

Mô hình hóa và thiết lập hệ phương trình chuyển động cho robot song song 3RRR có khâu đàn hồi

Đinh Công Đạt*
Trường Đại học Mở - Địa chất

TÓM TẮT

Báo cáo này trình bày việc thiết lập mô hình động lực của robot song song 3RRR có khâu đàn hồi. Mô hình hóa các phần tử đàn hồi bằng phương pháp Ritz – Galerkin. Hệ phương trình vi phân đại số mô tả chuyển động của robot được xây dựng dựa trên phương trình Lagrange loại 2.

Từ khóa: Robot song song; khâu đàn hồi; khớp quay.

1. Đặt vấn đề

Robot song song là robot có cấu trúc vòng kín trong đó các khâu được nối với nhau bằng các khớp động. Trong robot song song, khâu thao tác được nối với giá cố định bởi một số mạch động học, tức là nối song song với nhau và cũng hoạt động song song với nhau. Robot song song điển hình gồm có bàn máy động được nối với giá cố định, dẫn động theo nhiều nhánh song song hay còn gọi là các chân. Thường robot song song có số chân bằng số bậc tự do, được điều khiển bởi nguồn phát động đặt trên giá cố định hoặc ngay trên chân. Nguồn phát động sẽ truyền chuyển động cho chân chủ động bằng momen hoặc lực.

Robot song song có nhiều ưu điểm như khả năng chịu tải trọng lớn, độ cứng vững cao do kết cấu hình học của chúng, có thể thực hiện các thao tác phức tạp và hoạt động với độ chính xác cao. Vì những ưu điểm đó, robot song song được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực của công nghiệp đặc biệt là trong lĩnh vực cơ khí - tự động hóa. Tuy nhiên cùng với sự phát triển ngày càng cao đòi hỏi các robot phải được tối ưu hóa: hoạt động với tốc độ cao, mang tải trọng lớn, tốn ít năng lượng vận hành, chính vì thế các khâu của robot cần được thiết kế nhỏ gọn. Điều này dẫn đến các dao động khâu đàn hồi không mong muốn trong một số khâu (dài, mảnh) và làm giảm độ chính xác trong hoạt động của robot. Vì vậy để có thể điều khiển được chính xác hoạt động của bàn máy động ta cần phải thiết lập được mô hình chính xác nhất cho bàn máy động, mà ở đó yếu tố đàn hồi là không thể bỏ qua trong một số khâu của bàn máy.

Báo cáo này trình bày việc mô hình hóa các khâu đàn hồi của bàn máy động 3RRR bằng mô hình dầm Euler Bernoulli, sau đó rời rạc hóa phần tử khâu đàn hồi bằng phương pháp Ritz – Galerkin. Cuối cùng sử dụng phương trình Lagrange loại 2 để đưa ra hệ phương trình vi phân đại số mô tả chuyển động của bàn máy động. Báo cáo gồm bốn phần, đầu tiên là phần mở đầu, phần thứ hai là mô hình hóa, tiếp đó là quá trình thiết lập hệ phương trình chuyển động và cuối cùng là phần kết luận.

