KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 28

Trực tuyến, 23-24/4/2022

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN ĐHQG HÀ NỘI

Bài 5.6 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Cho hàm f liên tục trên $[0,1]$ và $\int\limits_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}$, $\forall x \in [0,1]$. Chứng minh rằng

$$\int\limits_0^1 f^2(x)dx \geq \int\limits_0^1 xf(x) \geq \frac{1}{3}.$$

Bài 5.7 (ĐH Hàng Hải Việt Nam, H.V. Hùng). Một hàm $f(x)$ liên tục trên $[0,+\infty)$ và thỏa mãn bất đẳng thức

$$1+2\int_0^x (f(t))^2 dt \leq e^{2x} \text{ với mọi } x > 0.$$

Chứng minh rằng $1+2\int_0^x f(t)dt \leq e^x$ với mọi $x > 0$.

Bài 5.8 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn). Cho các hàm liên tục $f, g : [0;1] \to [0;1]$, f là hàm tăng thực sự. Chứng minh rằng:

$$\int\limits_0^1 f(g(x))dx \leq \int\limits_0^1 [f(x)+g(x)]\, dx.$$

Bài 5.9 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Giả sử

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$

là hàm liên tục và $\int_0^1 f^{1011}(x)\, dx = 1$.

Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^{2020} \int_0^1 f^i(x)dx \geq 2020.$$

Bài 5.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho f là một hàm số liên tục trên $[0,1]$ sao cho $f(x) \geq 0$ với $x \in [0,1]$ và

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1-x^2}{2}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Chứng minh rằng

$$\int_0^1 [f(x)]^{2021} dx \geq \int_0^1 x^{2020} f(x)dx.$$

Mặt khác ta có:

+) Nếu $c \leq 0$ thì do $f(x) \neq 0, \forall x \in [0;1]$, ta có

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \geq 0 \geq c. \tag{2}$$

+) Nếu $c > 0$, giả sử $\exists x_0 \in [0;1]$ để:

$$h(x_0) = f(x_0) - x_0 = c \qquad \text{hay} \qquad f(x_0) = x_0 + c.$$

Vì $0 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0;1]$ và $f(x)$ tăng thực sự nên ta có: $1 \geq f(x_0) = x_0 + c$ và

$$\int\limits_0^1 f(x)dx \geq \int\limits_{x_0}^1 f(x)dx \geq \int\limits_{x_0}^1 f(x_0)dx = (c + x_0)(1 - x_0).$$

$$= c + x_0 - cx_0 - x_0^2 = c + x_0(1 - c - x_0) \geq c. \tag{3}$$

Từ (2) và (3) ta luôn có: $c \leq \int\limits_0^1 f(x)dx$. Do đó:

$$\int\limits_0^1 f(g(x))dx \leq c + \int\limits_0^1 g(x)dx \leq \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_0^1 g(x)dx = \int\limits_0^1 \left[f(x) + g(x)\right]dx.$$

Bài 5.9 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn).

$$\sum_{i=1}^{2020} \int_0^1 f^i(x)dx = \int_0^1 \sum_{i=1}^{2020} f^i(x)dx \geq \int_0^1 2020 \sqrt[2020]{f^{\frac{2020\cdot 2021}{2}}}dx$$

$$= 2020 \int_0^1 f^{\frac{2021}{2}}dx \underset{0 \leq f \leq 1}{\geq} 2020 \int_0^1 f^{1011}dx = 2020.$$

Lời giải thứ hai

Vì hàm số nhận các giá trị từ 0 tới 1 và tích phân $\int_0^1 f^{1011}(x)dx = 1$, nên $f(x) \equiv 1$. Vì vậy

$$\sum_{i=1}^{2020} \int_0^1 f^i(x)dx = \sum_{i=1}^{2020} 1 = 2020.$$