KINH TẾ - TÀI CHÍNH

PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN THỨ NHẤT GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ GÓI LỆNH TRONG MAPLE

HOÀNG NGỰ HUẤN*, LÊ THỊ HƯƠNG GIANG**

Tóm tắt

Nội dung bài báo nói về cách giải phương trình vi phân thường bằng cách hạ cấp của phương trình vi phân thông qua việc tìm kiếm nhân tử lấy tích phân và tích phân đầu. Xét về ứng dụng vật lý thì tích phân đầu chính là định luật bảo toàn vì giá trị biểu thức vi phân không thay đổi dọc theo nghiệm của các định luật vật lý (vốn là các phương trình vi phân). Bài báo sẽ nêu rõ định nghĩa và chỉ ra phương pháp tìm tích nhân tử lấy tích phân đầu, sau đó áp dụng vào các lớp phương trình cấp 2, 3, 4 để từ đó làm rõ các kỹ thuật chủ yếu của phương pháp.

Từ khóa: Nhân tử lấy tích phân, tích phân đầu.

Abstract

The content of the article talks about how to solve ordinary differential equations by downgrading differential equations through searching for integral factors and first integral. In terms of physical application, first integral is the law of conservation because the value of differential expression does not change along the solutions of the laws of physics (which are differential equations). The paper will specify the definition and show the method to find the first integral factor product, then apply it to the classes of equations at level 2, 3, 4 to clarify the main techniques of the method.

Keywords: Integral factors, first integral.

1. Giới thiệu

Xét phương trình

$$y^{(n)} - F\left(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Biểu thức vi phân

$$R_k = R_k\left(x, y, y', \dots, y^{(k)}\right), \ \ k < n, \tag{1.2}$$

* *Đại học Mỏ - Địa chất*

** *Đại học Mỏ - Địa chất*

được gọi là **nhân tử lấy tích phân** của phương trình (1.1), nếu sau khi nhân phương trình (1.1) với nó thì phương trình mới có thể viết lại dưới dạng đạo hàm toàn phần của một biểu thức P nào đó

$$R_k y^{(n)} - R_k F = D_x[P]; \quad (1.3)$$

Biểu thức P trong công thức trên được gọi là tích phân đầu (định luật bảo toàn) của phương trình (1.1).

Nếu đưa ra biểu thức phụ thuộc của nhân tử lấy tích phân (1.2) (hay của tích phân đầu) đối với đạo hàm cấp cao nhất (n-1), thì từ (1.3) có thể thiết lập một thuật toán cho phép tìm tích phân đầu ở dạng phụ thuộc đã cho (nếu như nó tồn tại). Phương pháp được sử dụng là phương pháp nhóm (bóc tách lần lượt, xem tài liệu [1-7]). Từ (1.3) suy ra

$$P_x + P_y y' + \cdots + P_{y^{(n-2)}} y^{(n-1)} + P_{y^{(n-1)}} y^{(n)} = R_k y^{(n)} - R_k F. \quad (1.4)$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$P_{y^{(n-1)}} = R_k.$$

Vì sự phụ thuộc của P, R_k và F vào $y^{(n-1)}$ cho trước nên ta có thể nhóm phương trình còn lại

$$P_x + P_y y' + \cdots + P_{y^{(n-2)}} y^{(n-1)} = -R_k F \quad (1.5)$$

theo số mũ của biến $y^{(n-1)}$ và sẽ tìm được biểu thức của P vào $y^{(n-2)}$ một cách tường minh. Tiếp đó biểu thức tìm được lại tiếp tục đặt vào phương trình (1.5) và nhóm theo số mũ của $y^{(n-2)}$...

2. Một số lớp phương trình

2.1. Phương trình cấp hai

Cho phương trình

$$y'' - F(x, y, y') = 0. \quad (2.1.1)$$

a) Nếu nhân tử lấy tích phân không phụ thuộc vào đạo hàm $R = R(x, y)$, khi đó tích phân đầu là tuyến tính đối với đạo hàm và có dạng

$$P = R(x, y)y' + Q(x, y), \quad (2.1.2)$$

còn hàm F của phương trình (1.6) là tam thức bậc hai của đạo hàm

$$F = a(x, y)(y')^2 + b(x, y)y' + c(x, y),$$

với

$$a(x, y) = -\frac{R_y}{R}, \quad b(x, y) = -\frac{R_x + Q_y}{R}, \quad c(x, y) = -\frac{Q_x}{R}. \quad (2.1.3)$$

Các giá trị từ công thức (2.1.3) trên cho phép dễ dàng kiểm tra xem phương trình (2.1.1) có tích phân đầu dạng (2.1.2) hay không: từ $a(x,y)$ ta tính R, từ $c(x,y)$ tính hàm Q, sau đó lắp vào đẳng thức của $b(x,y)$ để kiểm tra.

