KỶ YẾU

KỲ THI OLYMPIC TOÁN HỌC SINH VIÊN-HỌC SINH LẦN THỨ 28

Trực tuyến, 23-24/4/2022

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TRƯỜNG ĐH KHOA HỌC TỰ NHIÊN ĐHQG HÀ NỘI

Bài 1.6 (ĐH Hùng Vương - Phú Thọ, T.A. Tuấn). Cho dãy số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ xác định bởi $a_1 = 2021$ và với mọi $n > 1$ ta có

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = n^2 a_n.$$

Tính a_{2021}.

Bài 1.7 (ĐH Kiến trúc). Cho dãy số (x_n) có $x_1 = \sqrt{2021}$ và $x_{n+1} = x_n^2 - 2$ với mọi $n \geq 1$.

a) Giả sử $x_1 = a + \frac{1}{a}$ với $a > 0$. Hãy tìm a và tính x_n theo a.

b) Chứng minh dãy số (x_n) tăng ngặt và không bị chặn trên.

c) Tính giới hạn $L = \lim \dfrac{x_{n+1}^2}{x_1^2 \cdot x_2^2 \cdots x_n^2}$.

Bài 1.8 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Giả sử $a_1 = \frac{1}{2}$ và $a_{n+1} = a_n - a_n^2$. Chứng minh rằng giới hạn sau là tồn tại

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a_n} - n - \ln n \right).$$

Bài 1.9 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ là dãy số được xác định bởi các điều kiện

$$a_0 = 0, \quad \text{và} \quad a_{n+1}^3 = a_n^2 - 8 \quad \text{với} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Chứng minh rằng

$$-2 \leq a_n \leq -\sqrt[3]{4} \quad \text{với} \quad \forall n \geq 1.$$

b) Chứng minh rằng

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{\sqrt[3]{4}}{3} |a_{n+1} - a_n| \quad \text{với} \quad \forall n \geq 1.$$

c) Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = v$ với v là nghiệm duy nhất của phương trình

$$x^3 - x^2 + 8 = 0.$$

Bài 1.10 (ĐH Sư phạm Hà Nội 2). Cho dãy $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ (với $n \geq 2$) được xác định bởi

$$a_0 = 0, a_k = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+k},$$

- Suy ra $\dfrac{x_{n+1}^2}{x_1^2x_2^2\dots x_n^2} = x_1^2 - 4 + \dfrac{4}{x_1^2x_2^2\dots x_n^2}$.
- Mặt khác do dãy (x_n) tăng nên $0 < \dfrac{4}{x_1^2x_2^2\dots x_n^2} < \dfrac{4}{(x_1^2)^n} = \dfrac{4}{2021^n}$.

Theo giới hạn kẹp thì $\lim \dfrac{4}{x_1^2x_2^2\dots x_n^2} = 0$.

Vậy $\lim \dfrac{x_n^2}{x_1^2x_2^2\dots x_n^2} = x_1^2 - 4 = 2017$.

Bài 1.8 (ĐH Mỏ - Địa chất, H. N. Huấn). Ký hiệu $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ và $c_n = b_n - n - \ln n$.

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_n - a_n^2} = \frac{b_n^2}{b_n - 1} = b_n + 1 + \frac{1}{b_n - 1}.$$

Như vậy dãy b_n tăng ngặt. Bằng quy nạp, ta có thể chứng minh được rằng

$$n + 2 < b_n < n + \ln n + 2.$$

Khi đó

$$c_{n+1} - c_n = b_n + 1 + \frac{1}{1 - b_n} - (n+1) - \ln(n+1) - (b_n - n - \ln n) =$$

$$= \frac{1}{b_n - 1} - [\ln(n+1) - \ln n]$$

Theo định lý về các giá trị trung bình

$$\ln(n+1) - \ln n = f'(n+\theta) = \frac{1}{n+\theta}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

Tức là

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

Thêm vào đó

$$\frac{1}{n + \ln n + 1} < \frac{1}{b_n - 1} < \frac{1}{n+1},$$

nên $c_{n+1} - c_n < 0$. Tức là c_n giảm dần.
Ta sẽ chứng minh c_n bị chặn dưới. Ta có

$$0 < c_k - c_{k+1} = \ln(k+1) - \ln k - \frac{1}{b_k - 1} < \frac{1}{k} - \frac{1}{k + \ln k + 1}$$

$$< \frac{\ln k + 1}{k^2} < \frac{1}{k^{3/2}} + \frac{1}{k^2}.$$