

Phân tích chuyển động dính – trượt ở vận tốc thấp của một hệ dao động ma sát có thành phần cản phi tuyến và chịu kích động ngoài tuần hoàn

Phạm Ngọc Chung^{1*}, Nguyễn Như Hiếu^{2,3}

¹Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Mở - Địa chất;

²Khoa Cơ khí – Cơ điện tử, Trường Đại học Phenikaa;

³Viện Nghiên cứu PRATI, Tập đoàn Phenikaa.

*Email liên hệ: phamngocchung@humg.edu.vn.

Nhận bài ngày 01/8/2021; Hoàn thiện ngày 08/9/2021; Chấp nhận đăng ngày 12/12/2021.

DOI: <https://doi.org/10.54939/1859-1043.j.mst.76.2021.157-166>

TÓM TẮT

Nghiên cứu này tập trung phân tích chuyển động vận tốc thấp của hệ dao động dính – trượt có cản phi tuyến dưới tác dụng của tải ngoài tuần hoàn và của lực ma sát mô tả bởi mô hình LuGre. Đối với chuyển động trong miền vận tốc thấp, mô hình LuGre bắt được hiệu ứng Stribeck, vốn là hiệu ứng ma sát mà trong đó lực ma sát giảm khi vận tốc tăng. Mô hình hệ gồm một vật nặng có liên kết lò xo tuyến tính và cản phi tuyến, được đặt trên một băng tải chuyển động với vận tốc tương đối thấp. Kết quả nhận được chỉ ra rằng, dưới tác dụng của tải trọng ngoài tuần hoàn, ứng xử của hệ là phong phú, trong đó có thể xuất hiện các chuyển động tuần hoàn hoặc các chuyển động có tính chất hỗn độn. Đặc trưng chi tiết của các dạng chuyển động được khảo sát thông qua phương pháp giải số.

Từ khóa: Ma sát khô; Chuyển động dính-trượt; Hiệu ứng Stribeck; Tuần hoàn; Hỗn độn.

1. GIỚI THIỆU

Dao động dính - trượt là một trong những hiện tượng dao động phổ biến xuất hiện trong thực tế do chuyển động có ma sát của hai bề mặt tiếp xúc với nhau và thường xảy ra ở vận tốc tương đối thấp [1-3]. Người ta có thể quan sát đặc tính dính - trượt trong các bài toán kỹ thuật như quá trình khoan, cắt của các máy công cụ [4, 5], quá trình nhả và hãm phanh của hệ phanh trong các phương tiện vận chuyển [6, 7]. Các cơ chế của chuyển động dính - trượt được nghiên cứu từ nhiều thập niên trở lại đây thông qua các nghiên cứu thực nghiệm và nghiên cứu lý thuyết [8]. Kato và đồng nghiệp [9] nghiên cứu thực nghiệm về chuyển động dính - trượt trên một máy công cụ trong các điều kiện trượt khác nhau. Các tác giả đã đề xuất các biểu diễn cho hệ số ma sát tĩnh và ma sát động bằng biểu thức đại số đơn giản phù hợp với các đo đạc thực nghiệm thu được. Sự hình thành của chuyển động dính - trượt được xem là xuất phát từ đặc tính chuyển động qua lại với vận tốc tương đối chậm giữa hai bề mặt với nhau. You và Hasia [10] đã xem xét ảnh hưởng của mối quan hệ giữa tốc độ chuyển động và lực ma sát đến sự xuất hiện của chuyển động dính - trượt bằng nghiên cứu giải tích. Kết quả chỉ ra rằng khi tham số tốc độ tăng dần đến tần số dao động tăng và biên độ sẽ bị giảm đi. Tác giả cũng chỉ ra độ lớn của độ dốc của đường cong tốc độ - ma sát ảnh hưởng đáng kể đến chuyển động dính - trượt ở mức gần vận tốc không. Đi sâu vào bản chất vật lý, Ponomarev và Meyerovich [11] đã nghiên cứu ảnh hưởng của độ nhám bề mặt và ảnh hưởng của lớp bôi trơn bằng chất lỏng trên bề mặt tới chuyển động dính - trượt. Các bề mặt nhìn ở cấp độ vi mô thường là không đều và mức độ nhấp nhô trên bề mặt rất ngẫu nhiên. Do đó, để nghiên cứu hiện tượng dính - trượt, các tác giả đã xấp xỉ bề mặt ngẫu nhiên bằng bề mặt tương đương (phẳng) sử dụng cách tiếp cận xác suất để tính các đặc trưng đáp ứng bề mặt. Các thí nghiệm cũng được so sánh và đánh giá. Chuyển động dính - trượt thường là các chuyển động không có lợi. Do đó, người ta sẽ tìm các biện pháp nhằm khử hoặc giảm tới mức thấp nhất ảnh hưởng của các chuyển động này. Mới đây, nghiên cứu của Kligerman và Varenberg [12] đã đề xuất một mô hình tựa tĩnh mà nó có thể giải thích được sự triệt tiêu của chuyển động dính - trượt khi hai bề mặt rắn đàn hồi có cấu trúc độ nhám đặc biệt tiếp xúc với nhau. Nghiên cứu sẽ là một gợi ý để khử chuyển động dính - trượt. Lin và đồng nghiệp [13] đã nghiên cứu khử dao động

dính - trượt cho hệ máy khoan với mô hình tham số phân bố thông qua phân tích bám quỹ đạo với việc sử dụng bộ điều khiển phản hồi kiểu PD (proportional-derivative feedback controller). Phân tích sự mất ổn định và điều khiển dính - trượt cho hệ máy khoan với việc xem xét đặc tính trễ phụ thuộc trạng thái được trình bày trong một nghiên cứu của Zheng và đồng nghiệp [14]. Mới đây, cơ chế của hiện tượng dính - trượt do chuyển động có ma sát của hệ ổ trục được trình bày trong một nghiên cứu thực nghiệm bởi Han và Lee [15]. Các tác giả đã mô hình hóa hệ bằng một hệ hai bậc tự do và nhận dạng tham số của mô hình từ dữ liệu thực nghiệm đo đạc được.