Nếu hàm F tuyến tính đối với đạo hàm

$$F = F_1(x,y)y' + F_0(x,y), \tag{2.1.4}$$

thì

$$R = R(x), \qquad F_1(x,y) = -\frac{R'(x,y) + Q_y}{R_x}, \qquad F_0(x,y) = -\frac{Q_x}{R(x)}.$$

Các hàm F_0 và F_1 liên hệ với nhau bằng công thức

$$\frac{\partial F_0}{\partial y} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{R'}{R}F_1 + \frac{R''}{R}.$$

Xét trường hợp F không phụ thuộc đạo hàm nếu *F = F(x,y), thì R = R(x), Q = − R'y + S(x)*, tức là phương trình ban đầu là tuyến tính:

$$F = \frac{R''}{R}y - \frac{S'}{R}.$$

Khi đó nhân tử lấy tích phân cũng chính là nghiệm của phương trình tuyến tính (thuần nhất) ban đầu, vì vậy việc tìm kiếm tích phân đầu và tìm nghiệm của phương trình là tương đương nhau về mặt độ khó.

b) Xét trường hợp nhân tử lấy tích phân là tuyến tính đối với đạo hàm

$$R_1 = 2R(x,y)y' + S(x,y).$$

Khi đó tích phân đầu có dạng tam thức bậc hai:

$$P = R(x,y)(y')^2 + S(x,y)y' + Q(x,y), \tag{2.1.5}$$

còn hàm F của phương trình (2.1.1) có dạng

$$F = -\frac{R_y(y')^3 + \left(R_x + S_y\right)(y')^2 + \left(S_x + Q_y\right)y' + Q_x}{2Ry' + S}.$$

Nếu hàm F có dạng (2.1.4), thì R = R*(x)* và

$$S_y = -(R' + 2RF_1), \qquad Q_y = -(S_x + SF_1 + 2RF_0).$$

Với $Q_x = SF_0$ nghiễm nhiên sẽ thỏa mãn.

Nếu đặt điều kiện $R_y = R_x + S_y = S_x + Q_y = 0$ thì

$$S = -R'y + \varphi, \quad Q = \frac{1}{2}R''y^2 - \varphi' y + \psi,$$

và

$$F = -\frac{R'''y^2 - 2\varphi''y + 2\psi}{2(2Ry' + R'y - \varphi)}$$

với R,φ,ψ là các hàm số của biến x.

Cuối cùng, đối với phương trình

$$y'' - F(x,y) = 0, \qquad (2.1.6)$$

có thể tìm được $F(x,y)$ ở dạng tường minh. Các hàm số trong tích phân đầu (2.1.5) và hàm $F(x,y)$ ràng buộc với nhau theo hệ sau

$$\begin{cases} R_y = 0, \\ R_x + S_y = 0, \\ S_x + Q_y + 2RF = 0, \\ Q_x + SF = 0. \end{cases} \qquad (2.1.7)$$

Từ phương trình đầu tiên có $R=R(x)$, còn từ phương trình thứ hai có $S = -R'y + \varphi(x)\cdot$ Kết quả ta thu được hệ hai phương trình

$$\begin{cases} Q_y - R''y + \varphi' + 2RF = 0, \\ Q_x - (R'y - \varphi)F = 0, \end{cases} \qquad (2.1.8)$$

ở đó chỉ có hai hàm hai biến là Q và F. Để tìm nghiệm của hệ này ta sử dụng phương pháp sau: một trong hai hàm ẩn (chính là hàm Q) sẽ bị triệt tiêu từ điều kiện $Q_{yx} = Q_{xy}$. Lấy vi phân phương trình đầu tiên theo biến x, còn phương trình thứ hai theo biến y, ta thu được phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp 1 đối với $F(x,y)$ như sau

$$(R'y - \varphi)\frac{\partial F}{\partial y} + 2R\frac{\partial F}{\partial x} + 3R'F - R'''y + \varphi'' = 0.$$