2. Mô hình hóa

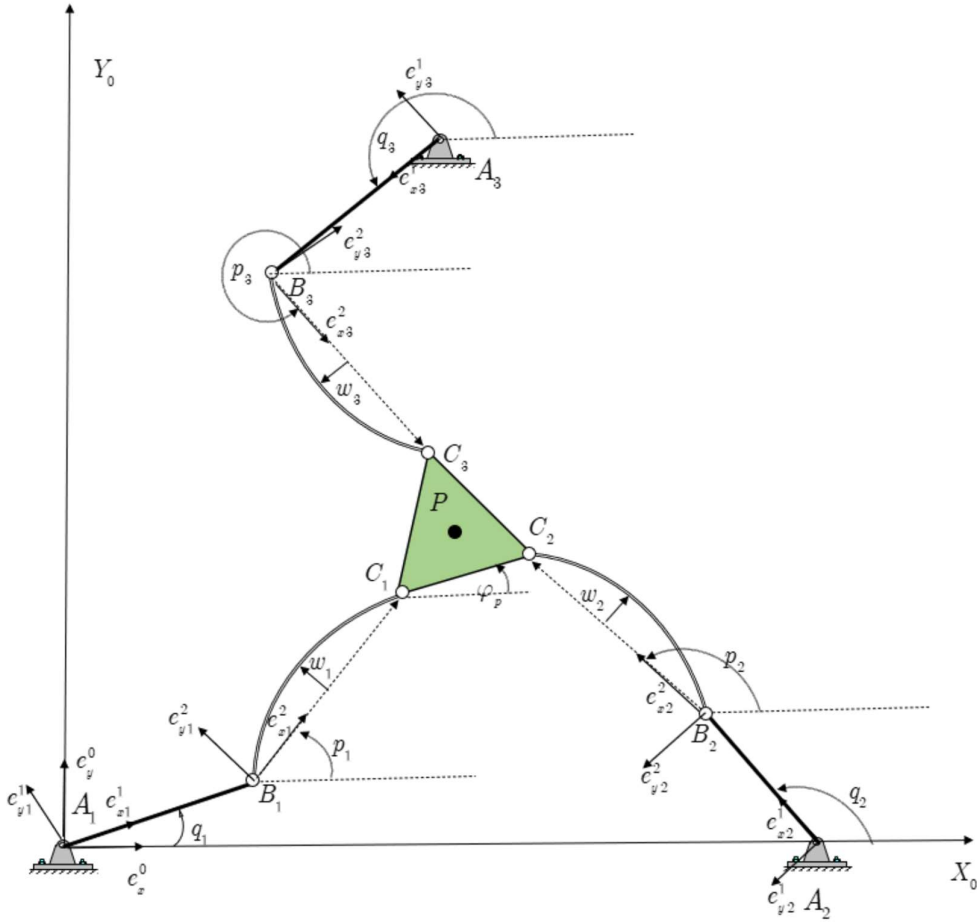
Xét một bàn máy động 3RRR chuyển động trong mặt phẳng ngang như hình 1. Các thanh A_iB_i coi như là các thanh rắn, chuyển động quay quanh các trục cố định đi qua A_i nhờ các mô men phát động. Bàn máy động hình tam giác đều chuyển động phẳng. Các thanh B_iC_i mô hình hóa như dầm Euler Bernoulli khâu đàn hồi với hai đầu bản lề.

Chọn Ox_0y_0 làm hệ cố định, q_i là góc hợp bởi thanh A_iB_i với trục Ox_0 , p_i là góc hợp bởi thanh B_iC_i với trục Ox_0 , các hệ trục $O_i x_i^1 y_i^1$ là các hệ quy chiếu động gắn với các thanh A_iB_i , các hệ trục $O_i x_i^2 y_i^2$ là các hệ quy chiếu động gắn với các thanh B_iC_i . Vị trí của bàn máy được xác định trong hệ quy chiếu cố định bởi các tọa độ suy rộng:

$$\eta_p = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ \varphi \end{bmatrix} \quad (1)$$

* Tác giả liên hệ

Email: dinhcongdat@humg.edu.vn



Hình 1. Bàn máy động 3RRR phẳng

Từ hình vẽ, ta có thể xác định được các công thức chuyển tọa độ giữa các hệ quy chiếu như sau

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_i & -\sin q_i \\ \sin q_i & \cos q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{xi}^1 \\ \vec{e}_{yi}^1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_{xi}^1 \\ \vec{e}_{yi}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos q_i & \sin q_i \\ -\sin q_i & \cos q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos p_i & -\sin p_i \\ \sin p_i & \cos p_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_{xi}^2 \\ \vec{e}_{yi}^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_{xi}^2 \\ \vec{e}_{yi}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos p_i & \sin p_i \\ -\sin p_i & \cos p_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{e}_x^0 \\ \vec{e}_y^0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

3. Hệ phương trình vi phân chuyển động

3.1. Động năng của hệ

Động năng của hệ bằng tổng động năng của các khâu robot

$$T = T_b + \sum_{i=1}^3 (T_{A_i B_i} + T_{B_i C_i}) \quad (6)$$

Trong đó động năng của bàn máy chuyển động phẳng

$$T_b = \frac{1}{2} m_p v_p^2 + \frac{1}{2} I_p \dot{\varphi}_p^2 \quad (7)$$

Động năng của các khâu rắn chuyển động quay

$$T_{A_i B_i} = \frac{1}{2} I_{i2} \dot{q}_i^2 \text{ với } i=1,2,3 \quad (8)$$

Động năng của các khâu đàn hồi được xác định như sau

$$T_{B_i C_i} = \frac{1}{2} \mu_{2i} A_{2i} \int_0^{b_i} v_{N_i}^2 dx_i \text{ với } i=1,2,3 \quad (9)$$