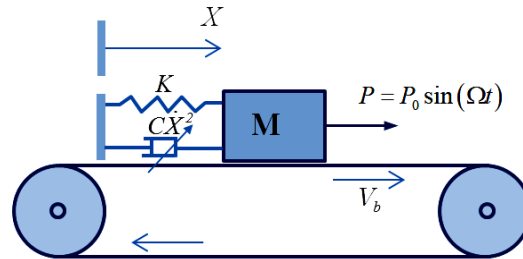
Trong hầu hết các nghiên cứu trên, dao động dính - trượt được quan sát từ các bài toán thực nghiệm và có thể được nghiên cứu bằng các công cụ giải tích hoặc các công cụ tính toán số [1, 16]. Bởi vì yếu tố ma sát được tính đến, các phương trình chuyển động trong hệ mô hình hóa đều có một đặc điểm chung là tính không liên tục của đường đặc trưng ma sát - vận tốc tại vận tốc bằng không, trong khi đó chuyển động dính - trượt xảy ra trong miền lân cận vận tốc bằng không này. Chúng ta biết rằng, hai mô hình đơn giản nhất trong nghiên cứu hệ ma sát là mô hình ma sát Coulomb và mô hình ma sát nhớt. Tuy nhiên, hai mô hình này thích hợp cho mô tả chuyển động với vận tốc đủ lớn. Đối với các hệ có chuyển động với vận tốc thấp, người ta quan sát thấy sự hiện diện của hiệu ứng Stribeck và đòi hỏi mô hình thích hợp để mô tả được hiệu ứng này. Canudas de Wit và đồng nghiệp [17] đã đề xuất một mô hình ma sát, gọi là mô hình LuGre, có thể mô tả tương đối tốt hiệu ứng Stribeck, tức là hiệu ứng mà ở đó lực ma sát giảm khi vận tốc tăng trong miền vận tốc thấp. Ở đây, có thể hiểu rằng miền vận tốc thấp là miền vận tốc có giá trị tương đối nhỏ, gần vận tốc bằng không. Để định lượng mức độ miền vận tốc thấp, người ta đưa ra một tham số gọi là vận tốc Stribeck. Giá trị của tham số này được xác định từ thực nghiệm [1, 2]. Tham số vận tốc Stribeck cho biết mức độ thay đổi của vận tốc ảnh hưởng như thế nào đến đường cong đặc trưng vận tốc - ma sát trong chế độ chuyển động bình ổn của hệ. Hiệu ứng Stribeck có ý nghĩa khi vận tốc nằm trong miền giới hạn bởi vận tốc Stribeck. Từ khi được đề xuất bởi Canudas de Wit [17], mô hình LuGre là mô hình được sử dụng tương đối phổ biến để mô tả nhiều hiện tượng ma sát khác nhau trong nhiều hệ kỹ thuật, chẳng hạn như hiện tượng dính - trượt, hiện tượng trễ, hiện tượng trước trượt (từ trạng thái tĩnh bắt đầu chuyển sang trạng thái trượt), hiện tượng lực thoát. Trong những năm gần đây, mô hình LuGre được cải tiến để phù hợp với nhiều đối tượng nghiên cứu khác nhau. Saha và đồng nghiệp [18] đã đề xuất một mô hình ma sát mới dựa vào mô hình LuGre, có thể mô tả tương đối chính xác bản chất của lực ma sát trong chế độ chuyển động trượt giữa hai bề mặt. Pikunov và Stefanski [19] cải tiến mô hình LuGre bằng cách bổ sung hệ số có trọng vào phương trình chuyển động của biến trạng thái trong, tức biến trạng thái mô tả độ võng của lông, trong đó mô hình lông thể hiện tính chất đàn hồi và cản của độ nhám bề mặt. Chuyển động dính - trượt sử dụng mô hình LuGre cải tiến được Pikunov và Stefanski nghiên cứu bằng phương pháp số. Mới đây nhất, trong nghiên cứu của Hieu và Chung [20], các tác giả đã phát triển mô hình LuGre kết hợp với hiệu ứng thời gian chờ (dwell-time) cho mô hình hệ khối lượng chuyển động dính - trượt trên băng tải ở vận tốc thấp. Các tác giả đã phân tích định tính về tính chất ổn định, sự rẽ nhánh và đặc trưng dính - trượt của hệ khi có sự xuất hiện của hiệu ứng chờ.

Trong bài báo này, các tác giả sử dụng mô hình ma sát LuGre với hiệu ứng Stribeck để nghiên cứu dao động do ma sát của hệ một bậc tự do có cản phi tuyến dưới tác dụng của lực kích động ngoài. Tính chất cản phi tuyến của hệ kết hợp với bài toán ma sát sử dụng mô hình LuGre là một vấn đề mới vì hai lý do sau đây: (i) đặc trưng cản phi tuyến trong các nghiên cứu trước đây thường được xét trong hệ không tính đến yếu tố ma sát; (ii) các hệ ma sát được xem là hệ có ứng xử phức tạp, tính chất cản thường được xét chỉ trong phạm vi cản tuyến tính. Sự có mặt đồng thời của hai nguồn phi tuyến đến từ yếu tố cản và yếu tố ma sát được kỳ vọng là làm cho hệ có ứng xử tương đối đa dạng trong đó có thể xuất hiện các chuyển động tuần hoàn hoặc các chuyển động có tính chất hỗn độn. Các hiện tượng như thế sẽ được khảo sát chi tiết trong nghiên cứu này.

2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CHUYỂN ĐỘNG

Mô hình LuGre là phiên bản mở rộng của mô hình Dahl để có thể bắt được hiệu ứng Stribeck ở miền vận tốc thấp. Trong thực tế, ở cấp độ vi mô, các bề mặt có cấu trúc không đều nhau, vì thế, hai bề mặt tiếp xúc và trượt qua nhau tại các vị trí có hình dạng nhấp nhô [17]. Người ta có thể mô hình hóa bề mặt tiếp xúc thông qua một mô hình lông đàn hồi. Mỗi bề mặt có cấu trúc lông giống như bề mặt của một bàn chải, trong đó, các lông có cấu trúc dạng dầm đàn hồi kích cỡ nhỏ ở cấp độ micro. Khi chịu tác dụng của một lực, các lông sẽ bị lệch và có tính chuyển động đàn hồi như lò xo sẽ tạo ra một lực tiếp tuyến của bề mặt gọi là lực ma sát. Mô hình này được Canudas de Wit và đồng nghiệp [17] đã đề xuất dựa trên ứng xử độ lệch trung bình của lông đàn hồi.