Nghiệm của phương trình trên là hàm

$$F = R^{-3/2}\Psi(z) + \frac{1}{2}R^{-2}\left\{\left[RR'' - \frac{1}{2}(R')^2\right]y - R\varphi' + \frac{1}{2}R'\varphi\right\},$$

với

$$z = R^{-1/2}y + \tfrac{1}{2}\int \varphi R^{-3/2}\,dx; \qquad (2.1.9)$$

Hàm Ψ là hàm bất kỳ của biến, các hàm R và φ là các hàm bất kỳ của biến x.

Khi đó tích phân đầu có dạng

$$R(y')^2 - (R'y - \varphi)y' + \frac{1}{4}R^{-1}(R')^2y^2 - \frac{1}{2}R^{-1}R'\varphi y$$

$$+\tfrac{1}{4}R^{-1}\varphi^2 - 2\int \Psi(z)dz = C_1. \qquad (2.1.10)$$

Phương trình trên dễ dàng đưa về phương trình với biến phân ly bằng cách tính $(z')^2$ từ phương trình (2.1.9) rồi biểu diễn lại (2.1.10) dưới dạng

$$R^2(z')^2 - 2\int \Psi(z)dz = C_1,$$

Tích phân tổng quát của phương trình đầu có dạng

$$\int_0^z \frac{du}{\sqrt{2\int_0^u \Psi(\tau)d\tau| + C_1}} = \pm\int \frac{dx}{R(x)} + C_2.$$

Như vậy, trong trường hợp này chúng ta đã giải được bài toán ngược - tìm tích phân đầu, hơn thế nữa chúng ta đã tìm được lớp tất cả các phương trình dạng (2.1.6) có tích phân đầu dạng tam thức bậc hai và đã chứng minh được rằng bất kỳ phương trình nào thuộc lớp này đều lấy tích phân được.

2.2. Phương trình Ermakov

Một trong những phương trình điển hình trong việc ứng dụng kỹ thuật tìm tích phân đầu là phương trình mang tên Ermakov

$$y'' = f(x)y - Ay^{-3}. \quad (2.2.1)$$

Cùng với nó ta xem xét phương trình dạng "cụt" (dạng cắt ngắn), tức phương trình tuyến tính

$$y'' = f(x)y. \quad (2.2.2)$$

Ta sẽ tìm tích phân đầu dạng tam thức bậc hai (2.1.5) đối với đạo hàm cấp một

$$P(x,y,y') = R(x,y)(y')^2 + S(x,y)y' + Q(x,y).$$

Kết quả thu được sẽ là: nếu tìm được hai nghiệm độc lập tuyến tính của phương trình "cụt" tuyến tính (2.2.2), thì nghiệm tổng quát của phương trình Ermakov (2.2.1) có thể tìm được một cách tường minh (không chứa dấu tích phân). Nghiệm thu được khác với nghiệm trong cuốn sách [6]: ở đó chỉ cần một nghiệm của phương trình (2.2.2) nhưng nghiệm thu được vẫn chứa dấu tích phân. Kỹ thuật sử dụng ở đây hoàn toàn tương tự với phương trình tuyến tính cấp hai: khi biết hai nghiệm riêng độc lập tuyến tính có thể xây dựng được nghiệm tổng quát mà không cần lấy tích phân.

Lưu ý là trong vòng 100 năm phương trình Ermakov là ví dụ duy nhất về phương trình và nghiệm tổng quát của nó hoàn toàn được xác định từ nghiệm của phương trình tuyến tính tương ứng. Mãi tới những thập niên cuối của thế kỷ hai mươi người ta mới tìm được thuật toán xây dựng những phương trình cấp bất kỳ có tính chất như trên.

Vì thế việc tìm tích phân đầu với kỹ thuật tương tự như trên đối với phương trình Ermakov mở rộng

$$y'' = f(x)y + g'(x)y^{-1} - [g(x)]^2 y^{-3} \qquad (2.2.3)$$

là rất thú vị.

