BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VÀ XẤP XỈ TUYẾN TÍNH

ThS Nguyễn Thu Hằng

Hà nội, tháng 6 năm 2022

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ-ĐỊA CHẤT

BÁO CÁO HỌC THUẬT

MẶT PHẲNG TIẾP XÚC VÀ XẤP XỈ TUYẾN TÍNH

Xác nhận của bộ môn

Hà nội, tháng 6 năm 2022

MỤC LỤC

LỜI GIỚI THIỆU

Đổi mới phương pháp dạy học gắn với thực tiễn, phù hợp với nhu cầu là vấn đề đang được quan tâm. Làm thế nào để người học nói chung và sinh viên nói riêng cảm thấy hứng thú với Toán học, hiểu được vai trò và ứng dụng của Toán học trong đời sống thực tế và thấy được vẻ đẹp của những con số trong chương trình đạo tạo là mục tiêu đang được các thầy cô hướng tới. Vì thế, việc xây dựng đổi mới giáo án, bổ sung thêm nhiều ứng dụng thực tiễn trong bài giảng cũng là nội dung mà tôi chú ý.

Giải tích được biết đến trong lịch sử là phép tính vô cùng bé, tập trung vào các giới hạn, hàm số, đạo hàm, tích phân và chuỗi vô hạn. Trong đó, đạo hàm của hàm một biến tại một giá trị đầu vào được chọn, khi nó tồn tại, là độ dốc của đường tiếp tuyến với đồ thị của hàm tại điểm đó. Đường tiếp tuyến là xấp xỉ tuyến tính tốt nhất của hàm gần giá trị đầu vào đó. Vì lí do này, đạo hàm thường được mô tả là "tốc độ thay đổi tức thời", "tỉ lệ thay đổi tức thời" của biến phụ thuộc so với biến độc lập. Quá trình tìm một đạo hàm gọi là phép tính vi phân. Quá trình ngược lại được gọi là phép lấy tích phân. Phép tính vi phân và phép tính tích phân tạo thành hai hoạt động cơ bản trong giải tích. Để giúp sinh viên hiểu hơn về phép tính vi phân và ứng dụng, tôi chọn làm báo cáo học thuật "Mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính".

Báo cáo học thuật chia làm ba phần

Phần 1: Trình bày về xấp xỉ tuyến tính của hàm một biến số.

Phần 2: Trình bày mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính của hàm nhiều biến.

Phần 3. Trình bày về mặt phẳng tiếp xúc xủa mặt tham số

1. Xấp xỉ tuyến tính của hàm một biến số

Cho hàm $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Nói cách khác

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0).\Delta x + o(\Delta x),$$

trong đó, $\Delta x = x - x_0, o(\Delta x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn Δx khi $\Delta x \to 0$.

Khi $|\Delta x|$ tương đối nhỏ, ta có công thức tính xấp xỉ sau đây

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0).\Delta x = f'(x_0)(x - x_0).$$

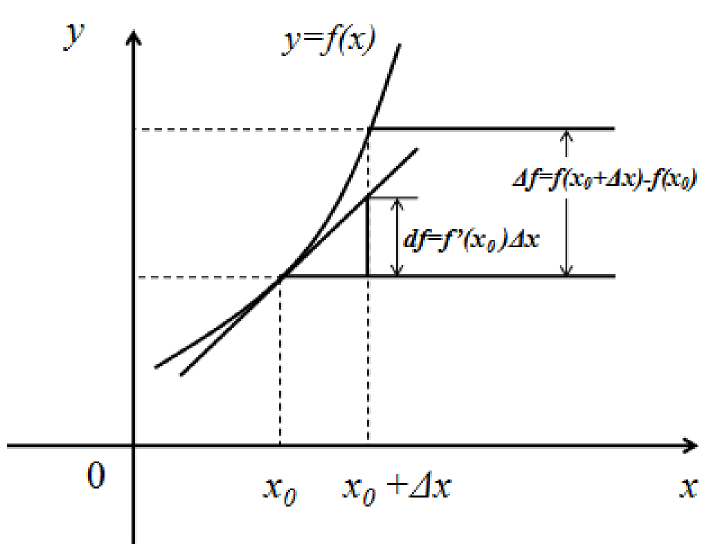
Do đó,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) \text{ (khi } x \text{ đủ gần } x_0\text{)}.$$