Ta có véc tơ định vị của điểm N_i bất kỳ trên thanh $B_i C_i$ được cho bởi

$$\begin{aligned} \vec{r}_{N_i} &= \vec{A_i B_i} + \vec{B_i N_i^*} + \vec{N_i^* N_i} = a_i \vec{e}_{x_i}^1 + x_i \vec{e}_{x_i}^2 + w_i \vec{e}_y^2 \\ \vec{r}_{N_i} &= a_i \cos q_i \vec{e}_x^0 + a_i \sin q_i \vec{e}_y^0 + x_i \cos p_i \vec{e}_x^0 + x_i \sin p_i \vec{e}_y^0 + w_i \cos p_i \vec{e}_y^0 - w_i \sin p_i \vec{e}_x^0 \\ \vec{r}_{N_i} &= (a_i \cos q_i + x_i \cos p_i - w_i \sin p_i) \vec{e}_x^0 + (a_i \sin q_i + x_i \sin p_i + w_i \cos p_i) \vec{e}_y^0 \end{aligned} \quad (10)$$

Vậy ta có tọa độ của điểm N_i

$$\begin{bmatrix} x_{N_i} \\ y_{N_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \cos q_i + x_i \cos p_i - w_i \sin p_i \\ a_i \sin q_i + x_i \sin p_i + w_i \cos p_i \end{bmatrix} \quad (11)$$

Đạo hàm phương trình (11) lên ta được:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{N_i} \\ \dot{y}_{N_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_i \dot{q}_i \sin q_i - \dot{p}_i x_i \sin p_i - w_i \dot{p}_i \cos p_i - \dot{w}_i \sin p_i \\ a_i \dot{q}_i \cos q_i + \dot{p}_i x_i \cos p_i - w_i \dot{p}_i \sin p_i + \dot{w}_i \cos p_i \end{bmatrix} \quad (12)$$

Vậy vận tốc của điểm N_i được xác định như sau

$$\begin{aligned} v_{N_i}^2 &= (\dot{x}_{N_i})^2 + (\dot{y}_{N_i})^2 = a_i^2 \dot{q}_i^2 + x_i^2 \dot{p}_i^2 + w_i^2 \dot{p}_i^2 + \dot{w}_i^2 + 2x_i \dot{p}_i^2 \dot{w}_i + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i x_i \cos(q_i - p_i) \\ &\quad + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i \cos(q_i - p_i) + 2a_i \dot{q}_i w_i \dot{p}_i \sin(q_i - p_i) \end{aligned} \quad (13)$$

Thay (13) vào biểu thức (9) ta được động năng của các khâu đàn hồi:

$$T_{B_i C_i} = \frac{1}{2} \mu_{2i} A_{2i} \int_0^{b_i} \left(a_i^2 \dot{q}_i^2 + x_i^2 \dot{p}_i^2 + w_i^2 \dot{p}_i^2 + \dot{w}_i^2 + 2x_i \dot{p}_i^2 \dot{w}_i + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i x_i \cos(q_i - p_i) \right. \\ \left. + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i \cos(q_i - p_i) + 2a_i \dot{q}_i w_i \dot{p}_i \sin(q_i - p_i) \right) dx_i \quad (14)$$

Vậy động năng của toàn hệ trở thành

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2} I_p \dot{\phi}^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} I_{i2} \dot{q}_i^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \mu_{2i} A_{2i} \int_0^{b_i} \left(a_i^2 \dot{q}_i^2 + x_i^2 \dot{p}_i^2 + w_i^2 \dot{p}_i^2 + \dot{w}_i^2 + 2x_i \dot{p}_i^2 \dot{w}_i + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i x_i \cos(q_i - p_i) \right. \\ &\quad \left. + 2a_i \dot{q}_i \dot{p}_i \cos(q_i - p_i) + 2a_i \dot{q}_i w_i \dot{p}_i \sin(q_i - p_i) \right) dx_i \end{aligned} \quad (15)$$

3.2. Thế năng

Vì robot chuyển động trong mặt phẳng nằm ngang nên thế năng của hệ chỉ bao gồm thế năng đàn hồi của các thanh được cho dưới dạng