2.3. Phương trình cấp ba

Xét phương trình

$$y''' - F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (2.3.1)$$

Nhìn chung, thuật toán tìm kiếm nhân tử lấy tích phân là không khác đối với phương trình cấp hai. Vì thế chúng ta sẽ xem xét cụ thể trường hợp $F_{y''} = 0$, *hay* $F = F(x,y,y')$.

a) Nếu nhân tử lấy tích phân không phụ thuộc *y''* thì tích phân thứ nhất tuyến tính đối với đạo hàm cấp cao nhất

$$P = R(x, y, y')y'' + Q(x, y, y') \qquad (2.3.2)$$

sau khi nhóm và đồng nhất hệ số của phương trình định nghĩa ta thu được hệ

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ R_x + R_y y' + Q'_y = 0, \\ Q_x + Q_y y' + RF = 0. \end{cases} \qquad (2.3.3)$$

Từ đây suy ra nếu tích phân đầu có dạng (2.3.2) thì nhân tử lấy tích phân không phụ thuộc vào đạo hàm: $R = R(x,y)$, còn hàm Q có dạng tam thức bậc hai với đạo hàm cấp một

$$Q(x, y, y') = -\frac{1}{2}R_y (y')^2 - R_x y' + \psi(x, y).$$

Từ phương trình thứ ba của hệ (2.3.3) suy ra điều kiện ràng buộc đối với F

$$F = \frac{1}{2}\frac{R_{yy}}{R}(y')^3 + \frac{3}{2}\frac{R_{xy}}{R}(y')^2 + \frac{R_{xx} - \psi_y}{R}y' - \psi_x,$$

tức là F là đa thức cấp ba đối với y'. Lưu ý các trường hợp riêng sau đây:

$$F = \frac{3\alpha'(x)}{2[\alpha(x)y + \beta(x)]}(y')^2 + \frac{\alpha''(x)y + \beta''(x) - \psi(y)}{\alpha(x) + \beta(x)}y' - \frac{\psi_x}{\alpha(x)y + \beta(x)},$$

$R = \alpha(x)y + \beta(x)$, ψ là hàm bất kỳ.

$$F = \frac{\beta''(x) - \psi_y}{\alpha y + \beta(x)}y' - \frac{\psi_x}{\alpha(x)y + \beta(x)},$$

$R = \alpha y + \beta(x)$, α là hằng số, ψ là hàm số bất kỳ;

$$F = F(x, y) = -\frac{\beta'''(x)y + \gamma'(x)}{\alpha y + \beta(x)},$$

$R = \alpha y + \beta(x)$, $\psi = \beta''(x)y + \gamma(x)$, α là hằng số, β, γ là các hàm bất kỳ của biến x.

Trường hợp riêng, phương trình

$$y''' = Ax^n y^{-1}$$

có tích phân đầu

$$yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{A}{n+1}x^{n+1} = C, \quad n \neq -1;$$

hay

$$yy'' - \frac{1}{2}(y')^2 - A\ln x = C, \quad n = -1.$$

b) Giả sử nhân tử lấy tích phân tuyến tính theo đạo hàm cấp hai

$$R_2 = R(x,y,y')y'' + Q(x,y,y').$$

Khi đó tích phân đầu có dạng tam thức bậc hai

$$P = \frac{1}{2}R(x,y,y')(y'')^2 + Q(x,y,y')y'' + S(x,y,y').$$

Đồng nhất hệ số theo y'' ta có hệ

$$\begin{cases} R_{y'} = 0, \\ \frac{1}{2}R_x + \frac{1}{2}R_y y' + Q_{y'} = 0, \\ Q_x + Q_y y' + S_{y'} + RF = 0, \\ S_x + S_y y' + QF = 0. \end{cases}$$

Từ đây có thể suy ra ngay $R = R(x,y)$, $Q = -\frac{1}{4}R_y(y')^2 - \frac{1}{2}R_x y' + \omega(x,y)$, tức là các hàm R,Q có cấu trúc tương tự như trường hợp a).