Sử dụng mô hình LuGre [17] trong bài báo này, nhóm tác giả nghiên cứu dao động do ma sát của hệ minh họa trên hình 1, có cản phi tuyến trong điều kiện chuyển động với vận tốc thấp. Hệ có các thành phần: vật nặng có khối lượng M nằm trên một băng tải kết nối với giá cố định thông qua lò xo tuyến tính với độ cứng K , cản nhớt phi tuyến với hệ số cản C . Chuyển động của băng tải giả sử có vận tốc không đổi V_b . Một lực kích động ngoài dạng điều hòa với biên độ P_0 và tần số Ω tác dụng lên vật nặng.



Hình 1. Hệ một bậc tự do có cản phi tuyến đặt trên băng tải chuyển động.

Giữa bề mặt vật nặng và băng tải có thành phần lực ma sát $F_{fr}(V_r, Z)$ phụ thuộc vào vận tốc tương đối $V_r = V_b - \dot{X}$ và biến trạng thái Z , được gọi là *biến trạng thái trong*, mô tả độ võng trung bình của lông trong mô hình LuGre. Phương trình vi phân chuyển động của hệ được viết cho chuyển dịch X và biến trạng thái trong Z có dạng sau đây:

$$M\ddot{X} + C\dot{X}^3 + KX = F_{fr}(V_r, Z) + P_0 \sin(\Omega t) \quad (1)$$

$$\frac{dZ}{dt} = V_r - \frac{|V_r|}{G(V_r)} Z \quad (2)$$

Trong đó: $F_{fr}(V_r, Z) = N_0^* \tilde{f}(V_r, Z)$ là lực ma sát với N_0^* là phản lực pháp tuyến và hàm $\tilde{f}(V_r, Z)$ cho bởi [17, 19].

$$\tilde{f}(V_r, Z) = \frac{1}{N_0^*} (\tilde{\sigma}_0 Z + \tilde{\sigma}_1 \dot{Z} + \tilde{\sigma}_2 V_r) \quad (3)$$

Trong đó: $\tilde{\sigma}_0$ là độ cứng của lông; $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2$ là hệ số hệ số cản của lông và hệ số cản nhớt trong chuyển động tương đối giữa hai bề mặt. Trong phương trình (2), hàm Stribeck $G = G(V_r)$ của vận tốc tương đối V_r , được cho bởi [17]:

$$\tilde{\sigma}_0 G(V_r) = F_C + (F_S - F_C) \exp \left\{ - \left(\frac{V_r}{V_s} \right)^2 \right\} = N_0^* \left[\mu_C + (\mu_S - \mu_C) \exp \left\{ - \left(\frac{V_r}{V_s} \right)^2 \right\} \right] \quad (4)$$

Trong đó: $F_C = \mu_C N_0^*$ và $F_S = \mu_S N_0^*$ tương ứng là lực ma sát Coulomb và lực ma sát tĩnh; μ_C và μ_S lần lượt là hệ số ma sát Coulomb và hệ số ma sát tĩnh; V_s là vận tốc Stribeck.

Đặt $\omega_0 = \sqrt{K/M} = \sqrt{g/X_0}$ [rads⁻¹] là tần số tự nhiên của hệ, trong đó, độ giãn đặc trưng của lò xo được định nghĩa là $X_0 = Mg/K$ [m]. Ta có thể đưa hệ phương trình vi phân chuyển động (1) và (2) về dạng không thứ nguyên như sau:

$$\frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} + h \left[\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right]^3 + x(\tau) = p_0 \sin(\eta\tau) + N_0 f(v_r, z) \quad (5)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = v_r - \frac{|v_r|}{g(v_r)} z \quad (6)$$

trong đó $\tau = \omega_0 t$ là thời gian không thứ nguyên và các tham số không thứ nguyên khác cho bởi:

$$x = \frac{X}{X_0}, z = \frac{Z}{X_0}, h = \frac{Cg^2}{\omega_0 K}, \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}, v_b = \frac{V_b}{\omega_0 X_0}, v_r = \frac{V_r}{\omega_0 X_0} = v_b - \frac{dx}{d\tau}, p_0 = \frac{P_0}{Mg}, \quad (7)$$

$$N_0 = \frac{N_0^*}{Mg}, f(v_r, z) \equiv \tilde{f}(V_r, Z) \equiv \tilde{f}(\omega_0 X_0 v_r, Z)$$

Biểu thức toán học của hàm ma sát $f(v_r, z)$ không thứ nguyên là:

$$f(v_r, z) = \sigma_0 z + \sigma_1 \frac{dz}{d\tau} + \sigma_2 v_r \quad (8)$$

Trong đó:

$$\sigma_0 = \frac{\tilde{\sigma}_0 X_0}{N_0^*}, \sigma_1 = \frac{\tilde{\sigma}_1 \omega_0 X_0}{N_0^*}, \sigma_2 = \frac{\tilde{\sigma}_2 \omega_0 X_0}{N_0^*} \quad (9)$$

Hàm $g(v_r)$ trong phương trình (6) được xác định bởi [19]:

$$g(v_r) = \frac{N_0}{\sigma_0} \left(\mu_C + (\mu_S - \mu_C) \exp\left(-\frac{v_r^2}{v_s^2}\right) \right) \quad (10)$$

với $v_s = V_s / (\omega_0 X_0)$ là vận tốc Stribeck không thứ nguyên.

