

Dao động tham số của hệ phi tuyến cấp ba có chứa ma sát Coulomb, ma sát động và cản nhớt cấp phân số

Bùi Thị Thúy*

* Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu cộng hưởng tham số của hệ phi tuyến cấp ba có chứa ma sát Coulomb, ma sát động và cản nhớt cấp phân số sử dụng phương pháp tiệm cận. Nghiệm xấp xỉ giải tích được xác định và đường cong biên độ tần số được thiết lập. Sau đó, khảo sát điều kiện ổn định của nghiệm cộng hưởng bằng lý thuyết Lyapunov. Ảnh hưởng của các tham số trong đạo hàm cấp phân số đối với biên độ dao động dừng, đường cong biên độ tần số cũng được xem xét.

Từ khóa: đạo hàm cấp phân số; dao động tham số; phương pháp tiệm cận; cộng hưởng; đường cong biên độ tần số.

1. Mở đầu

Phép tính cấp phân số gồm những toán tử đạo hàm và tích phân cấp phân số được tổng quát hóa từ phép tính cấp nguyên [Miller và Ross, 1993; Oldham và Spanier, 1974; Podlubny, 1999; Ross, 1975]. Định nghĩa thường được sử dụng nhiều nhất là toán tử đạo hàm cấp phân số của Riemann – Liouville. Trong bài báo này, ta sử dụng định nghĩa Riemann – Liouville. Các ứng dụng của phép tính cấp phân số trong kỹ thuật và vật lý thu hút được rất nhiều sự chú ý của các nhà khoa học [Bagley và Torvik, 1983; Fukunaga, Shimizu và Nasuno, 2009; Gaul và Chen, 1993; Nguyen Van Khang, Bui Thi Thuy và Truong Quoc Chien, 2016; Nguyen Van Khang và Truong Quoc Chien, 2016].

Dựa vào các kết quả của các tài liệu [Mitropolskii và Nguyen Van Dao, 1997; Nguyen Van Dao, 1979; Nguyen Van Dao, 1998], dao động tham số của hệ phi tuyến cấp ba có chứa ma sát Coulomb, ma sát động và cản nhớt cấp phân số được nghiên cứu bằng phương pháp tiệm cận. Bài báo gồm 5 phần. Phần 2 trình bày nghiệm xấp xỉ cho cộng hưởng điều hòa của hệ phi tuyến cấp ba. Dựa trên lý thuyết Lyapunov, điều kiện tồn tại của cộng hưởng điều hòa và điều kiện ổn định của nghiệm dừng được đề cập trong phần 3. Ảnh hưởng của các tham số cấp phân số đối với đường cong biên độ tần số được phân tích trong phần 4. Phần 5 bao gồm các kết luận chính của bài báo.

2. Thiết lập biểu thức nghiệm bằng phương pháp tiệm cận

Xét dao động tham số của hệ được mô tả bởi phương trình vi phân cấp ba

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x + \varepsilon [kx^3 + h\dot{x}^3 + h_0 \text{sign } \dot{x} + h_2 \dot{x}^2 \text{sign } \dot{x} + \delta_p D^p x - cx \cos \Omega t] = 0 \quad (1)$$

Trong đó $\alpha, \omega, k, h, \delta_p, c, \Omega$ là những hằng số, h_0, h_2 là hằng số dương, $D^p x$ là đạo hàm cấp phân số của $x(t)$.

$$\text{Giả thiết hệ có cộng hưởng } \varepsilon \sigma = \omega^2 (1 - \eta^2), \quad \eta = \frac{\Omega}{2\omega} \quad (2)$$

Khi đó phương trình (1) có thể được viết lại như sau

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \frac{\Omega^2}{4} \dot{x} + \alpha \frac{\Omega^2}{4} x + \varepsilon f(x, \dot{x}, \ddot{x}, D^p x) - \varepsilon cx \cos \Omega t = 0 \quad (3)$$

$$\text{Trong đó } f(x, \dot{x}, \ddot{x}, D^p x) = \sigma \dot{x} + \alpha \sigma x + kx^3 + h\dot{x}^3 + h_0 \text{sign } \dot{x} + h_2 \dot{x}^2 \text{sign } \dot{x} + \delta_p D^p x \quad (4)$$

