π

TẠP CHÍ PI

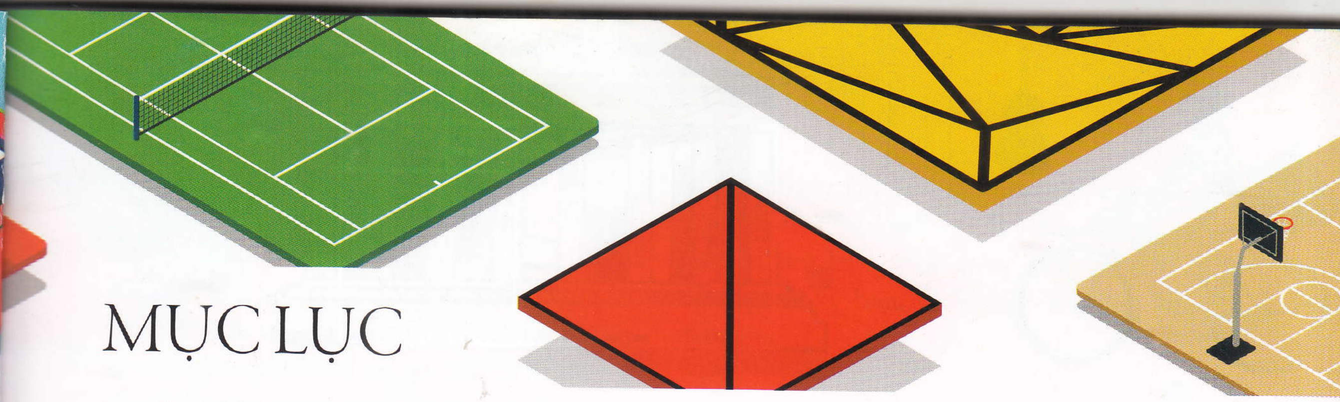
HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TẬP 5 - SỐ 9 THÁNG 9. 2021

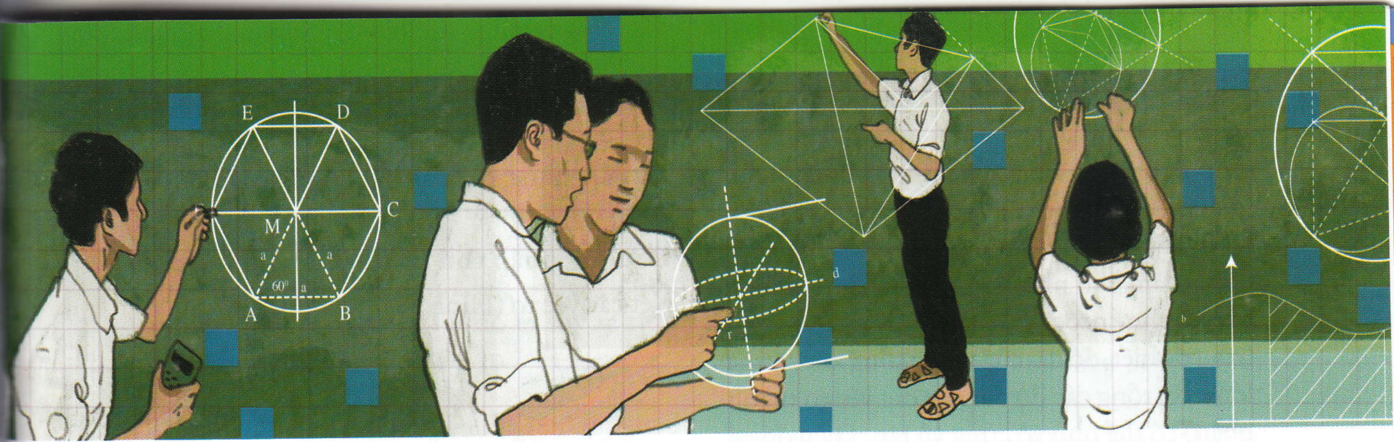
TỪ CHIẾC BÁNH SINH NHẬT ĐẾN CÁC SỐ p-adic

Bỏ phiếu công bằng đi tìm vàng thau

ISSN 2525-2437



MỤC LỤC



CHÍN CHỨNG MINH CHO MỘT ĐẲNG THỨC VÉC TƠ

HOÀNG NGỤ HUẤN[1] - PHẠM TUẤN CƯỜNG[2]

Trong bài viết này, chúng ta sẽ xem xét một số cách khác nhau để chứng minh rằng tổng các véc tơ nối tâm của đa giác đều n cạnh với các đỉnh của nó bằng véc tơ không.