Trong không gian trạng thái, các phương trình vi phân chuyển động (5), (6) được đưa về dạng ba phương trình vi phân cấp một sau đây:

$$\frac{dx}{d\tau} = u \quad (11.a)$$

$$\frac{du}{d\tau} = -hu^3 - x + p_0 \sin(\eta\tau) + N_0 f(v_r, z) \quad (11.b)$$

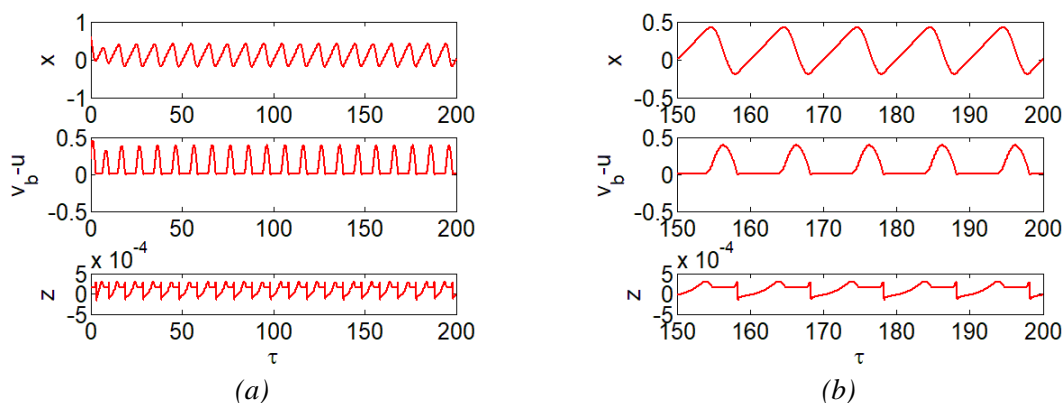
$$\frac{dz}{d\tau} = v_r - \frac{|v_r|}{g(v_r)} z \quad (11.c)$$

trong đó f, g là các hàm được xác định từ (8) và (10). Có thể thấy rằng hệ (11) có cấu trúc phi tuyến, trong đó, có hai nguồn phi tuyến gồm: nguồn thứ nhất đến từ giả thiết về độ cứng phi tuyến của cản nhớt gắn với vật nặng M , nguồn thứ hai đến từ đặc tính tiếp xúc ma sát giữa bề mặt vật nặng M và băng tải. Sự xuất hiện hai nguồn phi tuyến sẽ làm ứng xử của hệ trở nên đa dạng và được nghiên cứu trong bài báo này thông qua cách tiếp cận khảo sát bằng phương pháp số.

3. ĐẶC TRƯNG CỦA CHUYỂN ĐỘNG ĐÍNH – TRƯỢT

3.1. Tiến triển theo thời gian của đáp ứng và biểu diễn quỹ đạo pha

Trong phần này, các tác giả phân tích một số kết quả của chuyển động dính - trượt đối với hệ đang xét sử dụng thuật toán số dựa trên phương pháp Runge-Kutta bậc 4. Trong các hình 2a, hình 2b, ta có thể quan sát đáp ứng theo thời gian của hệ dao động (11) với các tham số trong mô phỏng được lấy như sau: $v_b = 0.1$, $\mu_s = 0.3$, $\mu_c = 0.15$, $v_s = 0.1$, $p_0 = 0.1$, $N_0 = 1$, $\sigma_0 = 1000$, $\sigma_1 = 30$, $\sigma_2 = 0.1$. Quan sát hình 2a thấy rằng, dịch chuyển của của vật tiến tới nghiệm tuần hoàn khi thời gian không thứ nguyên τ đủ lớn (chi tiết thời gian τ trong khoảng [150, 200] được thể hiện trên hình 2b). Từ đồ thị của vận tốc tương đối $v_b - u$, có thể thấy rằng chuyển động của hệ ở trạng thái bình ổn là một chuyển động tuần hoàn bao gồm hai pha xen kẽ nhau: *pha chuyển động dính* với vận tốc tương đối của chuyển động gần bằng không; và *pha chuyển động trượt* với vận tốc tương đối của chuyển động thay đổi và khác không. Đáp ứng $z(t)$ biểu diễn độ lệch của lông trong quá trình vật thể M chuyển động trên băng tải. Bởi vì độ lệch lông phản ánh chuyển động đặc trưng của bề mặt ở thang vi mô, nó biểu hiện chuyển động cực nhỏ của các lông đại diện cho sự thay đổi về độ nhám bề mặt theo thời gian khi hai bề mặt tiếp xúc và cọ sát lên nhau. Quá trình thay đổi của độ lệch lông cho thấy diễn biến của pha dính diễn ra như thế nào khi hai bề mặt tiếp xúc nhau mà các mô hình ma sát cổ điển, chẳng hạn như mô hình ma sát Coulomb không phản ánh được. Nếu chuyển động với vận tốc lớn, độ lệch lông sẽ đạt tới mức lệch giới hạn, khi đó, bề mặt được xem là trượt trên nhau và hiện tượng dính hầu như không đáng kể. Từ phương trình (8), bởi vì thực tế lực đàn hồi sinh ra do độ cứng của lông là lớn hơn rất nhiều so với hai lực cản còn lại trong mô hình LuGre, do đó, dáng điệu của đáp ứng z sẽ gần như quyết định dáng điệu của lực ma sát.

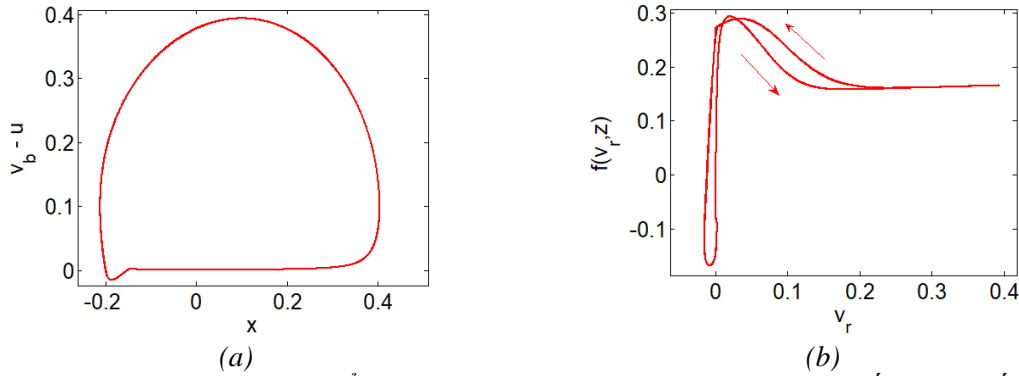


Hình 2. Đáp ứng theo thời gian của hệ dao động ma sát.