Nghiệm riêng hai tham số của phương trình (3) được tìm dưới dạng

* Tác giả liên hệ

Email: buithithuy@humg.edu.vn

$$x = a \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \psi\right) + \varepsilon u_1\left(a, \psi, \frac{\Omega}{2}t\right) + \varepsilon^2 u_2\left(a, \psi, \frac{\Omega}{2}t\right) + \dots \quad (5)$$

Trong đó $u_s(a, \psi, \theta)$ là những hàm chu kỳ 2π đối với ψ và θ ; a và ψ được xác định từ những phương trình sau

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(a, \psi) + \dots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \varepsilon B_1(a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(a, \psi) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Để xác định các hàm u_s, A_s, B_s ta tính các đạo hàm $\frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^3x}{dt^3}$ và thế vào phương trình (3)

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\Omega^3}{8} a \sin \varphi + \varepsilon \left(-\frac{3}{4} \Omega^2 A_1 \cos \varphi + \frac{3}{4} \Omega^2 a B_1 \sin \varphi + \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} \right) \right\} + \alpha \left\{ -\frac{\Omega^2}{4} a \cos \varphi + \varepsilon (-\Omega A_1 \sin \varphi \right. \\ &\left. - \Omega a B_1 \cos \varphi + \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \right\} + \frac{\Omega^2}{4} \left\{ -\frac{\Omega}{2} a \sin \varphi + \varepsilon \left(A_1 \cos \varphi - a B_1 \sin \varphi + \frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \right\} + \alpha \frac{\Omega^2}{4} \{ a \cos \varphi + \varepsilon u_1 \} \\ &+ \varepsilon^2 \dots = -\varepsilon f \left[a \cos \varphi, -\frac{\Omega}{2} a \sin \varphi, -\frac{\Omega^2}{4} a \cos \varphi, D^p (a \cos \varphi) \right] + \varepsilon a c \cos \varphi \cos \Omega t \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Trong đó} \quad \varphi = \frac{\Omega}{2}t + \psi \quad (8)$$

So sánh các hệ số của ε ta được

$$\frac{\partial u_1^3}{\partial t^3} + \alpha \frac{\partial u_1^2}{\partial t^2} + \frac{\Omega^2}{4} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \alpha \frac{\Omega^2}{4} u_1 - \left(\frac{\Omega^2}{2} A_1 + \Omega \alpha a B_1 \right) \cos \varphi + \left(\Omega^2 \frac{a}{2} B_1 - \Omega \alpha A_1 \right) \sin \varphi = -f_0 + a c \cos \varphi \cos \Omega t, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} f_0 &= -\sigma \frac{\Omega}{2} a \sin \varphi + \alpha \sigma a \cos \varphi + k a^3 \cos^3 \varphi - h \frac{\Omega^3}{8} a^3 \sin^3 \varphi + h_0 \operatorname{sign} \left(-\frac{\Omega}{2} a \sin \varphi \right) \\ &+ h_2 \frac{\Omega^2}{4} a^2 \sin^2 \varphi \operatorname{sign} \left(-\frac{\Omega}{2} a \sin \varphi \right) + a \delta_p \left(\frac{\Omega}{2} \right)^p \left[\cos \frac{p\pi}{2} \cos \varphi - \sin \frac{p\pi}{2} \sin \varphi \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Khai triển Fourier hàm f_0 ta có

$$f_0 = \sum_{m=0}^{\infty} (r_m(a) \cos m\varphi + s_m(a) \sin m\varphi) \quad (11)$$

Với $\langle \rangle$ là toán tử trung bình

$$r_0 = \langle f_0 \rangle, \quad r_m = 2 \langle f_0 \cos m\varphi \rangle, \quad s_m = 2 \langle f_0 \sin m\varphi \rangle, \quad (12)$$

Hàm u_1 thoả mãn phương trình (7) cũng được tìm dưới dạng chuỗi

$$u_1 = \sum_n [G_n(a, \psi) \cos n\varphi + H_n(a, \psi) \sin n\varphi] \quad (13)$$

Với điều kiện u_1 không chứa các số hạng cộng hưởng. Điều kiện này sẽ tương đương với điều kiện là hàm u_1 không chứa $\cos \varphi, \sin \varphi$.