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} E_{i2} I_{i2} \int_0^{b_i} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_i^2} \right)^2 dx_i \quad (16)$$

3.3. Phương trình liên kết

Phương trình liên kết được xây dựng dựa trên việc xác định tọa độ khối tâm của bàn máy thông qua 3 chân một cách đồng lập, cụ thể ta được các phương trình liên kết như sau

$$f_1 = a_1 \cos(q_1) + b_1 \cos(p_1) - w_{B1} \sin(p_1) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p + \frac{\pi}{6}) - x_p \quad (17)$$

$$f_2 = a_1 \sin(q_1) + b_1 \sin(p_1) - w_{B1} \cos(p_1) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p + \frac{\pi}{6}) - y_p \quad (18)$$

$$f_3 = l_0 + a_2 \cos(q_2) + b_2 \cos(p_2) - w_{B2} \sin(p_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p - \frac{\pi}{6}) - x_p \quad (19)$$

$$f_4 = a_2 \sin(q_2) + b_2 \sin(p_2) - w_{B2} \cos(p_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p - \frac{\pi}{6}) - y_p \quad (20)$$

$$f_5 = \frac{l_0}{2} + a_3 \cos(q_3) + b_3 \cos(p_3) - w_{B3} \sin(p_3) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p) - x_p \quad (21)$$

$$f_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_0 + a_3 \sin(q_3) + b_3 \sin(p_3) - w_{B3} \cos(p_3) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p) - y_p \quad (22)$$

3.4. Rời rạc hóa phân tử đàn hồi

Giả thiết biến dạng là nhỏ, Sử dụng phương pháp khai triển theo các dạng riêng Ritz – Galerkin, dao động uốn tại một điểm tại vị trí x_i trên thanh đàn hồi có dạng:

$$w_i(x_i, t) = \sum_{k=1}^{N_i} X_{ki}(x_i) . h_{ki}(t) \quad i=1,2,3 \quad (23)$$

Trong đó X_k là các hàm thỏa mãn điều kiện biên của dầm 2 đầu bản lề:

$$X_{ki} = \sin\left(\frac{k\pi}{l_i} x_i\right) \quad i=1,2,3 \quad (24)$$

Như vậy chuyển động thực của khâu nối đàn hồi $B_i C_i$ bao gồm chuyển động lớn của tọa độ góc khâu và chuyển động bé của các biến dạng đàn hồi. Trong trường hợp sử dụng một dạng riêng đầu tiên cho các thanh đàn hồi : $N_i=1$ với $i=1,2,3$ động năng và thế năng của hệ trở thành:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{4} b_1 \mu_{12} h_1^2 \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} b_1 \mu_{12} \dot{q}_1^2 a_1^2 + \frac{1}{6} b_2^3 \mu_{22} \dot{p}_2^2 + \frac{1}{4} b_2 \mu_{22} \dot{h}_2^2 + \frac{b_2^2 \mu_{22} \dot{p}_2 \dot{h}_2}{\pi} + \frac{1}{2} b_2 \mu_{22} \dot{q}_2^2 a_2^2 \\ & + \frac{1}{4} b_2 \mu_{22} \dot{p}_2^2 h_2^2 + \frac{1}{2} \dot{p}_1 \dot{q}_1 a_1 b_1^2 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1) - \frac{2}{\pi} h_1 \dot{p}_1 \dot{q}_1 b_1 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1) + \frac{1}{6} b_1^3 \mu_{12} \dot{p}_1^2 \\ & + \frac{1}{4} b_1 \mu_{12} \dot{h}_1^2 + \frac{b_1^2 \mu_{12} \dot{h}_1 \dot{p}_1}{\pi} + \frac{1}{2} I_b \dot{\varphi}_p^2 + \frac{1}{2} I_{11} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_{21} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} I_{31} \dot{q}_3^2 + \frac{1}{2} I_{12} \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} I_{22} \dot{p}_2^2 \\ & + \frac{1}{2} I_{32} \dot{p}_3^2 + \frac{1}{2} M_b \dot{x}_p^2 + \frac{1}{2} M_b \dot{y}_p^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_2 \dot{p}_2 a_2 b_2^2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2) \\ & - \frac{2}{\pi} \dot{q}_2 \dot{p}_2 h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2) + \frac{1}{6} b_3^3 \mu_{32} \dot{p}_3^2 + \frac{b_3^2 \mu_{32} \dot{p}_3 \dot{h}_3}{\pi} + \frac{1}{4} b_3 \mu_{32} \dot{h}_3^2 \\ & + \frac{1}{2} b_3 \mu_{32} \dot{q}_3^2 a_3^2 + \frac{1}{4} b_3 \mu_{32} \dot{p}_3^2 h_3^2 + \frac{1}{2} \dot{q}_3 \dot{p}_3 a_3 b_3^2 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3) - \frac{2}{\pi} \dot{q}_3 \dot{p}_3 h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3) \\ & + \frac{2}{\pi} \dot{h}_1 \dot{q}_1 a_1 b_1 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1) + \frac{2}{\pi} \dot{q}_2 \dot{h}_2 \cos(p_2 - q_2) a_2 b_2 \mu_{22} + \frac{2}{\pi} \dot{q}_3 \dot{h}_3 \cos(p_3 - q_3) a_3 b_3 \mu_{32} \end{aligned} \quad (25)$$

