

KỶ YẾU

KỶ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 28

TRỰC TUYẾN, 23-24/4/2022

HỘI TOÁN HỌC
VIỆT NAM



TRƯỜNG ĐH KHOA
HỌC TỰ NHIÊN
ĐHQG HÀ NỘI



- a) Tính $D(x)$ và $R(x)$ theo x .
 b) Tìm giá trị lớn nhất của $R(x)$ khi $x \in [0, 100]$.
 c) Công ty nên sản xuất bao nhiêu ti vi mỗi tháng để lợi nhuận lớn nhất?

Bài 3.12 (ĐH Kiến trúc). Cho hàm số $f(x) : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm khả vi liên tục thỏa mãn $f(1) = -\frac{1}{8082}$ đồng thời $\int_0^1 x^4 [f'(x)]^2 dx \leq 4040 \int_0^1 f(x) \cdot x^{2019} dx$.

Xác định hàm số $f(x)$.

Bài 3.13 (ĐH Kiến trúc). Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 2021]$ và thỏa mãn $f(x) + f(2021 - x) = 0$ với mọi $x \in [0; 2021]$. Chứng minh rằng phương trình $f(x) - \int_0^{2021-x} f(t) dt = \frac{xf(x)}{2021}$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 2021)$.

Bài 3.14 (ĐH Mở - Địa chất, P. T. Cường). Giả sử $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm liên tục và $\int_0^1 x^k f(x) dx = 0$ với mọi $k = 0, \dots, n$. Chứng minh rằng $f(x)$ có $n + 1$ nghiệm trong khoảng $(0, 1)$.

Bài 3.15 (ĐH Mở - Địa chất, H. N. Huân). Con sấu rơi xuống yên ngựa $2z = x^2 - y^2$ tại điểm $(0, 0, 0)$. Nhận thấy kỹ sĩ chuẩn bị ngồi lên yên nên nó muốn tránh va chạm với phần cơ thể của kỹ sĩ. Nó muốn bò tới điểm $(2, 0, 2)$. Thế nhưng vì hoảng sợ nên nó chỉ có thể bò theo đường thẳng. Tức là quỹ đạo của nó chỉ có thể là một số lượng hữu hạn các đoạn thẳng. Vậy nó phải di chuyển như thế nào?

Bài 3.16 (ĐH Mở - Địa chất, P. T. Cường). Với số tự nhiên n bất kỳ, hãy rút gọn tổng

$$\sum_{x+y+z+t=n} 2^{x+2y+3z+4t},$$

trong đó x, y, z, t là các số nguyên không âm. Đáp số cần chứa không quá bốn số hạng.

Bài 3.17 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho hàm số

$$f(x) = -x + \sqrt{(a+x)(b+x)}, \quad \forall x \in [0, +\infty),$$

trong đó a, b là các số thực dương khác nhau cho trước. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một số thực $\alpha \in (0, +\infty)$ sao cho

$$f(\alpha) = \sqrt{ab} + \frac{1}{4} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

Bài 3.15 (ĐH Mở - Địa chất, H. N. Huân). Yêu cầu có hai đường thẳng tạo lập

$$\begin{cases} \alpha(x+y) = 2\beta z, \\ \beta(x-y) = \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha(x-y) = 2\beta z, \\ \beta(x+y) = \alpha. \end{cases}$$

Con sên đầu tiên bò theo đường thẳng đi qua điểm $O(0,0,0)$ trong một họ tới điểm cắt của đường thẳng này với đường thẳng khác chứa điểm $(0,2,0)$ trong họ khác. Sau đó cứ theo đường thẳng này để kết thúc hành trình. Ví dụ: đầu tiên bắt đầu từ điểm $(0,0,0)$ di chuyển theo đường thẳng

$$\begin{cases} y = x, \\ z = 0 \end{cases}$$

tới điểm $(1,1,0)$. Sau đó theo đường thẳng

$$\begin{cases} x - y = z, \\ x + y = 2 \end{cases}$$

tới điểm $(2,0,2)$.

Bài 3.16 (ĐH Mở - Địa chất, P. T. Cường). Giả sử

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n, U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n x^n, V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 8^n x^n, W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 16^n x^n.$$

Khi đó với $|x| < \frac{1}{16}$ có

$$T(x)U(x)V(x)W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{a+b+c+d=n} 2^a 4^b 8^c 16^d \right) x^n$$

Dễ dàng tìm được các tổng

$$T(x) = \frac{1}{1-2x}, U(x) = \frac{1}{1-4x}, V(x) = \frac{1}{1-8x}, W(x) = \frac{1}{1-16x}.$$

Tức

$$\begin{aligned} T(x)U(x)V(x)W(x) &= \frac{1}{(1-2x)(1-4x)(1-8x)(1-16x)} = \\ &= -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-2x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-4x} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{1-8x} + \frac{64}{21} \cdot \frac{1}{1-16x} = \\ &= -\frac{1}{12}T(x) + \frac{2}{3}U(x) - \frac{8}{3}V(x) + \frac{64}{21}W(x). \end{aligned}$$