Thay thế phương trình (11) và (13) vào phương trình (9) ta có

$$\begin{aligned} &\frac{\Omega^2}{4} \sum_n (n^2 - 1) \left[\left(\Omega \frac{n}{2} G_n - \alpha H_n \right) \sin n\varphi - \left(\Omega \frac{n}{2} H_n + \alpha G_n \right) \cos n\varphi \right] - \left(\frac{\Omega^2}{2} A_1 + \Omega \alpha a B_1 \right) \cos \varphi \\ &+ \left(\frac{\Omega^2}{2} a B_1 - \Omega \alpha A_1 \right) \sin \varphi = \frac{ac}{2} (\cos 2\psi \cos \varphi + \sin 2\psi \sin \varphi + \cos 2\psi \cos 3\varphi + \sin 2\psi \sin 3\varphi) \\ &- \sum_{m=0}^{\infty} (r_m \cos m\varphi + s_m \sin m\varphi), \end{aligned} \quad (14)$$

So sánh các hàm điều hoà $\cos \varphi, \sin \varphi$ và các hàm điều hoà khác ta có

$$\begin{cases} \frac{\Omega^2}{2} A_1 + \Omega \alpha a B_1 = -\frac{ac}{2} \cos 2\psi + r_1 \\ \Omega \alpha A_1 - \frac{\Omega^2}{2} a B_1 = -\frac{ac}{2} \sin 2\psi + s_1 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \frac{\Omega^2}{4} (n^2 - 1) \left(\Omega \frac{n}{2} H_n + \alpha G_n \right) = r_n - \frac{ac}{2} \cos 2\psi \delta_{3n} \\ \frac{\Omega^2}{4} (n^2 - 1) \left(\Omega \frac{n}{2} G_n - \alpha H_n \right) = -s_n + \frac{ac}{2} \sin 2\psi \delta_{3n} \end{cases} \quad (16)$$

$$\text{Trong đó } (n \neq 1) \text{ và } \delta_{3n} = \begin{cases} 0 & (n \neq 3) \\ 1 & (n = 3) \end{cases} \quad (17)$$

Giải phương trình (15) và (16) ta có

$$\begin{cases} G_n = \frac{\alpha r_n - \frac{\Omega}{2} n s_n + \left(\frac{\Omega}{4} n a c \sin 2\psi - \frac{\alpha}{2} a c \cos 2\psi \right) \delta_{3n}}{\frac{\Omega^2}{4} (n^2 - 1) \left(\alpha^2 + \frac{\Omega^2}{4} n^2 \right)} \\ H_n = \frac{\frac{\Omega}{2} n r_n + \alpha s_n - \left(\frac{\Omega}{4} n a c \cos 2\psi + \frac{\alpha}{2} a c \sin 2\psi \right) \delta_{3n}}{\frac{\Omega^2}{4} (n^2 - 1) \left(\alpha^2 + \frac{\Omega^2}{4} n^2 \right)} \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\alpha \langle f_0 \sin \varphi \rangle + \omega \langle f_0 \cos \varphi \rangle - \frac{\omega}{4} a c \cos 2\psi - \frac{1}{4} a c \alpha \sin 2\psi}{\omega (\alpha^2 + \omega^2)} \\ B_1 = \frac{\alpha \langle f_0 \cos \varphi \rangle - \omega \langle f_0 \sin \varphi \rangle + \frac{\omega}{4} a c \sin 2\psi - \frac{1}{4} a c \alpha \cos 2\psi}{\Omega a (\alpha^2 + \omega^2)} \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{Với } \text{sign } \dot{x} = \begin{cases} 1 & (\dot{x} > 0) \\ -1 & (\dot{x} < 0) \\ 0 & (\dot{x} = 0) \end{cases} \quad (20)$$