$$U = \frac{E_1 I_{12} \pi^4 h_1^2}{4b_1^3} + \frac{E_2 I_{22} \pi^4 h_2^2}{4b_2^3} + \frac{E_3 I_{32} \pi^4 h_3^2}{4b_3^3} \quad (26)$$

Phương trình liên kết lúc này có dạng:

$$f_1 = a_1 \cos(q_1) + b_1 \cos(p_1) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p + \frac{\pi}{6}) - x_p \quad (27)$$

$$f_2 = a_1 \sin(q_1) + b_1 \sin(p_1) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p + \frac{\pi}{6}) - y_p \quad (28)$$

$$f_3 = l_0 + a_2 \cos(q_2) + b_2 \cos(p_2) - w_{B2} \sin(p_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p - \frac{\pi}{6}) - x_p \quad (29)$$

$$f_4 = a_2 \sin(q_2) + b_2 \sin(p_2) - w_{B2} \cos(p_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p - \frac{\pi}{6}) - y_p \quad (30)$$

$$f_5 = \frac{l_0}{2} + a_3 \cos(q_3) + b_3 \cos(p_3) - w_{B3} \sin(p_3) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \sin(\varphi_p) - x_p \quad (31)$$

$$f_6 = \frac{\sqrt{3}}{2} l_0 + a_3 \sin(q_3) + b_3 \sin(p_3) - w_{B3} \cos(p_3) + \frac{1}{\sqrt{3}} l \cos(\varphi_p) - y_p \quad (32)$$

3.5. Phương trình vi phân chuyển động

Ta có tọa độ suy rộng tổng quát của hệ:

$$\eta = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad x_p \quad y_p \quad \varphi_p]^T \quad (33)$$

Phương trình Lagrange dạng nhân tử viết cho hệ hólônôm

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\eta}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial \eta_j} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \eta_j} - \left(\sum_{k=1}^2 \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial \eta_j} \right) + Q_j \quad j=1,2,\dots,12 \quad (34)$$

Tính các vi phân, đạo hàm và thay vào phương trình (34) ta được

Phương trình với các tọa độ đàn hồi:

$$b_1 \pi \mu_{12} \ddot{h}_1 + 4 \cos(p_1 - q_1) a_1 b_1 \mu_{12} \ddot{q}_1 + 2b_1^2 \mu_{12} \ddot{p}_1 - h_1 \pi \dot{p}_1^2 b_1 \mu_{12} + 4\dot{q}_1^2 a_1 b_1 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1) + \frac{E_1 I_{12} \pi^5 h_1}{b_1^3} = 0 \quad (35)$$

$$b_2 \pi \mu_{22} \ddot{h}_2 + 4 \cos(p_2 - q_2) a_2 b_2 \mu_{22} \ddot{q}_2 + 2b_2^2 \mu_{22} \ddot{p}_2 - h_2 \pi \dot{p}_2^2 b_2 \mu_{22} + 4\dot{q}_2^2 a_2 b_2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2) + \frac{E_2 I_{22} \pi^5 h_2}{2\pi b_2^3} = 0 \quad (36)$$

$$b_3 \pi \mu_{32} \ddot{h}_3 + 4 \cos(p_3 - q_3) a_3 b_3 \mu_{32} \ddot{q}_3 + 2b_3^2 \mu_{32} \ddot{p}_3 - h_3 \pi \dot{p}_3^2 b_3 \mu_{32} + 4\dot{q}_3^2 a_3 b_3 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3) + \frac{E_3 I_{32} \pi^5 h_3}{2\pi b_3^3} = 0 \quad (37)$$