Định nghĩa 1.1. Cho hàm f khả vi tại x_0. Xấp xỉ tuyến tính của f tại x_0 là hàm

$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ta có thể thấy rằng, xấp xỉ tuyến tính là đa thức Taylor bậc một của hàm $f(x)$ tại điểm x_0. Ta cũng thấy được mối liên hệ giữa xấp xỉ tuyến tính và vi phân của hàm số như sau



$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)dx = df(x_0).$$

Nói cách khác

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0), (\text{khi } x \text{ đủ gần } x_0).$$

Ví dụ 1.2. Tính giá trị gần đúng $A = \sqrt[5]{33}$.

<u>*Lời giải*</u>.

Nhận xét rằng $A = \sqrt[5]{32+1}$. Xét hàm $f(x) = \sqrt[5]{x}$, với $x_0 = 32, x = 33$ thì $\Delta x = 33 - 32 = 1$.

Ta có

$A = \sqrt[5]{33} = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0).\Delta x = f(32) + f'(32).1.$

Thay $f(32) = 2; f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$; $f'(32) = \frac{1}{80}$ ta được

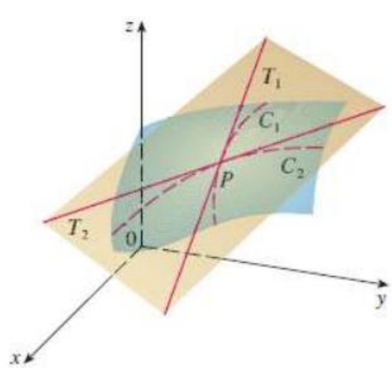
$A \approx 2 + \frac{1}{80}.1 = 2{,}0125.$

So sánh với kết quả bấm máy tính $\sqrt[5]{33} = 2{,}01235$.

2. Mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính của hàm nhiều biến

2.1. Mặt phẳng tiếp xúc

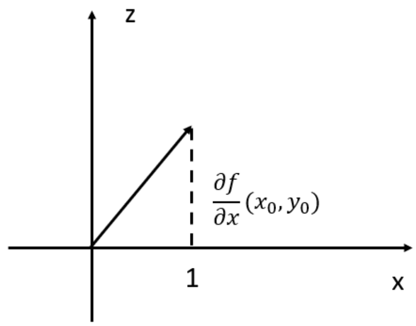
Giả sử một mặt S có phương trình $z = f(x, y)$, trong đó f có các đạo hàm riêng cấp một liên tục. Lấy $P(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ là một điểm nằm trên S. Gọi C_1 và C_2 là các đường cong nằm trên S, nhận được bằng cách lấy giao tuyến của các mặt phẳng $x = x_0$ và $y = y_0$. Khi ấy P nằm trên cả hai đường cong C_1 và C_2. Gọi T_1và T_2 là các đường thẳng tiếp xúc với C_1 và C_2 tại điểm P. Khi ấy mặt phẳng chứa T_1 và T_2 được gọi là mặt phẳng tiếp xúc với mặt S (xem hình vẽ dưới đây)



Như ta đã biết, phương trình mặt phẳng tổng quát đi qua điểm P là

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \quad (1)$$

Để viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc (α) của S tại P ta cần tìm vector pháp tuyến $\vec{n}=(a,b,c)$. Ta sẽ tìm hai vector chỉ phương $\overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{v_2}$ lần lượt của T_1 và T_2. Khi đó, $\vec{n}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}$. Ta thấy, $\overrightarrow{v_2}$ nằm trên (song song) với mặt phẳng Oxz và có độ dốc là $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ suy ra $\overrightarrow{v_2}=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$



Tương tự, $\overrightarrow{v_1}=\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$

Suy ra

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ 1 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)i-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)j+k$$

Do đó, mặt phẳng tiếp diện (α) có phương trình

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+(z-z_0)=0$$

Tương tự, mặt phẳng tiếp diện của mặt (S) cho bởi phương trình $F(x,y,z)=0$ tại (x_0,y_0,z_0) là

$$-\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)-\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

Ví dụ 2.1. Viết phương trình mặt phẳng tiếp diện của mặt $(S)\colon z=x^2+y^2$ tại điểm (1,2,5)

Lời giải.