Viết các phương trình còn lại dưới dạng

$$\begin{cases} RF = \frac{1}{4}R_{yy}(y')^3 + \frac{3}{4}R_{xy}(y')^2 + \left(\frac{1}{2}R_{xx} - \omega_y\right)y' - \omega_x - S_{y'}, \\ \frac{1}{4}R_y F(y')^2 + \left(\frac{1}{2}R_x F - S_y\right)y' - \omega F - S_x = 0. \end{cases}$$

Để tiếp tục tiến hành phương pháp nhóm cần phải cụ thể hóa dạng của hàm F. Giả sử $F = F(x,y)$. Khi đó

$$S = \psi_4(x,y)(y')^4 + \psi_3(x,y)(y')^3 + \psi_2(x,y)(y')^2 + \psi_1(x,y)y' + \psi_0(x,y)$$

(Lưu ý là biểu thức của S sẽ vẫn có dạng như trên kể cả trường hợp F có phụ thuộc vào y' dạng đa thức tới cấp ba - chỉ có một điểm khác biệt là hệ phương trình đặc trưng phía dưới sẽ có dạng khác). Sau khi nhóm và đồng nhất hệ số theo bậc của y' ta thu được hệ mười phương trình

$$\psi_{4y} = 0, \qquad 4\psi_4 = \frac{1}{4}R_{yy},$$

$$\psi_{3y} + \psi_{4x} = 0, \qquad 3\psi_3 = \frac{3}{4}R_{xy},$$

$$\psi_{2y} + \psi_{3x} = 0, \qquad 2\psi_2 + \omega_y = \frac{1}{2}R_{xx},$$

$$\psi_{1y} + \psi_{2x} = \frac{1}{4}R_yF, \qquad \psi_1 + \omega_x = -RF,$$

$$\psi_{0y} + \psi_{1x} = \frac{1}{2}R_xF, \qquad \psi_{0x} = -\omega F.$$

Trong trường hợp tổng quát $(R_x, R_y \neq 0)$, ta có

$$\psi_4 = a, \quad \psi_3 = \frac{1}{4}\chi'(x), \quad \psi_2 = -\frac{1}{4}\chi''(x)y + \sigma_2(x);$$

$$R = 8ay^2 + \chi(x)y + \rho(x), \qquad \omega = \frac{1}{2}\chi''(x)y^2 + \left[\frac{1}{2}\rho''(x) - \sigma_2(x)\right]y + \sigma_1(x).$$

Hệ còn lại bốn phương trình

$$\begin{cases} RF = -\omega_x - \psi_1, \\ \frac{1}{4}R_yF = \psi_{1y} - \frac{1}{4}\chi'''(x)y + \sigma_2'(x), \\ \frac{1}{2}R_xF = \psi_{0y} + \psi_{1x}, \\ \omega F = \psi_{0x}. \end{cases}$$

Từ phương trình đầu và phương trình thứ hai ta thu được

$$\psi_1 = R^{-1/4}\left[\sigma_0(x) + \int \left(\frac{1}{4}\chi'''y - \sigma_2' - \frac{R_y}{4R}\omega_x\right)R^{1/4}\,dy\right]$$

và dạng tổng quát của phương trình

$$F = R^{-5/4}\left[f_0(x) - \int \left(\frac{5}{4}\chi'''y - \frac{1}{2}\rho''' + 3\sigma_2'\right)R^{1/4}\,dy\right],$$

Phương trình thứ ba và thứ tư dẫn đến hạn chế của F:

$$\omega F_y + \frac{1}{2}R_xF_x + \left(\omega_y + \frac{1}{2}R_xx\right)F = \psi_{1xx},$$

sau đó thì tìm được ψ_0.

Nếu ta giả thiết là $R_y = 0$ thì

$$\psi_4 = \psi_3 = 0, \quad \omega = \left(\frac{1}{2}R'' - 2\sigma_2\right)y + \sigma_1, \quad \psi_1 = -\sigma_2' y + \sigma_3(x),$$

và hệ có dạng mới

$$\begin{cases} \sigma_2' y - \sigma_3 - \omega_x = RF, \\ \psi_{0y} - \sigma_2'' y + \sigma_3' = \dfrac{1}{2}R'F, \\ \psi_{0x} = -\left[\left(\dfrac{1}{2}R'' - 2\sigma_2\right)y + \sigma_1\right]F. \end{cases}$$

Từ phương trình đầu suy ra hàm F tuyến tính theo biến y

$$RF = \left(3\sigma_2' - \frac{1}{2}R'''\right)y - \sigma_1' - \sigma_3,$$

ψ_0 là tam thức bậc hai của biến y, từ phương trình cuối ta nhóm và đồng nhất hệ số theo bậc của biến y ta sẽ thu được ba phương trình để xác định các hàm $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, R$ và một hàm mới là $\sigma_0(x)$ (số hạng tự do ψ_0). Như vậy hàm F chứa tối đa là hai hàm tự do.