Giả sử $A_1A_2\ldots A_n$ là đa giác đều n cạnh và gọi O là tâm của nó. Đặt

$$a_1 = \overrightarrow{OA_1}, a_2 = \overrightarrow{OA_2}, \ldots, a_n = \overrightarrow{OA_n},$$
$$s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Ta sẽ đưa ra chín chứng minh chỉ ra rằng s là véc tơ không.

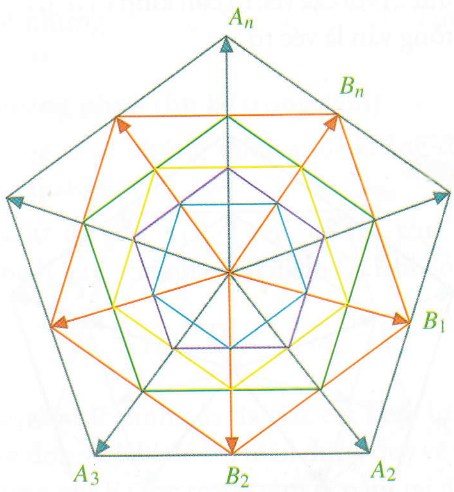
Phương pháp thứ nhất (chuyển qua giới hạn)

Gọi $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tương ứng là trung điểm của các cạnh $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_1$ của đa giác. Khi đó $B_1B_2\ldots B_n$ cũng là đa giác đều (Hình 1). Để đơn giản, ta đặt

$$b_1 = \overrightarrow{OB_1}, b_2 = \overrightarrow{OB_2}, \ldots, b_n = \overrightarrow{OB_n}.$$

Lưu ý rằng

$$b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}, b_2 = \frac{a_2 + a_3}{2}, \ldots,$$
$$b_n = \frac{a_n + a_1}{2}.$$



Hình 1.

Vì thế

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s.$$

Điều đó có nghĩa là khi chuyển từ đa giác đều n cạnh $A_1A_2\ldots A_n$ sang đa giác giác đều nội tiếp nó là $B_1, B_2, \ldots, B_n$ thì véc tơ cần tính là không đổi.

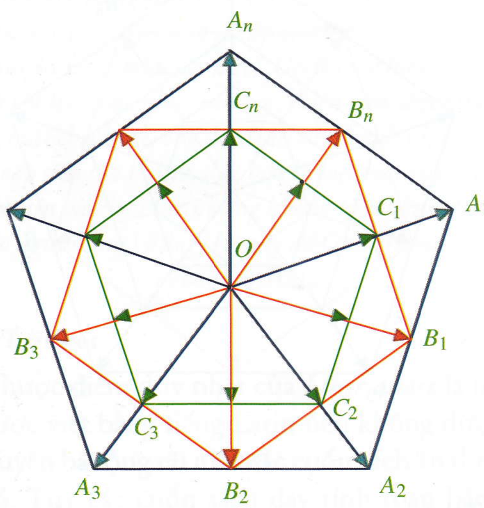
Ngoài ra với chỉ số i bất kỳ, ta có đẳng thức $|b_i| = |a_i|\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Lặp lại quá trình trên ta thu được một dãy các đa giác đều n cạnh (Hình 1), mỗi đa giác có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của đa giác được xây dựng trước đó. Sau mỗi bước, bán kính của đường

[1,2] *Đại học Mỏ – Địa chất.*

tròn ngoại tiếp đa giác đều n cạnh lại nhân với một số không đổi $q = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ nhỏ hơn 1. Vì vậy, bán kính đường tròn ngoại tiếp này có thể làm cho nhỏ hơn một số thực dương bất kỳ cho trước. Tức là độ dài của véc tơ s (như đã biết, độ dài của véc tơ tổng không thể lớn hơn tổng các độ dài của các véc tơ thành phần) có thể nhỏ vô cùng vô tận. Điều đó có nghĩa là $|s| = 0$, hay là $s = 0$.

Phương pháp thứ hai (hai bước lặp)

Trong phương pháp trên, ta có thể rút gọn thành hai bước lặp. Từ đa giác $B_1, B_2, \ldots, B_n$ ta chuyển tới đa giác đều n cạnh $C_1C_2\ldots C_n$ (Hình 2) với các véc tơ bán kính $c_1, c_2, \ldots, c_n$ có tổng vẫn là véc tơ s.



Hình 2.

Chúng ta sẽ tìm mối liên hệ giữa độ dài của các véc tơ. Với mọi chỉ số i, ta có các đẳng thức sau

$$|b_i| = |a_i|\cos\left(\frac{\pi}{n}\right), |c_i| = |b_i|\cos\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Hơn nữa, các véc tơ a_i và c_i là cùng hướng. Vì vậy $c_i = \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) a_i$ và

$$\begin{aligned} s &= c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right)(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) s. \end{aligned}$$

Từ đẳng thức $s = \cos^2\left(\frac{\pi}{n}\right) s$, suy ra (với $n > 2$) $s = 0$.

