 27, следовательно, в правой части должно стоять положительное выражение, отсюда $xy > -1$.

1) Если $y \le 0$, поскольку $x>\dfrac{1}{3}$ имеем $y > -3$. Проверим выполнение равенства для всех целых значений y из интервала $(-3; 0]$.

При $y = 0$ уравнение принимает следующий вид: $27^{3x^2-9x}-1=0$. Его решениями будут $x = 0$ и $x = 3$, но ни одно из них не удовлетворяет условию $x\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$.

При $y = -1$ уравнение принимает вид $27^{3x^2-10x}-(1-x)=0$. Введём функцию $g_1(x)=27^{3x^2-10x}-(1-x)$. Она достигает нулевого значения внутри отрезка $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$, поскольку на его концах выполнятся условие $g_1\left(\dfrac{1}{3}\right)g_1(3)<0$. Первое целочисленное значение y найдено.

Для значения $y = -2$ имеем уравнение вида $27^{3x^2-11x}-(1-2x)=0$. Функция $g_2(x)=27^{3x^2-11x}-(1-2x)$ меняет свой знак внутри отрезка $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$, поскольку $g_2\left(\dfrac{1}{3}\right)g_2(3)<0$. Таким образом, обнаружено второе целочисленное значение y.

2) Пусть теперь $y \ge 1$, тогда

$$27^{3x^2+xy}=(1+xy)27^{9x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 - 9x = \log_{27}(1+xy) - xy \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3x-9-\frac{\log_{27}(1+xy)}{x}+y=0.$$

Рассмотрим функцию

$$g(x)=3x-9-\frac{\log_{27}(1+xy)}{x}+y$$

на отрезке $\left[\dfrac{1}{3};3\right]$.

Её производная

$$g'(x)=3+\frac{\ln(1+xy)}{x^2\ln 27}-\frac{y}{x(1+xy)\ln 27}>$$

$$> 3-\frac{1}{3x^2\ln 3} \geq 3-\frac{3}{\ln 3} > 0, \quad \forall x \in \left[\frac{1}{3};3\right].$$

Следовательно, функция $g(x)$ монотонно возрастает на $\left[\frac{1}{3};3\right]$. Таким образом, уравнение $g(x) = 0$ имеет решение на $\left(\frac{1}{3};3\right)$ тогда и только тогда, когда

$$g\left(\frac{1}{3}\right)g(3) < 0.$$

Применим неравенство $\ln(1 + u) < u$ для всех $u > 0$, имеем

$$g(3) = -\frac{\log_{27}(1+3y)}{3} + y > -\frac{3y}{3\ln 27} + y > 0.$$

Следовательно,

$$g\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -\log_3\left(1+\frac{y}{3}\right) + y - 8 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq y \leq 9$$

(поскольку y – положительное целое число).

Итак, $y \in \{-2; -1; 1; 2; \ldots; 9\}$, всего имеем 11 целых значений.

Ответ: C.

48. В параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ основание является квадратом, диагональ которого $BD = 2a$, угол между двумя плоскостями $(A'BD)$ и $(ABCD)$ равен 30°. Чему равен объём этого паралеллепипеда?

A. $6\sqrt{3a^3}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}a^3$.

C. $2\sqrt{3a^3}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$.

Р е ш е н и е.

Пусть O – точка пересечения диагоналей $ABCD$. Поскольку $BD \perp OA$ и $BD \perp AA'$, $BD \perp (A'OA) \Rightarrow BD \perp OA'$.

Кроме того, $(A'BD) \cap (ABCD) = BD$.

Угол между плоскостями $(A'BD)$ и $(ABCD)$ $\angle A'OA = 30°$ (рис. 13).

Четырёхугольник $ABCD$ – это квадрат, длина его диагонали $BD = 2a$. Из прямоугольного треугольника ABD по теореме Пифагора $AB = AD = a\sqrt{2}$.

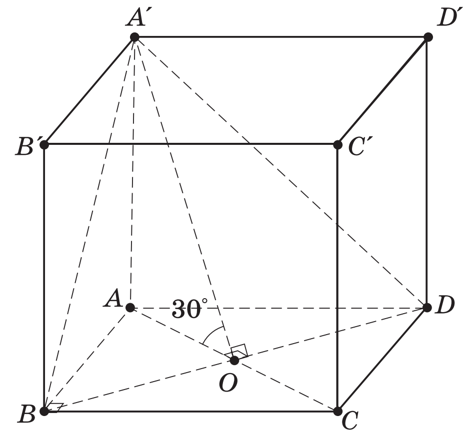


Рис. 13

Диагонали BD и AC равны, отсюда

$$AO = \frac{1}{2}BD = a.$$

Рассмотрим треугольник $A'AO$. У него угол $A'AO$ – прямой, сторона $OA = a$, $\angle A'OA = 30°$, отсюда

$$A'A = OA \cdot \mathrm{tg}30° = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Итак, объём прямоугольной коробки

$$V = AB \cdot AD \cdot AA' =$$

$$= a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a^3.$$

О т в е т: D.

