KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 28

TRỰC TUYẾN, 23-24/4/2022

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN ĐHQG HÀ NỘI

1. Chứng minh rằng $|x_{n+1} - \sqrt{2}| < \dfrac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|$.
2. Tính giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2 CHUỖI SỐ

Bài 2.1 (ĐH Giao thông Vận Tải, N.T. Huyên). Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi

$$a_1 > 0;\ a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1}.$$

a) Chứng minh rằng dãy $\{a_n\}$ giảm và tìm $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) Tính $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Bài 2.2 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Chứng minh rằng

$$2021(2020!e - [2020!e]) < \pi.$$

Trong đó $[a]$ là phần nguyên của a.

Bài 2.3 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ). Tính tổng của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{((n-1)!)^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ với $-1 < x < 1$.

Bài 2.4 (ĐH Tài nguyên và Môi trường TP. Hồ Chí Minh). Cho $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n^4 + 9}{x_n^3 - x_n + 6}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1. Chứng minh $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng ngặt.
2. Chứng minh $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ là dãy không bị chặn trên.
3. Tìm $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x_1^3 + 3} + \dfrac{1}{x_2^3 + 3} + \dfrac{1}{x_3^3 + 3} + \ldots + \dfrac{1}{x_n^3 + 3} \right)$.

b) Ta có $a_{n+1} - 1 = \dfrac{a_n^2}{a_n^2 - a_n + 1} - 1 = \dfrac{a_n - 1}{a_n^2 - a_n + 1}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} = \dfrac{a_n^2 - a_n + 1}{a_n - 1} = \dfrac{a_n^2 - a_n}{a_n - 1} + \dfrac{1}{a_n - 1} = a_n + \dfrac{1}{a_n - 1}$

$\Rightarrow a_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{a_n - 1}$.

Do đó $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_1 - 1} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_1 - 1}$.

— Nếu $a_1 < 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = -1 - \dfrac{1}{a_1 - 1} = \dfrac{a_1}{1 - a_1}$.

— Nếu $a_1 \geq 1$ thì $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$ nên $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$ (chuỗi phân kỳ).

Bài 2.2 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Theo công thức Taylor

$$n!e = n! + n! + \frac{n!}{2} + \ldots + \frac{e^\theta}{n+1}.$$

Trong đó $0 < \theta < 1$. Xét vế phải, tất cả các số hạng, trừ số hạng cuối cùng, đều là số nguyên. Số hạng cuối cùng nhỏ hơn một khi $n \geq 2$ và vì $\theta \in (0, 1)$. Vì thế

$$n!e - [n!e] = \frac{e^\theta}{n+1}.$$

Tức là

$$2021(2020!e - [2020!e]) < e^\theta < e < \pi.$$

Bài 2.3 (ĐH Thuỷ Lợi, N.H. Thọ). Sử dụng tiêu chuẩn Đa lăm be, chứng tỏ chuỗi hội tụ trong $(-1; 1)$ Gọi $S(x)$ là tổng của chuỗi trong $(-1; 1)$.
Với mọi $x \in (-1; 1)$, ta có

$$S'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n-1)!}(2x)^{2n-1}$$

$$S''(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}.$$

Từ đó $(1 - x^2)S''(x) - xS'(x) = 4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}S''(x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}S'(x) = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{1-x^2}S'(x)\right)' = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}.$$