Phương pháp thứ ba (cách nhóm khác)

Xét các véc tơ (Hình 3)

$$d_2 = \overrightarrow{OD_2} = \frac{a_1 + a_3}{2}, d_3 = \overrightarrow{OD_3} = \frac{a_2 + a_4}{2},$$
$$\ldots, d_1 = \overrightarrow{OD_1} = \frac{a_n + a_2}{2}.$$

Khi đó

$$d_1 + d_2 + \cdots + d_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = s.$$

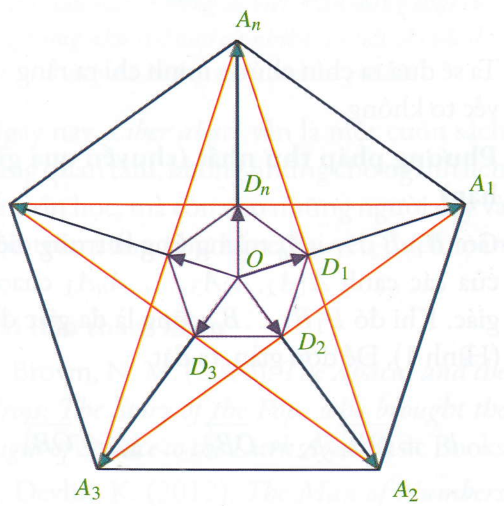
Dễ dàng nhận thấy, với mọi chỉ số i ta có đẳng thức

$$d_i = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) a_i.$$

Lấy tổng theo i, ta thu được

$$s = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) s.$$

Từ đây, ta lại có $s = 0$.



Hình 3.

Phương pháp thứ 4 (đối xứng trục)

Với n chẵn, khẳng định của bài toán là rõ ràng do các hạng tử của tổng s có thể được chia thành nhóm gồm các cặp véc tơ đối nhau. Giả sử $n = 2k - 1$. Dễ thấy các véc tơ

a_2 và a_{2k-1}, a_3 và $a_{2k-2}, \ldots, a_k$ và a_{k+1} đối xứng với nhau qua đường thẳng OA_1 (véc tơ a_1 thuộc đường thẳng này). Vì vậy các tổng $a_2 + a_{2k-1}, a_3 + a_{2k-2}, \ldots, a_k + a_{k+1}$ cùng phương với véc tơ a_1. Từ đó ta suy ra tính chất tương tự với véc tơ

$$s = a_1 + (a_2 + a_{2k-1}) + (a_3 + a_{2k-2}) + \cdots + (a_k + a_{k+1}).$$

Nhưng véc tơ a_2 (giống như mọi véc tơ a_i) có vai trò bình đẳng với véc tơ a_1 cho nên bằng cách lý luận tương tự như trên ta cũng suy ra véc tơ s cùng phương với véc tơ a_2. Nếu giả sử $s \neq 0$ thì ta sẽ suy ra các véc tơ a_1 và a_2 cùng phương với nhau, là một điều vô lý. Điều đó có nghĩa là $s = 0$.

Phương pháp thứ 5 (phép quay)

Quay tất cả các véc tơ một góc $\frac{2\pi}{n}$ theo chiều kim đồng hồ. Khi đó véc tơ a_1 biến thành véc tơ a_2, véc tơ a_2 biến thành véc tơ $a_3 \ldots$, véc tơ a_n biến thành véc tơ a_1, còn véc tơ $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ biến thành véc tơ $a_2 + a_3 + \cdots + a_1 = s$. Như vậy, ta quay véc tơ s một góc $\frac{2\pi}{n}$ (góc này không phải là bội của 2π) và lại thu được véc tơ s. Điều này chỉ có thể xảy ra khi véc tơ s là véc tơ không.

Phương pháp 6 (vị tự quay)

Đặt $k = \frac{A_1A_2}{OA_1}$. Với mỗi i, nhân véc tơ a_i với k, sau đó quay nó theo chiều kim đồng hồ một góc $\alpha = \pi - \angle OA_1A_2$ ta thu được véc tơ a_i' và nếu lấy điểm A_i là gốc véc tơ này sẽ trùng với véc tơ $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$. Vì vậy

$$\begin{aligned} s' &= a_1' + a_2' + \cdots + a_n' \\ &= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \cdots + \overrightarrow{A_nA_1} = 0. \end{aligned}$$

Thế nhưng véc tơ s' cũng thu được từ véc tơ s qua phép biến đổi như đối các hạng tử của nó: nhân với k và quay một góc α. Điều đó cho thấy véc tơ s bằng véc tơ không.