Phương trình đối với các tọa độ khớp khâu rắn:

$$2 \left(\pi a_1^2 b_1 \mu_{12} + I_{11} \pi \right) \ddot{q}_1 + \left[\pi a_1 b_1^2 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1) - 4h_1 a_1 b_1 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1) \right] \ddot{p}_1 + 4a_1 b_1 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1) \ddot{h}_1 + \left[-\pi a_1 b_1^2 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1) - 4h_1 a_1 b_1 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1) \right] \dot{p}_1^2 - 8h_1 a_1 b_1 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1) \dot{p}_1 - 2\pi \lambda_1 a_1 \sin(q_1) + 2\pi \lambda_2 a_1 \cos(q_1) = \tau_1 \quad (38)$$

$$2 \left(\pi a_2^2 b_2 \mu_{22} + I_{21} \pi \right) \ddot{q}_2 + \left[\pi a_2 b_2^2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2) - 4h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2) \right] \ddot{p}_2 + 4a_2 b_2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2) \ddot{h}_2 + \left[-\pi a_2 b_2^2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2) - 4h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2) \right] \dot{p}_2^2 - 8h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2) \dot{p}_2 - 2\pi \lambda_3 a_2 \sin(q_2) + 2\pi \lambda_4 a_2 \cos(q_2) = \tau_2 \quad (39)$$

$$2 \left(\pi a_3^2 b_3 \mu_{32} + I_{31} \pi \right) \ddot{q}_3 + \left[\pi a_3 b_3^2 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3) - 4h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3) \right] \ddot{p}_3 + 4a_3 b_3 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3) \ddot{h}_3 + \left[-\pi a_3 b_3^2 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3) - 4h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3) \right] \dot{p}_3^2 - 8h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3) \dot{p}_3 - 2\pi \lambda_5 a_3 \sin(q_3) + 2\pi \lambda_6 a_3 \cos(q_3) = \tau_3 \quad (40)$$

Phương trình với tọa độ khớp khâu đàn hồi

$$\left[3\pi a_1 b_1^2 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1) - 12h_1 a_1 b_1 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1) \right] \ddot{q}_1 + \pi \left(3h_1^2 b_1 \mu_{12} + 2b_1^3 \mu_{12} + 6I_{12} \right) \ddot{p}_1 + 6b_1^2 \mu_{12} \ddot{h}_1 + \left[3\pi a_1 b_1^2 \mu_{12} \sin(p_1 - q_1) + 12h_1 a_1 b_1 \mu_{12} \cos(p_1 - q_1) \right] \dot{q}_1^2 + 6\pi h_1 b_1 \mu_{12} \dot{h}_1 \dot{p}_1 - 6\pi \lambda_1 b_1 \sin(p_1) + 6\pi \lambda_2 b_1 \cos(p_1) = 0 \quad (41)$$

$$\left[3\pi a_2 b_2^2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2) - 12h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2) \right] \ddot{q}_2 + \pi \left(3h_2^2 b_2 \mu_{22} + 2b_2^3 \mu_{22} + 6I_{22} \right) \ddot{p}_2 + 6b_2^2 \mu_{22} \ddot{h}_2 + \left[3\pi a_2 b_2^2 \mu_{22} \sin(p_2 - q_2) + 12h_2 a_2 b_2 \mu_{22} \cos(p_2 - q_2) \right] \dot{q}_2^2 + 6\pi h_2 b_2 \mu_{22} \dot{h}_2 \dot{p}_2 - 6\pi \lambda_3 b_2 \sin(p_2) + 6\pi \lambda_4 b_2 \cos(p_2) = 0 \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
& \left[3\pi a_3 b_3^2 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3) - 12h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3) \right] \ddot{q}_3 + \pi \left(3h_3^2 b_3 \mu_{32} + 2b_3^3 \mu_{32} + 6I_{32} \right) \ddot{p}_3 \\
& + 6b_3^2 \mu_{32} \ddot{h}_3 + \left[3\pi a_3 b_3^2 \mu_{32} \sin(p_3 - q_3) + 12h_3 a_3 b_3 \mu_{32} \cos(p_3 - q_3) \right] \dot{q}_3^2 \\
& + 6\pi h_3 b_3 \mu_{32} \dot{h}_3 \dot{p}_3 - 6\pi \lambda_5 b_3 \sin(p_3) + 6\pi \lambda_6 b_3 \cos(p_3) = 0
\end{aligned} \tag{43}$$