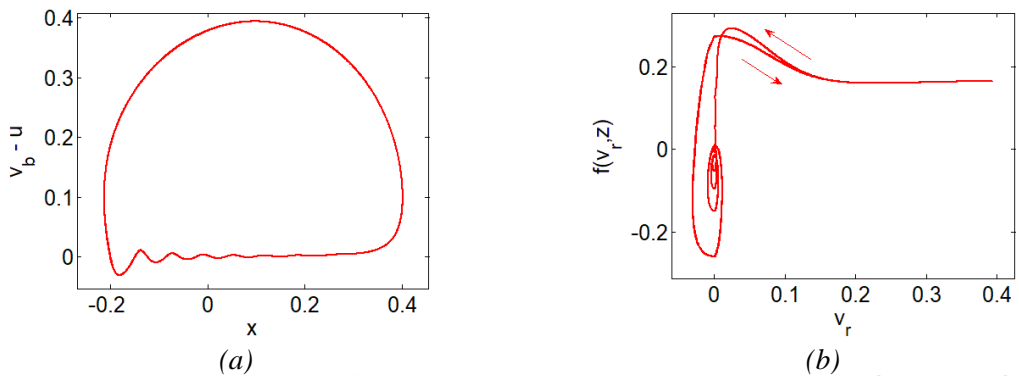
Hình 3a mô tả mặt phẳng pha với hai tọa độ là chuyển dịch và vận tốc tương đối của vật. Trong chuyển động bình ổn, mặt phẳng pha hình thành một vòng giới hạn có tính khép kín nhưng không tròn, trong đó phần gần phẳng dưới cùng của vòng đặc trưng cho giai đoạn chuyển động dính của vật trên băng tải, trong khi đó phần vòng cung phía trên thể hiện chuyển động trượt của vật trên băng tải với vận tốc của chuyển động tương đối thay đổi và khác không. Đặc tính này khác hẳn so với chuyển động tuần hoàn thông thường không có chuyển động dính. Trên hình 3b, ta có thể thấy rằng đường cong lực ma sát-vận tốc tương đối (còn được gọi là vòng trễ ma sát) có đặc điểm là tự giao cắt và có chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Hình 4b mô tả sự giảm cân của lông gây ra vòng trễ địa phương ngược chiều kim đồng hồ trong chế độ trước trượt, điều có liên quan đến các dao động không mong muốn trong pha dính minh họa trên hình 4a. Để kiểm soát các dao động này, người ta cần tăng cân của lông, kết quả được minh

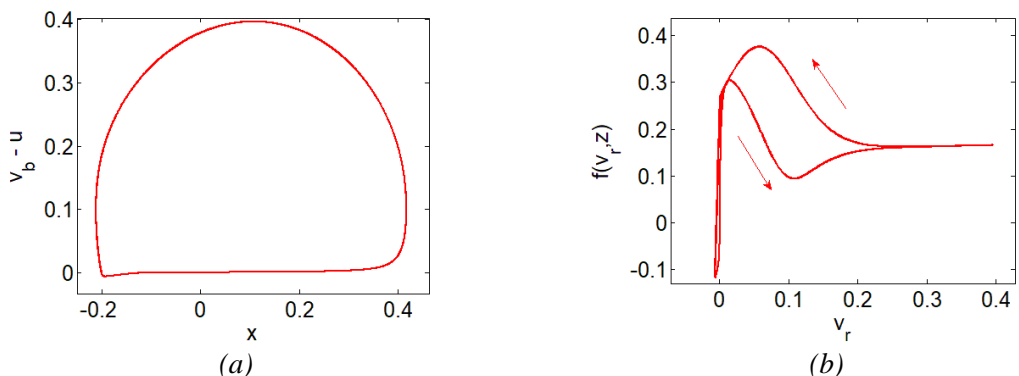
họa trên hình 5. Hơn nữa, nó có thể được quan sát từ mặt phẳng pha trong hình 4a rằng vận tốc của dao động hơi vượt quá vận tốc bằng tải khi bắt đầu pha dính. Trong trường hợp $\sigma_1 = 30$ trên hình 5a, giá trị vượt quá là nhỏ hơn nhiều so với trường hợp độ cứng $\sigma_1 = 1$ trên hình 4a.



Hình 3. (a) Hình ảnh mặt phẳng pha và (b) Đường cong lực ma sát-vận tốc tương đối với $\sigma_0 = 100$, $\sigma_1 = 10$ và $\sigma_2 = 0.04$.



Hình 4. (a) Hình ảnh mặt phẳng pha và (b) Đường cong lực ma sát-vận tốc tương đối với $\sigma_0 = 100$, $\sigma_1 = 1$ và $\sigma_2 = 0.04$.

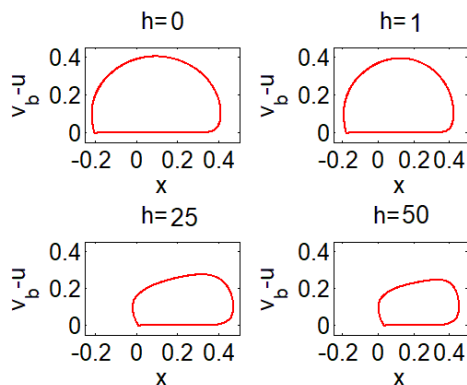


Hình 5. (a) Hình ảnh mặt phẳng pha và (b) Đường cong lực ma sát-vận tốc tương đối với $\sigma_0 = 100$, $\sigma_1 = 30$ và $\sigma_2 = 0.04$.