Giả sử rằng $R_x = 0$. Khi đó

$$\psi_4 = a, \qquad \psi_3 = 0, \qquad \psi_2 = \sigma_{2(x)},$$

$$R = 8ay^2 + by + c, \qquad \omega = -2\sigma_2 y + \sigma_1(x),$$

từ đây có

$$\psi_1 = \eta(x)(8ay^2 + by + c)^{-1/4} + 2\sigma_2' y - \sigma_1'$$

và dạng tổng quát của hàm F:

$$F = -\eta(x)(8ay^2 + by + c)^{-5/4}.$$

Còn lại hai phương trình

$$\begin{cases} \psi_{0y} + \psi_{1x} = 0, \\ \psi_{0x} = (2\sigma_2 y - \sigma_1)F. \end{cases}$$

Từ điều kiện $\psi_{0xy} = \psi_{0yx}$, ta tìm được $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ và $\eta(x) = \gamma x + \delta$. Kết quả cuối cùng có

$$F = -(\sigma x + \delta)(8ay^2 + by + c)^{-5/4},$$

tức là phương trình

$$y''' = (Ax + B)(\alpha y^2 + \beta y + \gamma)^{-5/4} \qquad (2.3.5)$$

có tích phân đầu dạng

$$P = \frac{1}{2}(\alpha y^2 + \beta y + \gamma)(y'')^2 - \frac{1}{4}(2\alpha y + \beta)(y')^2 y'' + \frac{1}{8}\alpha(y')^4 -$$

$$-(Ax + B)(\alpha y^2 + \beta y + \gamma)^{-1/4} y' + A\int(\alpha y^2 + \beta y + \gamma)^{-1/4}\, dy = C,$$

với nhân tử lấy tích phân là

$$R_2 = (\alpha y^2 + \beta y + \gamma)y'' - \frac{1}{4}(2\alpha y + \beta)(y')^2.$$

2.4. Phương trình cấp bốn

Vì thuật toán là hoàn toàn tương tự như ở trên, nên chúng ta chỉ xem xét một vài trường hợp riêng. Giả sử phương trình có dạng

$$y^{(IV)} + \alpha y'' + \beta y - F(x,y) = 0. \quad (2.4.1)$$

Nhân tử lấy tích phân không phụ thuộc đạo hàm cấp ba, tức là tích phân đầu tuyến tính đối với đạo hàm cấp cao nhất

$$P = R(x,y,y',y'')y''' + Q(x,y,y',y'').$$

Nhóm và đồng nhất hệ số theo đạo hàm cấp ba cho ta kết quả

$$R = R(x,y,y'),$$

$$Q = -\frac{1}{2}R'_y(y'')^2 - (R_y y' + R_x)y'' + S(x,y,y').$$

Tiếp tục nhóm và đồng nhất hệ số của phương trình định nghĩa (theo đạo hàm cấp hai) ta sẽ thu được dạng cụ thể của R và S

$$R = r(x)y' - \frac{3}{2}r'(x)y + \varphi(x)$$

$$S = \left(\frac{\alpha}{2}r - r''\right)(y')^2 + \left[\varphi'' + \alpha\varphi - \frac{3}{2}(r''' + \alpha r')\right]y' + \omega(x,y)$$

và hàm *r(x)*:

$$r(x) = \begin{cases} C_1 + C_2 e^{\sigma x} + C_3 e^{-\sigma x}, \quad \sigma = \sqrt{-\frac{2\alpha}{5}}, & khi \ \alpha < 0, \\ C_1 + 2C_2 x + C_3 x^2 & khi \ \alpha = 0, \\ C_1 + C_2 \sin \omega x + C_2 \cos \omega x, \ \omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{5}} & khi \ \alpha > 0. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Hai hàm còn lại có dạng

$$\omega_y - \frac{3}{2}(r^{(IV)} + \alpha r'')y + \varphi''' + \alpha\varphi' - \beta r y + rF = 0,$$

$$\omega x + \frac{3}{2}\beta r' y^2 - \frac{3}{2}r' y F + \varphi F = 0.$$

Điều kiện $\omega_{xy} = \omega_{yx}$ dẫn đến phương trình đạo hàm riêng cấp một để xác định hàm *F*:

$$\left(\frac{3}{2}r'y - \varphi\right)F_y + rF_x + \frac{5}{2}r'F - \left(\frac{3}{2}r^{(V)} + \frac{3}{2}\alpha r''' + 4\beta r'\right)y + \varphi^{(IV)} + \alpha\varphi'' + \beta\varphi = 0. \quad (2.4.3)$$