Ta có $z'_x = 2x \rightarrow z'_x(1,2) = 2$

$$z'_y = 2y \rightarrow z'_y(1,2) = 4$$

Vậy phương trình mặt phẳng tiếp diện với (S) tại (1,2,5) là

$$-2(x-1) - 4(y-2) + (z-5) = 0 \text{ hay}$$

$$2x + 4y - z - 5 = 0$$

2.2. Xấp xỉ tuyến tính

Định nghĩa 2.2. Cho hàm $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng tại điểm (x_0, y_0). Xấp xỉ tuyến tính của hàm f tại (x_0, y_0) được cho bởi

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Chú ý rằng phương trình trên cũng biểu diễn mặt phẳng tiếp diện của (S) tại điểm $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0,y_0))$. Từ đó ta thấy được ý tưởng của việc xấp xỉ tuyến tính đó là, nếu có một điểm (x_0, y_0) mà tại đó ta biết được giá trị của hàm f thì giá trị của f tại gần điểm (x_0, y_0) có thể tính được xấp xỉ. Hơn nữa mặt phẳng dùng để tìm xấp xỉ tuyến tính cũng chính là mặt phẳng tiếp diện tại (x_0, y_0).

Ví dụ 2.3. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm $z = 3 + \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$ tại điểm (-4,3).

Lời giải. Ta có

$$z'_x = \frac{x}{8} \rightarrow z'_x(-4,3) = -\frac{1}{2}$$

$$z'_y = \frac{2}{9}y \rightarrow z'_y(-4,3) = \frac{2}{3}$$

Xấp xỉ tuyến tính là

$$L(x,y) = 5 - \frac{1}{2}(x+4) + \frac{2}{3}(y-3).$$

2.3. Vi phân với xấp xỉ tuyến tính

Cho hàm $z = f(x,y)$ xác định trên lân cận của (x_0, y_0). Cho x số gia Δx, y số gia Δy. Khi đó số gia của hàm số tương ứng là

$$\Delta z(x_0,y_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0).$$

Ta nói f khả vi tại (x_0, y_0) nếu $\Delta z(x_0, y_0)$ có thể viết dưới dạng

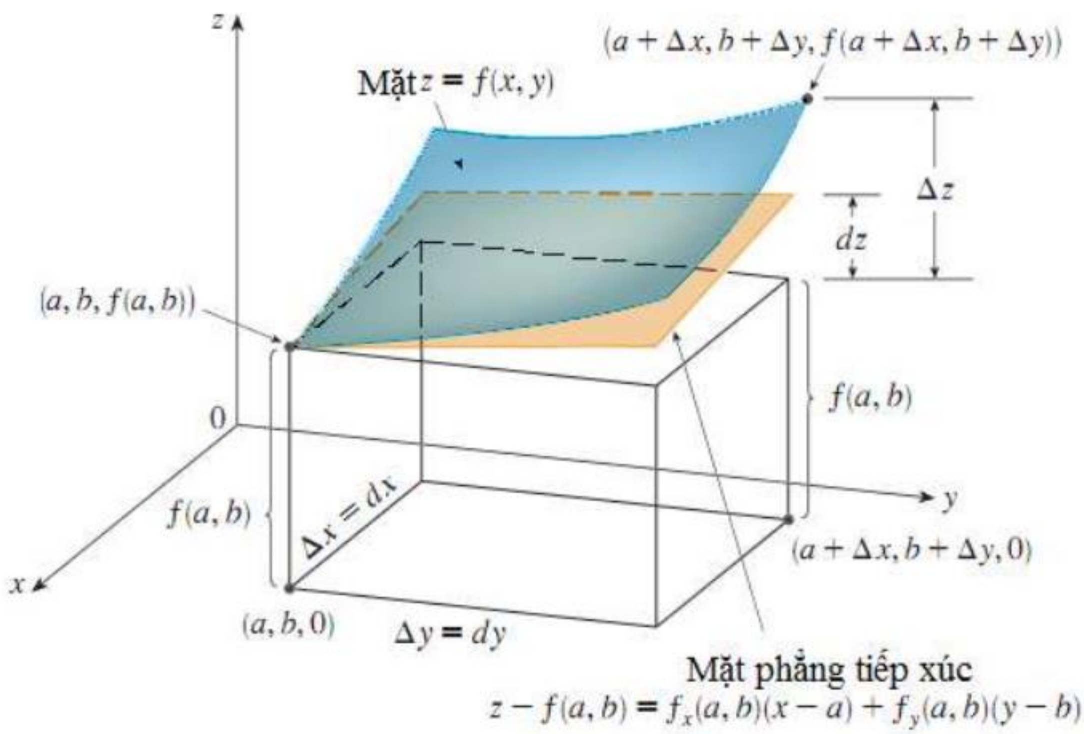
$$\Delta z(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