$$R_0 = h_0 \text{sign} \left(-\frac{\Omega}{2} a \sin \varphi \right) + h_2 \frac{\Omega^2}{4} a^2 \sin^2 \varphi \text{sign} \left(-\frac{\Omega}{2} a \sin \varphi \right) + a \delta_p \left(\frac{\Omega}{2} \right)^p \left[\cos \frac{p\pi}{2} \cos \varphi - \sin \frac{p\pi}{2} \sin \varphi \right] \quad (21)$$

Từ phương trình (10) tính toán các giá trị trung bình $\langle f_0 \cos \varphi \rangle, \langle f_0 \sin \varphi \rangle$ thay vào phương trình (19) và sau khi tính toán ta tìm được các phương trình của xấp xỉ thứ nhất

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\alpha^2 + \omega^2} \left[\frac{3}{8} (k - \alpha \omega^2 h) a^3 - \frac{1}{4} a c \cos 2\psi - \frac{ac}{2\Omega} \alpha \sin 2\psi + R_1 \right] \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2a(\alpha^2 + \omega^2)} \left[\frac{1}{\Omega} (\alpha^2 + \omega^2) \sigma a + \frac{3}{4\Omega} (\alpha k + \omega^4 h) a^3 + \frac{ac}{4} \sin 2\psi - \frac{ac}{2\Omega} \alpha \cos 2\psi + R_2 \right] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\text{Trong đó } R_1 = \langle R_0 \cos \varphi \rangle + \frac{2\alpha}{\Omega} \langle R_0 \sin \varphi \rangle; \quad R_2 = \frac{2\alpha}{\Omega} \langle R_0 \cos \varphi \rangle - \langle R_0 \sin \varphi \rangle \quad (23)$$

Từ phương trình (23) tính toán các giá trị trung bình của $\langle R_0 \cos \varphi \rangle$ và $\langle R_0 \sin \varphi \rangle$ và thế vào phương trình (22)

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{\alpha^2 + \omega^2} \left[\frac{3}{8} (k - \alpha \omega^2 h) a^3 - \frac{1}{4} a c \cos 2\psi - \frac{ac}{2\Omega} \alpha \sin 2\psi + \frac{1}{2} a \delta_p \omega^{p-1} \left(\omega \cos \frac{p\pi}{2} - \alpha \sin \frac{p\pi}{2} \right) - \frac{2\alpha}{\pi \omega} h_0 - \frac{4\alpha}{3\pi} h_2 \omega a^2 \right] \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = \frac{\varepsilon}{2a(\alpha^2 + \omega^2)} & \left[\frac{1}{\Omega}(\alpha^2 + \omega^2)\sigma a + \frac{3}{4\Omega}(\alpha k + \omega^4 h)a^3 + \frac{ac}{4}\sin 2\psi \right. \\ & \left. - \frac{ac}{2\Omega}\alpha \cos 2\psi + \frac{1}{2}a\delta_p \omega^{p-1} \left(\alpha \cos \frac{p\pi}{2} + \omega \sin \frac{p\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi}h_0 + \frac{4}{3\pi}h_2 \omega^2 a^2 \right] \end{aligned} \quad (25)$$

Do đó trong xấp xỉ thứ nhất nghiệm riêng của phương trình (1) có dạng

$$x = a \cos\left(\frac{\Omega}{2}t + \psi\right) \quad (26)$$

Với a, ψ là nghiệm của các phương trình (24), (25).