Nghiệm tổng quát của nó viết dưới dạng

$$F = r^{-5/2}\left\{\Psi(z) + r^{-3/2}y\int r^3\left(\frac{3}{2}r^{(V)} + \frac{3}{2}\alpha r''' + 4\beta r'\right)dx\right.$$
$$+\int \varphi r^{-5/2}\left[\int r^3\left(\frac{3}{2}r^{(V)} + \frac{3}{2}\alpha r''' + 4\beta r'\right)dx\right]dx$$
$$\left.-\int r^{3/2}\left(\varphi^{(IV)} + \alpha\varphi'' + \beta\varphi\right)dx\right\},$$

trong đó

$$z = r^{-3/2}y + \int \varphi r^{-5/2}dx, \quad (2.4.4)$$

φ, ψ là các hàm tự do với biến đã cho, $r = r(x)$ được xác định theo công thức (2.4.2). Lấy tích phân số hạng cuối cùng trong từng biểu thức dưới dấu tích phân ta sẽ thu được

$$F = \beta y + F_1,$$

trong đó

$$F_1 = r^{-5/2}\left\{\Psi(z)\right.$$
$$+\frac{3}{2}r^{-3/2}y\int r^3\left(r^{(V)} + \alpha r'''\right)dx$$
$$\left.+\frac{3}{2}\int \varphi r^{-5/2}\left[\int r^3(r^{(V)} + \alpha r''')dx\right]dx - \int r^{3/2}\left(\varphi^{(IV)} + \alpha\varphi''\right)dx\right\},$$

còn phương trình (2.4.1) thì có dạng

$$y^{(IV)} + \alpha y'' - F_1(x, y) = 0,$$

biến z được xác định theo công thức (2.4.4).

3. Kết quả thảo luận

Khái niệm tích phân đầu đã được đề cập đến trong nhiều tài liệu về phương trình vi phân. Trong cuốn sách [2] có giới thiệu phương pháp tìm nhân tử lấy tích phân và tích phân đầu bằng toán tử Euler. Phương pháp tìm tích phân trong bài báo là phương pháp trực tiếp, tỏ ra hữu hiệu hơn vì cùng lúc tìm được ngay nhân tử lấy tích phân và tích phân đầu. Đây có thể nói là đóng góp mới của bài báo trong việc đưa ra một phương pháp mới đơn giản và hiệu quả.

Rất thú vị là trong chương trình Maple có trang bị gói lệnh Detools, trong đó có hai câu lệnh tìm nhân tử lấy tích phân *intfactor* và tích phân đầu *firint* - tìm nhân tử trước sau đó nhân với phương trình và tìm tích phân đầu sau.

Ta sẽ thực hành ví dụ với phương trình cấp 4

$$\boldsymbol{y^{IV} = y^{-\frac{5}{3}}}$$

```
> with(DEtools); PDEtools[declare](y(x), prime = x)
;
```

$$ODE := diff\,(y(x), x\$4) = y(x)^{\left(-\frac{5}{3}\right)};$$

$$\frac{d^4}{dx^4}\,y(x) = \frac{1}{y(x)^{5/3}}$$

$$t1 := intfactor\,(ODE); firint\,(t1 \cdot ODE);$$

$$\frac{d}{dx}\,y(x)$$

$$\frac{3}{2\,y(x)^{2/3}} - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right)^2 + \left(\frac{d^3}{dx^3}\,y(x)\right)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + \_C1 = 0$$

Kết quả thu được là một nhân tử lấy tích phân và tích phân đầu tương ứng

$$R_1 = y'$$
$$P_1 = y'y''' - \frac{1}{2}(y'')^2 + \frac{3}{2}y^{-\frac{2}{3}}$$

Đây cũng là giới hạn của chương trình Maple vì chỉ tìm được duy nhất một kết quả. Với phương pháp đã nêu ở trên ta có thể tìm thêm được hai tích phân đầu nữa là

$$P_2 = \left(-\frac{2}{3}xy' + y\right)y''' + \frac{1}{3}x(y'')^2 - \frac{1}{3}y'y'' - xy^{-\frac{2}{3}}$$
$$P_3 = \left(-\frac{1}{3}x^2y' + xy\right)y''' + \left[\frac{1}{6}x^2(y'')^2 - \frac{1}{3}xy'y'' - yy''\right] + \frac{2}{3}(y')^2 - \frac{1}{2}x^2y^{-\frac{2}{3}}$$