Phương trình với tọa độ của bàn máy

$$M_b \ddot{y}_p - \lambda_1 - \lambda_3 - \lambda_5 = 0 \tag{44}$$

$$M_b \ddot{x}_p - \lambda_2 - \lambda_4 - \lambda_6 = 0 \tag{45}$$

$$\begin{aligned}
I_b \ddot{\varphi}_p - \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_1 l \sin\left(\varphi_p + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_2 l \cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_3 l \cos\left(\varphi_p + \frac{\pi}{3}\right) \\
- \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_4 l \sin\left(\varphi_p + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_5 l \cos(\varphi_p) + \frac{\sqrt{3}}{3} \lambda_6 l \sin(\varphi_p) = 0
\end{aligned} \tag{46}$$

Như vậy ta thiết lập được hệ 12 phương trình vi phân (35)-(46) và 6 phương trình đại số liên kết (27)-(32) biểu diễn chuyển động của hệ

4. Kết quả và thảo luận

Bài này tập chung giải quyết bài toán động lực của bàn máy động phẳng có khâu đàn hồi. Mô hình cơ học của bàn máy động được đưa ra bằng cách sử dụng mô hình dầm Euler – Bernoulli cho phần tử thanh đàn hồi. Sau đó biến dạng đàn hồi được biểu diễn thông qua phương pháp Ritz – Galerkin. Sử dụng các liên hệ hình học ta được các phương trình liên kết, các phương trình vi phân chuyển động được thiết lập dựa trên phương trình Lagrange loại 2 dạng nhân tử. Cuối cùng ta được một hệ 12 phương trình vi phân và 6 phương trình đại số mô tả chuyển động của hệ. Dựa vào đó ta có thể giải quyết bài toán động lực học thuận, ngược và điều khiển chính xác bàn máy động có khâu đàn hồi.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Ahmed A. Shabana, 1997. *Flexible Multibody Dynamics. Review of Past and Recent Developments*. Multibody System Dynamics 1, 189–222.
- [2]. Dadfarnia, M., Jalili N., Xian B., Dawson D. M, 2004. Lyapunov-Based Vibration Control of Translational Euler-Bernoulli Beams Using the Stabilizing Effect of Beam Damping Mechanisms. *Journal of Vibration and Control*, 10, pp. 933–961.
- [3]. Đinh Công Đạt, 2020. Động lực học và điều khiển tay máy robot hai khâu đàn hồi. *Hội nghị Toàn quốc Khoa học trái đất và tài nguyên với phát triển bền vững*.
- [4]. Nguyen Van Khang, 2007. *Dynamics of Multibody Systems (in Vietnamese)*. Science and Technics Publishing House, Hanoi.
- [5]. Nguyễn Văn Khang, Chu Anh Mỹ, 2022. *Robot công nghiệp*. NXB Khoa học kỹ thuật
- [6]. Santosha Kumar Dwivedy and Peter Eberhard, 2006. *Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review*. Mechanism and Machine Theory 41, 749–777.
- [7]. Sang-Myeong Kim, 2015. Lumped Element Modeling of a Flexible Manipulator System. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, VOL. 20, NO. 2, 967-974.
- [8]. Zhi-Cheng Qiu, 2012. Adaptive nonlinear vibration control of a Cartesian flexible manipulator driven by a ballscrew mechanism. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 30, pp. 248–266.

ABSTRACT

Modeling and dynamic of 3RRR parallel robot with flexible links

Dinh Cong Dat

Hanoi University of Mining and Geology

This paper presents the dynamic modeling of 3RRR parallel robot with flexible links. The flexible links are modeled by Euler-Bernoulli beam theory and Ritz-Galerkin method. The system of algebraic differential equations describing the motion of the robot is built based on the Lagrange equation.

Keywords: parallel robot; flexible; dynamic.