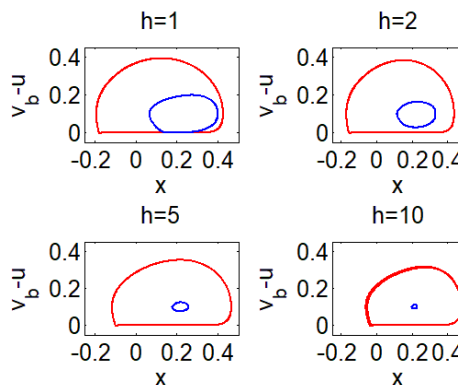
3.2. Ảnh hưởng của hệ số cản nhớt phi tuyến và biên độ kích động ngoài lên đáp ứng của hệ

Hình 6 mô tả sự thay đổi của vòng giới hạn trong mặt phẳng pha ở trạng thái chuyển động bình ổn với các hệ số cản h khác nhau, gồm $h = 0, 1, 25, 50$. Quan sát hình 6 ta thấy rằng, vòng giới hạn sẽ thu nhỏ lại và có xu hướng lệch sang phải khi hệ số cản h tăng lên. Đồng thời vòng

giới hạn cũng có xu hướng bị méo hơn với giá trị h lớn. Giá trị cân không thứ nguyên $h=1$ được xem là một giá trị cân nhỏ, khi đó, dáng điệu quỹ đạo pha của hệ gần giống như trường hợp $h=0$ (tức không có cân). Dáng điệu quỹ đạo pha thể hiện một sự thay đổi đáng kể khi cân h tăng lên giá trị $h=25$ và $h=50$.



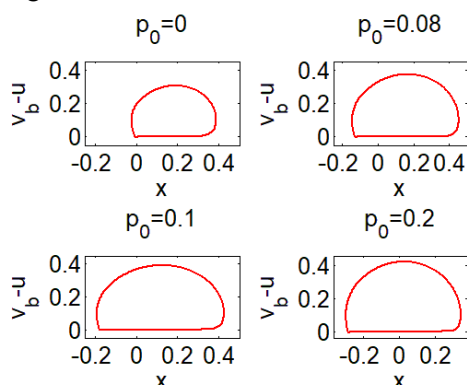
Hình 6. Hình ảnh mặt phẳng pha theo các hệ số cân h khác nhau với $\sigma_0=1000$, $\sigma_1=30$ và $\sigma_2=0.1$.



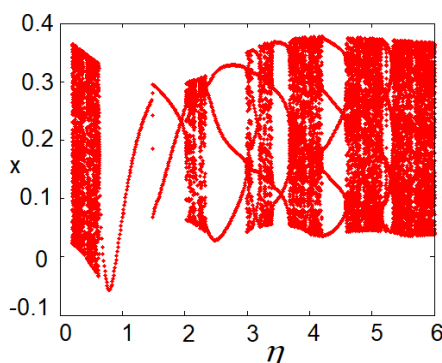
Hình 7. Quỹ đạo pha trong trường hợp thành phần cân của hệ là tuyến tính (đường phía trong) và phi tuyến (đường phía ngoài).

Hình 7 minh họa sự khác nhau trong mặt phẳng pha giữa số hạng cân là tuyến tính và số hạng cân là phi tuyến. Cân tuyến tính trong phương trình (11b) có dạng hu thay vì hu^3 trong trường hợp cân phi tuyến. Trong trường hợp phi tuyến dáng điệu quỹ đạo pha có thay đổi không nhiều khi tăng h từ 1 đến 10, chứng tỏ giá trị hệ số cân phi tuyến vẫn được xem cân yếu cho đến khi nó tăng đến 25 và 50 như trên hình 6; trong khi đó, dáng điệu của hệ trong trường hợp cân tuyến tính lại thay đổi đáng kể. Có thể thấy rằng độ lớn vòng giới hạn giảm dần khi hệ số cân tuyến tính tăng từ 1 đến 10. Điều này cho thấy giá trị hệ số cân trong trường hợp tuyến tính như thể là tương đối lớn. Dao động của hệ trong trường hợp cân tuyến tính $h=10$ là gần như tắt dần. *Chú ý rằng, ta đang xét hệ số cân là không thứ nguyên, trong trường hợp có thứ nguyên, mặc dù có cùng giá trị nhưng thứ nguyên của hệ số cân tuyến tính và phi tuyến là khác nhau.*

Hình 8 thể hiện ảnh hưởng của biên độ kích động ngoài đến vòng giới hạn của chuyển động hệ. Khi biên độ kích động ngoài tăng lên thì biên độ đáp ứng sẽ tăng lên. Do đó, vòng giới hạn của hệ sẽ mở rộng thêm và có xu hướng dịch chuyển sang bên trái khi biên độ kích động ngoài tăng lên.



Hình 8. Hình ảnh mặt phẳng pha với biên độ kích động ngoài p_0 khác nhau; $\sigma_0=1000$, $\sigma_1=30$, $\sigma_2=0.1$, $h=1$.

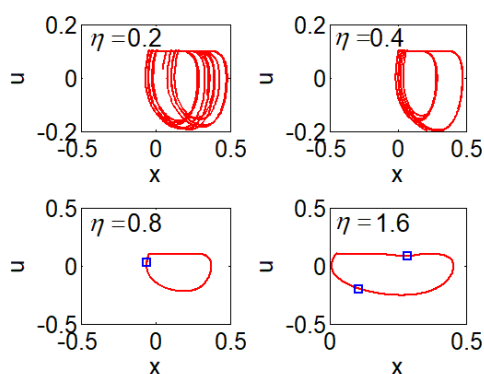


Hình 9. Biểu đồ rẽ nhánh trong chuyển động dính - trượt theo tham số tần số kích động ngoài.