49. В пространстве $Oxyz$ заданы две точки $A(1; -3; -4)$, $B(-2; 1; 2)$. Рассмотрим две точки M и N, движущиеся по плоскости (Oxy), таким образом, что расстояние $MN = 2$. Чему равно значение $|AM - BN|$?

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{61}$. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{53}$.

Р е ш е н и е. Поскольку точки A и B имеют аппликаты разных знаков, они лежат по разные стороны координатной плоскости (Oxy). Пусть H, K – ортогональные проекции точек A и B на плоскость $(Oxy) \Rightarrow H(1; -3; 0)$, $K(-1; 1; 0)$ (рис. 14).

Обозначим A_1 точку, симметричную A относительно плоскости $(Oxy) \Rightarrow A_1(1; -3; 4)$. Точка A_2 такая, что

$$\overline{A_1A_2} = \overline{MN} \Rightarrow A_1A_2 = 2.$$

A_2 принадлежит окружности, лежащей в плоскости, параллельной координатной (Oxy), с центром A_1 радиуса $R = 2$.

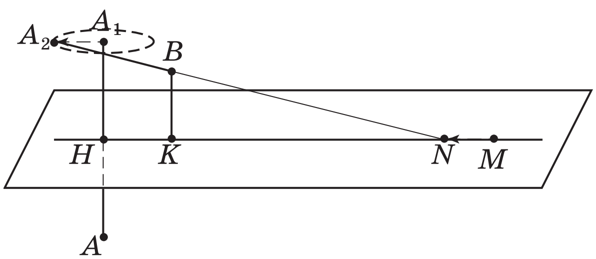


Рис. 14

$$|AM - BN| = |A_1M - BN| =$$
$$= |A_2N - BN| \le A_2B.$$

Данное неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ противоположно направлен к $\overrightarrow{NK}(-3;4;0)$.

$$\overrightarrow{NK} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5,$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2} =$$

$$= \frac{|\overrightarrow{A_1A_2}|}{|\overrightarrow{HK}|}|\overrightarrow{NK}| = \left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A2\left(\frac{11}{5};\frac{23}{5};4\right) \Rightarrow A_2B = \sqrt{53}.$$

Таким образом, значение $|AM - BN|$ равно $\sqrt{53}$.

О т в е т: D.

50. Дана функция $y = f(x)$, производная которой равна $f'(x) = (x-7)(x^2-9)$, $\forall x \in \mathbf{R}$. Сколько таких целых, положительных значений параметра m, чтобы функция $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ имела не менее 3-х критических точек?

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Р е ш е н и е. Из условия

$$g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$$

находим, что

$$g'(x) = |x^3 + 5x|' f'(|x^3 + 5| + m).$$

Тогда критические точки функции $g(x)$ можно найти, отыскав их для функций $|x^3 + 5|$ и $f(|x^3 + 5| + m)$.

Единственной критической точкой функции $|x^3 + 5|$ является $x = 0$. Обратимся теперь к множителю $f'(|x^3+5|+m)$. По условию функция $f(x)$ всюду дифференцируема и

$f'(x) = (x-7)(x^2-9) = (x-7)(x-3)(x+3)$. Имеем:

$$f'(|x^3 + 5| + m) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3+5x|+m=7 \\ |x^3+5x|+m=3 \\ |x^3+5x|+m=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x^3+5x|=7-m \\ |x^3+5x|=3-m \\ |x^3+5x|=-3-m. \end{array}\right.$$

Чтобы функция $g(x)$ имела не менее 3-х критических точек, уравнение $g'(x) = 0$, а значит, и $f'(|x^3 + 5| + m) = 0$, должно иметь не менее двух различных ненулевых решений. Из анализа записанной совокупности получим, что для целых положительных значений m справедливы условия

$$\left[\begin{array}{l} 7-m>0 \\ 3-m>0 \\ -3-m>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \in \{1;2;3;4;5;6\} \\ m \in \{1;2\} \\ m \in \varnothing, \end{array}\right.$$

откуда $m \in \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$.

Итак, существует 6 значений m, удовлетворяющих требованиям задачи.

О т в е т: A.