3. Dao động cộng hưởng tham số của hệ

3.1. Đường cong biên độ tần số

Nghiệm dừng của hệ (24), (25) được xác định từ những phương trình sau

$$\begin{cases} \frac{c\alpha}{2\Omega}a_0 \sin 2\psi_0 + \frac{c}{4}a_0 \cos 2\psi_0 = \frac{3}{8}(k - \alpha\omega^2 h)a_0^3 + R_1 \\ \frac{c\alpha}{2\Omega}a_0 \cos 2\psi_0 - \frac{c}{4}a_0 \sin 2\psi_0 = \frac{1}{\Omega}(\alpha^2 + \omega^2)\sigma a_0 + \frac{3}{4\Omega}(\alpha k + \omega^4 h)a_0^3 + R_2 \end{cases} \quad (27)$$

Triệt tiêu pha ψ_0 ở (27), ta được phương trình của biên độ a_0

$$W(a_0, \Omega) = 0 \quad (28)$$

Trong đó

$$W(a_0, \Omega) = \left[\alpha\sigma + \frac{3}{4}ka_0^2 + \frac{2\omega^2}{a_0(\alpha^2 + \omega^2)} \left(R_1 + \frac{2\alpha}{\Omega}R_2 \right) \right]^2 + \omega^2 \left[\sigma + \frac{3}{4}\omega^2 ha_0^2 + \frac{1}{a_0(\alpha^2 + \omega^2)}(\Omega R_2 - 2\alpha R_1) \right]^2 - \frac{c^2}{4} \quad (29)$$

Thay R_1, R_2 từ phương trình (23) vào phương trình (29) và (28)

$$\left\{ \alpha\sigma + \frac{3}{4}ka_0^2 + \delta_p \omega^p \cos \frac{p\pi}{2} \right\}^2 + \omega^2 \left\{ \sigma + \frac{3}{4}\omega^2 ha_0^2 + \delta_p \omega^{p-1} \sin \frac{p\pi}{2} + \frac{4}{\pi\omega a_0}h_0 + \frac{8\omega}{3\pi}h_2 a_0 \right\}^2 - \frac{c^2}{4} = 0 \quad (30)$$

3.2. Khảo sát ổn định của dao động dừng

Xét tính ổn định của nghiệm dừng $a_0 \neq 0$ của hệ phương trình (27). Thay $a = a_0 + \delta a, \psi = \psi_0 + \delta \psi$ vào hệ phương trình (24), (25) với a_0, ψ_0 là nghiệm của hệ phương trình (27), ta có các phương trình biến phân sau

$$\frac{d\delta a}{dt} = \frac{\varepsilon}{\alpha^2 + \omega^2} \left\{ \left[\frac{3}{4}(k - \alpha\omega^2 h)a_0^2 + a_0 \left(\frac{R_1}{a_0} \right)' \right] \delta a - \left[\frac{2}{\Omega}(\alpha^2 + \omega^2)\sigma a_0 + \frac{3}{2\Omega}(\alpha k + \omega^4 h)a_0^3 + 2R_2 \right] \delta \psi \right\} \quad (31)$$

$$\frac{d\delta \psi}{dt} = \frac{\varepsilon}{2(\alpha^2 + \omega^2)} \left\{ \left[\frac{3}{2\Omega}(\alpha k + \omega^4 h)a_0 + \left(\frac{R_2}{a_0} \right)' \right] \delta a + \left[\frac{3}{4}(k - \alpha\omega^2 h)a_0^2 + \frac{2}{a_0}R_1 \right] \delta \psi \right\} \quad (32)$$

Phương trình đặc trưng của hệ

$$\lambda^2 - Z\lambda + S = 0 \quad (33)$$

Trong đó

$$Z = \frac{\varepsilon}{\alpha^2 + \omega^2} \left[\frac{3}{2} (k - \alpha\omega^2 h)a_0^2 + \frac{1}{a_0} (a_0 R_1)' \right], \quad S = \frac{\varepsilon^2 a_0}{4\omega^2 (\alpha^2 + \omega^2)} \frac{\partial W}{\partial a_0}, \quad (34)$$

Với W có dạng phương trình (29).