4. Kết luận

Phương pháp tìm kiếm và tính chất của tích phân đầu. Những tính toán cụ thể ở trên cho thấy rằng với bất kỳ phương trình cấp cao hơn một nào đều tồn tại thuật toán đơn giản nhưng hữu hiệu để tìm tích phân đầu có dạng phụ thuộc vào đạo hàm cấp cao nhất cho trước. Khuyết điểm duy nhất của phương pháp này là kết quả không thể dự báo trước, tức là: đặt biểu thức tìm được vào phương trình cuối cùng của hệ xác định có thể thu được tích phân đầu dạng tầm thường P=C.

Vì vậy trong nhiều trường hợp (các ví dụ trên đã cho thấy rõ) bài toán ngược tỏ ra thú vị hơn, tức là liệt kê tất cả các phương trình của một lớp nào đó có tích phân đầu có dạng phụ thuộc cho trước vào đạo hàm cấp cao nhất. Khi đó hàm F thỏa mãn phương trình đạo hàm riêng tuyến tính cấp một, và nghiệm của phương trình có thể dễ dàng tìm được, hoặc là hệ phương trình đạo hàm riêng dạng tuyến tính của F và một số hàm bổ trợ (trong trường hợp này hệ xuất hiện như là hệ quả của quá trình xác định).

Lưu ý một số tính chất đơn giản của tích phân đầu:

A. Nếu P là tích phân đầu, thì $\Phi(P)$ (với Φ là hàm khả vi bất kỳ) cũng là tích phân đầu của chính phương trình đã cho. Vì vậy, nên bắt đầu việc tìm kiếm tích phân đầu ở dạng đơn giản nhất: phụ thuộc tuyến tính vào đạo hàm cấp cao nhất.

B. Tích phân đầu của phương trình (1.1) tạo thành một phương trình vi phân cấp $n - 1$ (bằng cách cho đồng nhất với một hằng số tự do) và nó có nghiệm trùng với nghiệm của phương trình đầu. Điều này tương đương với việc giảm cấp của phương trình đầu xuống một đơn vị.

Nếu tích phân đầu chứa k hằng số tự do và độc lập với nhau, thì chúng ta có k tích phân đầu độc lập. Từ đây nếu triệt tiêu các đạo hàm cấp cao nhất thì ta sẽ thu được phương trình cấp $(n - k)$ có nghiệm trùng với phương trình đầu. Và điều đó tương đương với việc giảm cấp của phương trình đầu xuống k đơn vị.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Thế Hoàn và Phạm Phu, *Cơ sở phương trình vi phân và lí thuyết ổn định,* NXB Giáo dục, năm 2007;

[2] Bluman G. W., Anco S. C., *Symmetry and integration methods for differential equations,* Springer, 2002;

[3] Avrashkov P. P., *Các thuật toán của giải tích đối xứng cho phương trình vi phân thường cấp ba,* luận văn bảo vệ tiến sĩ ngành toán lý, Kazan, năm 2004;

[4] Zaitsev V. F., Linchuk L. V. , *Phương trình vi phân. Lý thuyết cấu trúc,* tập 1, NXB Knhizhnui, 2008;

[5] Zaitsev V. F., Linchuk L. V., *Phương trình vi phân. Lý thuyết cấu trúc,* tập 2, NXB Knhizhnui, 2008;

[6] Zaitsev V. F., Polianhin A. D., *Sổ tay phương trình vi phân,* NXB Phizmatlit, 2001;

[7] Ibragimov N. X. (1989), *Sách giáo khoa về nhóm giải tích,* NXB Znanhie, ser. "Toán học và cơ học", số 8, 1989.

Nghiên cứu này được tài trợ bởi trường Đại học Mỏ Địa chất

Ngày nhận bài: 31/12/2020

Ngày gửi phản biện: 31/12/2020

Ngày duyệt đăng: 05/01/2021