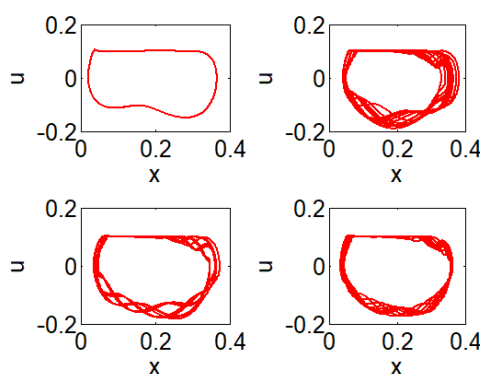
4. ĐẶC TRƯNG RỄ NHÁNH VÀ CHUYỂN ĐỘNG HỖN Độn

Trong phần này, ta khảo sát đặc trưng chuyển động của hệ khi hệ chịu tác động của kích động ngoài tuần hoàn với các tần số khác nhau. Chúng ta biết rằng nếu hệ không chịu tác động của kích động ngoài ($p_0 = 0$) thì xuất hiện một vòng giới hạn đặc trưng cho chuyển động dính - trượt của khối lượng M . Tuy nhiên, khi có sự xuất hiện của kích động ngoài với tần số nào đó chuyển động dính - trượt có thể bị thay đổi tính chất dẫn đến ứng xử rất khác của hệ sau mỗi chu kỳ dao động. Trên một miền của tham số tần số kích động ngoài, nếu ta tăng dần giá trị của tham số, có thể quan sát thấy hiện tượng rằng, vòng giới hạn vẫn tồn tại nhưng đến một giá trị nào đó, chuyển động của hệ không còn ở trạng thái vòng giới hạn nữa mà biến đổi sang một dạng khác nhau sau mỗi chu kỳ dao động. Trong tình huống này, ta có thể gọi tần số kích động ngoài η là một tham số rẽ nhánh. Trong phương trình (11b), tần số tự nhiên của hệ đã được chuẩn hóa về tần số đơn vị (hệ số của số hạng chuyển dịch x là 1), do đó, mức tần số cao sẽ được hiểu là lớn hơn nhiều tần số đơn vị, trong khi đó tần số thấp là tần số nằm trong miền nhỏ hơn tần số đơn vị và miền lân cận của tần số đơn vị.

Trên hình 9, tham số rẽ nhánh η được lấy từ 0.2 đến 6.0. Có thể thấy rằng, tồn tại những miền mà ở đó xuất hiện vòng giới hạn 1-tuần hoàn, 2-tuần hoàn, 3-tuần hoàn, thậm chí là chuyển động hỗn độn. Chuyển động hỗn độn tồn tại ở miền tần số rất thấp gần 0.2 và ở miền tần số cao (về phía tần số 6.0). Ở tần số quanh lân cận tần số $\eta = 1$ chuyển động 1-tuần hoàn xuất hiện, nghĩa là lúc này ta thu được dao động dính - trượt với một chu kỳ xác định. Cụ thể hơn, trong chuyển động bình ổn, sau mỗi chu kỳ của kích động ngoài, nếu ta cắt một mặt phẳng ngang qua "dòng" (flow) chuyển động và song song với mặt phẳng pha đối với tiến triển theo thời gian của hệ, chiếu các điểm này xuống cùng một mặt phẳng pha ta sẽ thấy chỉ có một điểm duy nhất. Các mặt phẳng cắt được gọi là lát cắt Poincaré. Hình chiếu của các điểm trên mặt phẳng pha được gọi là bản đồ Poincaré. Trong trường hợp 2-tuần hoàn, trên bản đồ Poincaré sẽ có hai điểm, tức là tồn tại hai vị trí mà các "dòng" đi qua. Minh họa hai điểm được đánh dấu là hình vuông màu xanh trên đồ thị thứ tư của hình 10. Nếu trên bản đồ Poincaré có một số lượng khá lớn các điểm mà dòng đi qua chứng tỏ chuyển động của hệ đang ở trạng thái hỗn độn. Để minh họa, trên hình 10, ta lấy một số điểm của tần số η để tính toán đáp ứng của hệ.



Hình 10. Pha dao động của hệ với bốn tần số kích động khác nhau $\eta = 0.2, 0.4, 0.8, 1.6$.



Hình 11. Pha dao động của hệ với bốn tần số lựa chọn $\eta = 2.6, 4.0, 5.0, 6.0$ của kích động ngoài.

Trên hình 10, bốn điểm tần số được chọn gồm $\eta = 0.2, 0.4, 0.8, 1.6$. Điểm $\eta = 0.2$ và $\eta = 0.4$ thuộc vào miền mà chuyển động hỗn độn xuất hiện. Do đó, quỹ đạo pha diễn ra khá phức tạp và không có sự lặp lại. Đối với chuyển động hỗn độn, việc dự báo quỹ đạo là không thể. Trong khi đó, tại tần số $\eta = 0.8$, ta thấy chỉ xuất hiện một vòng giới hạn, quỹ đạo chuyển động là 1-tuần hoàn. Tại điểm tần số $\eta = 1.6$, quỹ đạo xuất hiện có sự rẽ nhánh và chuyển động là 2-tuần hoàn. Điểm rẽ nhánh trên biểu đồ rẽ nhánh có thể quan sát trên hình 9.

Trên hình 11, ta chọn bốn điểm tần số khác là $\eta = 2.6, 4.0, 5.0, 6.0$ cho mô phỏng quỹ đạo chuyển động trên mặt phẳng pha. Tại điểm $\eta = 2.6$ có thể quan sát là ta thu được một quỹ đạo 3-tuần hoàn. Các điểm tần số $\eta = 4.0, 5.0, 6.0$ đều cho quỹ đạo là chuyển động hỗn độn. Tuy nhiên, ở tần số cao, sự thay đổi vị trí của quỹ đạo trên mặt phẳng pha là không lớn, hình ảnh quỹ đạo sẽ được "tô đậm" sau khoảng thời gian khá lớn. Độ dày của miền "tô đậm" là không lớn. Như vậy, ta vẫn thấy ứng xử của đáp ứng khá gần với nhau sau mỗi chu kỳ. Sự thay đổi độ dày miền tô đậm ở pha trượt là nhiều hơn pha dính cho thấy khi chuyển động với tần số cao pha dính vẫn hiện diện nhưng trong thời gian ngắn.