trong đó, $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ và $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ khi $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$.

Kí hiệu vi phân $dz = f'_x dx + f'_y dy$.

Định lí 2.4. Nếu hàm $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng f'_x và f'_y tồn tại, liên tục trên lân cận của (x_0, y_0) thì khả vi tại (x_0, y_0)

Hình vẽ sau đây biểu diễn vi phân của hàm $z = f(x, y)$ tại (a, b) và giá trị $\Delta z(a, b)$



Đối với hàm nhiều biến hơn, chúng ta cũng có công thức tương tự. chẳng hạn như với hàm ba biến $w = f(x, y, z)$

$$f(x, y, z) \approx f(a, b, c) + f'_x(a, b, c)(x - a) + f'_y(a, b, c)(y - b) + f'_z(a, b, c)(z - c)$$

Và vi phân

$$dw(a, b, c) = \frac{\partial w}{\partial x}(a, b, c)\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}(a, b, c)\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}(a, b, c)\Delta z.$$

3. Mặt phẳng tiếp xúc của mặt tham số

Giả sử mặt tham số S được tạo ra bởi hàm vectơ có phương trình là

$$r(u, v) = x(u, v)i + y(u, v)j + z(u, v)k.$$

Nói cách khác, phương trình tham số của mặt S là

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

Gọi P_0 là điểm nằm trên S. Khi đó vector vị trí là $r(u_0, v_0)$. Nếu chúng ta giữ cố định $u = u_0$ thì khi ấy $r = (u_0, v)$ sẽ tạo nên đường cong C_v nằm trên S. Khi đó vector tiếp xúc với C_v tại P_0 là

$$r_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)i + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)j + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)k$$

Tương tự, nếu ta cố định v bằng cách đặt $v = v_0$, thì chúng ta sẽ nhận được đường cong C_u nằm trên S và vectơ tiếp xúc tại P_0 là

$$r_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)i + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)j + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)k$$

Nếu vectơ $r_u \times r_v \neq 0$ thì S được gọi là một mặt trơn. Với mộ t mặt trơn, mặt phẳng tiếp xúc chính là mặt phẳng chứa các vectơ r_u và r_v và vectơ $r_u \times r_v$ được gọi là vectơ pháp của mặt tiếp xúc.

KẾT LUẬN

Báo cáo đã trình bày về một trong những ứng dụng của đạo hàm và vi phân, cách viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc và xấp xỉ tuyến tính của hàm số. Tài liệu có thể dùng kể kết hợp trong quá trình giảng dạy. Tuy nhiên, đây chỉ là một nội dung nhỏ trong vô vàn những ứng dụng thú vị của phép tính vi tích phân. Trong thời gian tới, tác giả sẽ tiếp tục tìm hiểu thêm nhiều ứng dụng thực tế của Toán học để ngày càng nâng cao chất lượng bài giảng hơn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. N.T.Thanh, N.T.Hằng, N.T.Lâm, N.T.Hằng, N.T.Linh, M.V.Thuận, *Giáo án giải tích I*, NXB ĐHQG Hà Nội 2020.

2. N.Đ.Trí, T.V.Đĩnh, N.H.Quỳnh, *Toán học cao cấp, tập một*, NXB Giáo dục, 2008.

3. N.Đ.Trí, T.V.Đĩnh, N.H.Quỳnh, *Toán học cao cấp, tập hai*, NXB Giáo dục, 2008.