KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 28

Trực tuyến, 23-24/4/2022

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN ĐHQG HÀ NỘI

a) Tính $D(x)$ và $R(x)$ theo x.

b) Tìm giá trị lớn nhất của $R(x)$ khi $x \in [0, 100]$.

c) Công ty nên sản xuất bao nhiêu ti vi mỗi tháng để lợi nhuận lớn nhất?

Bài 3.12 (ĐH Kiến trúc). Cho hàm số $f(x) : [0; 1] \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục thỏa mãn $f(1) = -\dfrac{1}{8082}$ đồng thời $\int\limits_0^1 x^4[f'(x)]^2\,\mathrm{d}x \le 4040 \int\limits_0^1 f(x) \cdot x^{2019}\,\mathrm{d}x$. Xác định hàm số $f(x)$.

Bài 3.13 (ĐH Kiến trúc). Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2021]$ và thỏa mãn $f(x) + f(2021 - x) = 0$ với mọi $x \in [0; 2021]$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) - \int\limits_0^{2021-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{xf(x)}{2021}$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2021)$.

Bài 3.14 (ĐH Mỏ - Địa chất, P. T. Cường). Giả sử $f : [0, 1] \longrightarrow R$ là hàm liên tục và $\int_0^1 x^k f(x)\,dx = 0$ với mọi $k = 0, \ldots, n$. Chứng minh rằng $f(x)$ có $n+1$ nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Bài 3.15 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Con sâu rơi xuống yên ngựa $2z = x^2 - y^2$ tại điểm $(0, 0, 0)$. Nhận thấy kỵ sĩ chuẩn bị ngồi lên yên nên nó muốn tránh va chạm với phần cơ thể của kỵ sĩ. Nó muốn bò tới điểm $(2, 0, 2)$. Thế nhưng vì hoảng sợ nên nó chỉ có thể bò theo đường thẳng. Tức là quỹ đạo của nó chỉ có thể là một số lượng hữu hạn các đoạn thẳng. Vậy nó phải di chuyển như thế nào?

Bài 3.16 (ĐH Mỏ - Địa chất, P. T. Cường). Với số tự nhiên n bất kỳ, hãy rút gọn tổng

$$\sum_{x+y+z+t=n} 2^{x+2y+3z+4t},$$

trong đó x, y, z, t là các số nguyên không âm. Đáp số cần chứa không quá bốn số hạng.

Bài 3.17 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho hàm số

$$f(x) = -x + \sqrt{(a+x)(b+x)}, \quad \forall x \in [0, +\infty),$$

trong đó a, b là các số thực dương khác nhau cho trước. Chứng minh rằng tồn tại duy một số thực $\alpha \in (0, +\infty)$ sao cho

$$f(\alpha) = \sqrt{ab} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2.$$

- Kết hợp $f(1) = -\dfrac{1}{8082}$ ta được

$$0 \le \int_0^1 [f'(x) + x^{2020}]^2 \, dx \le \int_0^1 f'^2(x) \, dx - 4040 \int_0^1 f(x) \cdot x^{2019} \, dx \le 0.$$

Do đó $f'(x) = -x^{2020} \Rightarrow f(x) = -\dfrac{x^{2021}}{2021} + \dfrac{6061}{2021.8082}$.

Bài 3.13 (ĐH Kiến trúc). • Xét $I = \int_0^{2021} f(x) \, dx$. Đặt $t = 2021 - x$ thì $I = \int_0^{2021} f(2021 - x) \, dx$.

Suy ra $2I = \int_0^{2021} [f(x) + f(2021 - x)] \, dx = 0 \Rightarrow I = 0$.

- Xét $g(x) = (2021 - x)^{2021} \cdot \int_0^{2021-x} f(t) \, dt$ thỏa mãn Định lý Rolle trên $[0; 2021]$ và

$$g'(x) = -2021(2021 - x)^{2020} \cdot \int_0^{2021-x} f(t) \, dt + (2021 - x)^{2021} f(2021 - x).$$

Áp dụng Định lý Rolle, kết hợp với $f(2021 - c) = -f(c)$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.14 (ĐH Mỏ - Địa chất, P. T. Cường). Ta sẽ chứng minh rằng f có ít nhất $n + 1$ nghiệm trong $(0, 1)$.

Với $n = 0$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$, khi đó rõ ràng $f(x) = 0$ với giá trị x nào đó.

Bước chuyển $n \longrightarrow n+1$. Giả sử $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Rõ ràng là $g(0) = g(1) = 0$. Lấy tích phân từng phần, ta tìm được

$$0 = \int_0^1 x^k f(x)dx = -k \int_0^1 x^{k-1} \cdot g(x)dx.$$

Theo giả thiết quy nạp, $g(x)$ có $n + 1$ nghiệm trong $(0, 1)$. Vì 0 và 1 cũng là nghiệm của $g(x)$ (tức nó có tất cả $n + 3$ nghiệm). Từ đây suy ra $f(x)$ có $n + 2$ nghiệm trong $(0, 1)$.