5. KẾT LUẬN

Điểm mới của nghiên cứu là khảo sát dao động của hệ có yếu tố ma sát và cản phi tuyến đồng thời, vốn là hai nguồn gây ra tính chất ứng xử phức tạp của hệ. Trong khuôn khổ của nghiên cứu, vận tốc băng tải được xét là tương đối thấp, mô hình LuGre được sử dụng để có thể bắt được hiệu ứng Stribeck. Dưới tác dụng của kích động ngoài tuần hoàn, tùy vào miền tần số kích động mà ứng xử của hệ có thể là dao động dính - trượt hoặc trở nên chuyển động hỗn độn. Chuyển động tuần hoàn xảy ra ở miền tần số thấp, trong khi đó chuyển động hỗn độn xảy ra ở các tần số cao hơn. Tuy nhiên, vì là chuyển động vận tốc thấp nên ứng xử của hệ trong chuyển động hỗn độn vẫn biểu thị được tính chất chuyển động dính - trượt giống như không có tải ngoài tuần hoàn; vị trí của quỹ đạo là khó đoán định nhưng độ dày của quỹ đạo chuyển động trong một thời gian dài có sự thay đổi không nhiều trong miền tần số cao. Ảnh hưởng của cản phi tuyến lên đáp ứng của hệ cũng được khảo sát chi tiết.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. A.H. Brian, "*Control of Machines with Friction*," Springer Science+Business Media, New York 1991.
- [2]. H. Olsson, K.J. Astrom, C. Canudas de Wit, M. Cafvert, P. Lischinsky, "*Friction Models and Friction Compensation*," European Journal of Control, **4**(1998), pp. 176-195.
- [3]. B. Armstrong-Helouvry, "*Stick slip and control in low-speed motion*," IEEE Transactions on Automatic Control, **38**(1993), pp. 1483-1496.
- [4]. M.J. Moharrami, C. de Arruda Martins, H. Shiri, "*Nonlinear integrated dynamic analysis of drill strings under stick-slip vibration*," Applied Ocean Research, **108**(2021), pp. 102521.
- [5]. Jih-Hua Chin, Chun-Chien Chen, "*A study of stick-slip motion and its influence on the cutting process*," International Journal of Mechanical Sciences, **35**(1993), pp. 353-370.
- [6]. S.W. Yoon, M.W. Shin, W.G. Lee, H. Jang, "*Effect of surface contact conditions on the stick-slip behavior of brake friction material*," Wear, **294-295** (2012), pp. 305-312.
- [7]. J. Behrendt, C. Weiss, N.P. Hoffmann, "*A numerical study on stick-slip motion of a brake pad in steady sliding*," Journal of Sound and Vibration, **330**(2011), pp. 636-651.
- [8]. B. Feeny, A. Guran, N. Hinrichs, K. Popp, "*A historical review on dry friction and stick-slip phenomena*," Applied Mechanics Reviews, **51**(1998), pp. 321-341.
- [9]. S. Kato, K. Yamaguchi, T. Matsubayashi, "*Stick-slip motion of machine tool slideway*," Journal of Engineering for Industry, No. **73**-DET-32(1974), pp. 557-565.
- [10]. H.I. You, J.H. Hsia, "*The influence of friction-speed relation on the occurrence of stick-slip motion*," Transactions of the ASME, **117**(1995), pp. 450-455.
- [11]. I.V. Ponomarev, A.E. Meyerovich, "*Surface roughness and effective stick-slip motion*," Physical Review E, **67**(2003), pp. 026302.
- [12]. Y. Kligerman, M. Varenberg, "*Elimination of stick-slip motion in sliding of split or rough surface*," Tribology Letters, **53**(2014), pp. 395-399.
- [13]. W. Lin, J.P. Chavez, Y. Liu, Y. Yang, Y. Kuang, "*Stick-slip suppression and speed tuning for a drill-string system via proportional-derivative control*," Applied Mathematical Modelling, **82**(2020), pp. 487-502.
- [14]. X. Zheng, V. Agarwal, X. Liu, B. Balachandran, "*Nonlinear instabilities and control of drill-string stick-slip vibrations with consideration of state-dependent delay*," Journal of Sound and Vibration, **473**(2020), pp. 11523.

- [15].H.S. Han, K.H. Lee, "Experimental verification of the mechanism on stick-slip nonlinear friction induced vibration and its evaluation method in water-lubricated ster," Ocean Engineering, **182**(2019), pp. 147-161.
- [16].A.R. Crowther, R. Singh, "Analytical investigation of stick-slip motions in coupled brake-driveline systems," Nonlinear Dynamics, **50**(2007), pp. 463-481.
- [17].C. Canudas de Wit, "Comments on: A new model for control of systems with friction," IEEE Transactions on Automatic Control, **43**(1998), pp. 1189-1190.
- [18].P. Saha, M. Wiercigroch, A. Stefanski, "A modified LuGre friction model for an accurate prediction of friction force in the pure sliding regime," International Journal of Non-linear Mechanics **80**(2016) 122-131.
- [19].D. Pikunov, A. Stefanski, "Numerical analysis of the friction-induced oscillator of Duffing's type with modified LuGre friction model," Journal of Sound and Vibration, **440**(2019), pp. 23-33, DOI: 10.1016/j.jsv.2018.10.003.
- [20].N. N. Hieu, P. N. Chung, "Analysis of stability and stick-slip motion of a friction-induced vibrating system with dwell-time effect," International Journal of Mechanical Sciences, **205**(2021), pp. 106605.

ABSTRACT

RESPONSE ANALYSIS OF LOW-VELOCITY MOTION OF A FRICTION-INDUCED VIBRATING SYSTEM WITH NONLINEAR DAMPING UNDER PERIODIC EXCITATION

In this study, the authors focus on an analysis of the low-velocity motion of a stick-slip vibrating system under the effect of periodic external loads and friction forces described by the LuGre model. For motion in the low-velocity domain, the LuGre model can capture the Stribeck effect in which the friction force decreases as the velocity increases. The system model contains a mass placed on a conveyor belt that moves at a near-zero constant velocity. The authors show that, under the effect of periodic loading, the behavior of the system under consideration is rich, in which periodic motions or chaotic motions may appear. Characteristics of motion are investigated in detail through a numerical computation approach.

Keywords: Dry friction; Stick – slip motion; Stribeck effect; Periodic response; Chaos.