Do đó, điều kiện ổn định của nghiệm dừng là

$$3(k - \alpha\omega^2 h)a_0^3 + 2(a_0 R_1)' < 0, \quad (35)$$

$$\frac{\partial W}{\partial a_0} > 0 \quad (36)$$

Từ phương trình (23) và (35), (36) ta có điều kiện ổn định của hệ

$$3(k - \alpha\omega^2 h)a_0^3 + 2a_0\delta_p\omega^{p-1}\left(\omega\cos\frac{p\pi}{2} - \alpha\sin\frac{p\pi}{2}\right) - \frac{4\alpha h_0}{\pi\omega} - \frac{8\alpha}{\pi}h_2\omega a_0^2 < 0 \quad (37)$$

$$3ka_0\left(\alpha\sigma + \frac{3}{4}ka_0^2 + \delta_p\omega^p\cos\frac{p\pi}{2}\right) + 2\omega^2\left(\sigma + \frac{3}{4}\omega^2ha_0^2 + \delta_p\omega^{p-1}\sin\frac{p\pi}{2} + \frac{4}{\pi\omega a_0}h_0\right)\left(\frac{3}{2}\omega^2ha_0 - \frac{4}{\pi\omega a_0^2}h_0 + \frac{8\omega}{3\pi}h_2\right) > 0 \quad (38)$$

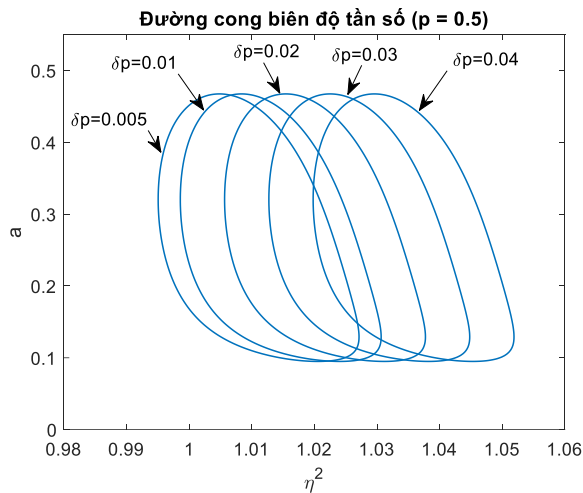
4. Đồ thị đường cong biên độ tần số

Chọn bộ tham số $\omega = 1, \alpha = 1, \varepsilon = 1, \delta_p = 0.01, p = 0.5, k = -0.1, h = 0.05, h_0 = 0.0025, c = 0.05, \eta = \frac{\Omega}{2\omega}$

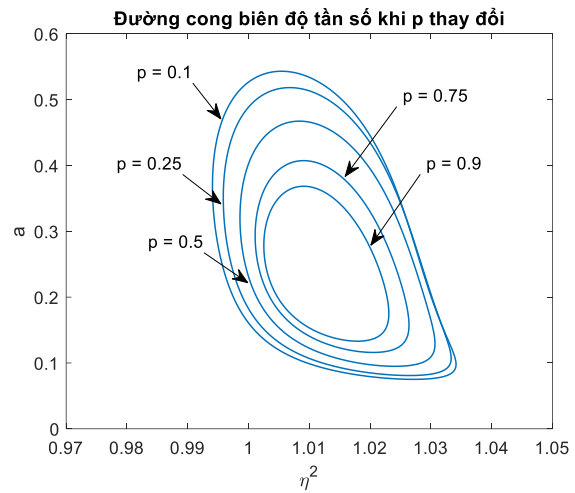
Phương trình vi phân dao động của hệ có dạng

$$\ddot{x} + \dot{x} + x + 1[-0.1x^3 + 0.05\dot{x}^3 + 0.0025\text{sign}\dot{x} + 0.01D^{1/2}x - 0.05x\cos\Omega t] = 0 \quad (39)$$

Dựa trên phương trình đường cong biên độ tần số (30), ta có các đường cong biên độ tần số được biểu diễn trên các hình 1-2. Ta nghiên cứu ảnh hưởng của các tham số đạo hàm cấp phân số đối với đường cong biên độ tần số. Nếu cấp phân số $p = 0.5$ và cho hệ số δ_p thay đổi, các đường cong biên độ tần số được biểu diễn trên hình 1. Nếu hệ số $\delta_p = 0.01$ và cấp phân số p thay đổi, ta được các đường cong biên độ tần số trên hình 2. Từ các đồ thị trên, ta nhận thấy rằng khi cấp phân số p tăng thì biên độ dao động giảm; hệ số δ_p tăng thì biên độ dao động không tăng nhưng pha dao động thay đổi.