Phương pháp thứ 7 (số phức)

Ta quy ước rằng các đỉnh được đánh số ngược chiều kim đồng hồ và đường tròn ngoại tiếp đa giác đều n cạnh có bán kính bằng 1. Lập mặt phẳng phức sao cho tọa độ phức của tâm và đỉnh A_1 tương ứng là 0 và 1. Ký hiệu

$$\varphi = \frac{2\pi}{n}, q = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Khi đó tổng của n véc tơ tương ứng với tổng của n số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu tiên bằng 1 và công bội q:

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Thế nhưng $q^n = e^{in\varphi} = e^{2\pi i} = 1$. Tức là $S_n = 0$.

Phương pháp thứ 8 (trọng tâm)

Chúng ta sẽ chứng minh một khẳng định tổng quát hơn.

Giả sử đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ có hai trục đối xứng l_1 và l_2 cắt nhau tại điểm O. Khi đó

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \cdots + \overrightarrow{OA_n} = 0.$$

Đặt vào các đỉnh của đa giác các khối lượng một đơn vị. Khi đó bài toán được quy về việc chứng minh rằng trọng tâm sẽ nằm tại điểm O. Như chúng ta đã biết (xem [10, 11]) trọng tâm được xác định duy nhất. Giả sử trọng tâm nằm ở điểm C không thuộc bất cứ trục đối xứng l nào. Ta có

$$\overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{CA_2} + \cdots + \overrightarrow{CA_n} = 0.$$

Xét điểm C' đối xứng với điểm C qua l. Khi đó tổng các véc tơ $\overrightarrow{C'A_i}$ sẽ đối xứng với tổng của các véc tơ $\overrightarrow{CA_1}$ (tức là đối xứng với véc tơ không) qua l và vì thế cũng bằng véc tơ không. Như vậy, C' cũng là trọng tâm. Thế nhưng trọng tâm là duy nhất. vô lý. Vì vậy trọng tâm buộc phải nằm trên trục đối xứng bất kỳ của vật thể. Điều đó có nghĩa là nó thuộc cả l_1 và l_2. Mọi thứ được chứng minh xong!

Phương pháp thứ 9 (vật lý)

Qua mỗi điểm A_i kẻ đường thẳng vuông góc với véc tơ a_i, các giao điểm của các cặp đường thẳng liên tiếp đó cho ta một đa giác đều F đều n cạnh ngoại tiếp đa giác ban đầu. Xét một lăng trụ đứng tạo ra bằng cách kéo F theo hướng vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác. Giả sử lăng trụ này được đổ đầy nước và được đặt trên một mặt bàn phẳng. Khi đó tổng các véc tơ $s = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ tỷ lệ với véc tơ áp lực P của chất lỏng lên các thành cạnh của lăng trụ. Rõ ràng là lăng trụ không dịch chuyển vì thế $P = 0$, tức là $s = 0$.

Tài liệu tham khảo

[1] Эвнин А. Ю. *Пять решений одной системы уравнений* // Математика в школе. – 1998. – № 6.– С. 12 – 13.

[2] Эвнин А. Ю. *Букет окрестностей одной задачи, или о методах суммирования* // Математика в школе. – 2000. – № 8. – С. 64 – 67.

[3] Эвнин А. Ю. *Девятнацадцать доказательств теоремы Евклида* // Квант. – 2001. – № 1. – С. 35 – 38.

[4] Эвнин А. Ю. *Три доказательства теоремы Гринберга* // Преподавание математики в высшей школе работа с одаренными студентами в современных условиях: материалы Междунар. Науч. – практ. Семинара / М-во науки и высшего образования Рос. Федерации, Белорус. – Рос. Ун-т. – Могилёв: Белорус.-Рос. Ун-т. 2019. – С. 23 – 25.

[5] Эвнин А. Ю. *Задача о лягушке* // математическое просвещение. Третья серия, вып. 24. – 2019. –№ 16. – С. 168 – 174.

[6] Эвнин А. Ю. *Практикум по математике*. – Челябинск: Взгляд, 2009. – 256 с.

[7] Эвнин А. Ю. *Задачник по дискретной математике*. 6-е изд., перераб. и доп. – М.: URSS, 2016, – 272 с.

[8] Эвнин А. Ю. *Сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков*. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: ЛЕНАНД, 2017. – 224 с.

[9] Эвнин А. Ю. *Ещё сто пятьдесят красивых задач для будущих математиков*. – М.: ЛЕНАНД, 2018. – 216 с.

[10] Эвнин А. Ю. *Метод масс в геометрии треугольника* // Математика в школе. – 2014. - № 8. – С. 59 – 67.

[11] Эвнин А. Ю. *Метод масс в задачах* // Математическое образование. – 2015. – № 1 (73). – С. 27 – 47.