Hình 1. Đường cong biên độ tần số khi δ_p thay đổi



Hình 2. Đường cong biên độ tần số khi p thay đổi

5. Kết luận

Nhiều hệ động lực được mô tả bởi các phương trình vi phân phi tuyến yếu. Trong báo cáo này áp dụng phương pháp tiệm cận tính toán dao động cộng hưởng của hệ phi tuyến cấp ba có chứa ma sát Coulomb, ma sát động và cản nhớt cấp phân số. Ưu điểm của phương pháp là tính đơn giản, đặc biệt trong việc tính toán các dao động cộng hưởng.

Sử dụng các phương trình biên độ tần số, các đường cong biên độ tần số được vẽ bằng phần mềm Matlab. Ảnh hưởng của các hệ số và cấp của đạo hàm cấp phân số đối với nghiệm cũng được minh họa thông qua các đường cong biên độ tần số. Do đó, hệ có thể được tối ưu hoá thông qua việc chọn các tham số cấp phân số phù hợp.

Tài liệu tham khảo

- Bagley, R.L and Torvik, P.J., 1983. A theoretical Basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. *J. of Rheology*, Vol. 27, pp. 201- 210.
- Fukunaga, M., Shimizu, N., Nasuno, H., 2009. A nonlinear fractional derivative model of impulse motion for viscoelastic materials. *Physica Scripta T136* 014010 (6p).
- Gaul, L. and Chen, C.M., 1993. Modeling of viscoelastic elastomer mounts in multibody systems. *Advanced multibody system dynamics*, pp. 257 – 276.
- Miller, K.S. and Ross, B., 1993. *An introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*. John Wiley & Sons Inc., New York, 384p.
- Mitropolskii, Yu.A and Nguyen Van Dao, 1997. *Applied Asymptotic Methods in Nonlinear Oscillations*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 356p.
- Nguyen Van Dao, 1979. *Nonlinear oscillations of higher order systems*. NCSR Vietnam, Hanoi, 64p.
- Nguyen Van Dao, 1998. *Stability of dynamic systems with examples and solved problems*. VNU Publishing House, Hanoi, 234p.
- Nguyen Van Khang, Bui Thi Thuy, Truong Quoc Chien, 2016. Resonance oscillation of third-order forced van der Pol system with fractional-order derivative. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol.11, pp. 041030.
- Nguyen Van Khang, Truong Quoc Chien, 2016. Subharmonic resonance of Duffing oscillator with fractional-order derivative. *ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 11, pp. 051018.
- Oldham, K.B., Spanier, J., 1974. *The Fractional Calculus*. Academic, New York, 234p.
- Podlubny, I., 1999. *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 340p.
- Ross, B., 1975. *A brief history and exposition of the fundamental theory of the fractional calculus*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 457, Springer-Verlag, New York, pp. 1-36.

ABSTRACT

Parametric oscillation of third-order nonlinear system with dynamic friction, Coulomb friction and fractional damping

Bui Thi Thuy

Hanoi University of Mining and Geology

In this paper, the parametric resonance of third-order parametric nonlinear system with dynamic friction, Coulomb friction and fractional damping is investigated using the asymptotic method. The approximately analytical solution for the system is first determined, and the amplitude–frequency equation of the oscillator is established. The stability condition of the resonance solution is then obtained by means of Lyapunov theory. Additionally, the effect of the fractional derivative on the system dynamics is analyzed. The effects of the two parameters of the fractional-order derivative, i.e., the fractional coefficient and the fractional order, on the amplitude–frequency curves are investigated.

Keywords: fractional-order derivative; parametric resonance; asymptotic method; amplitude-frequency curves.